Université du Littoral Côte d'Opale
Probabilités
M1 mathématiques
Année 2022-2023

Fiche n°1. Quelques rappels de probabilités.

Exercice 1. (1) Justifier que les ensembles suivants sont des Boréliens :

$$]0,+\infty[,\ \mathbf{R}^*,\ \{0\},\ \mathbf{Q},\ [0,2]\backslash]1,4[.$$

(2) Calculer les mesures de Lebesgue des ensembles ci-dessus.

Exercice 2. Calculer la fonction de répartition d'une variable aléatoire qui suit la loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$ puis la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$.

Exercice 3. Calculer l'espérance d'une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$; puis la loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$; puis la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$.

Exercice 4. Calculer la fonction caractéristique de la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$.

Exercice 5. (1) Soit X une variable aléatoire réelle de densité f_X. Donner une expression de $\mathbb{P}(X \in A)$ pour tout Borélien A en fonction de f_X et de A.

(2) Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{R}^2$ de densité $f_{X,Y}$.
  (a) Donner une expression de $\mathbb{P}((X, Y) \in B \times C)$ pour tous Boréliens B et C en fonction de $f_{X,Y}$ et de B et C.
  (b) Déterminer les densités de X et de Y.
  (c) Dans le cas où X et Y sont indépendantes, quelle relation y a-t-il entre la densité $f_{X,Y}$ du couple (X, Y) et les densités f_X et f_Y de X et de Y ?

Exercice 6. Enoncer les théorèmes de convergence monotone et dominée.