Fiche n°2. Convergence de variables aléatoires.

1. Convergence spatiale

Exercice 1. Pour toutes variables aléatoires réelles X et Y, notons

$$d(X,Y) = \mathbb{E}\left[\frac{|X-Y|}{1+|X-Y|}\right].$$

(1) Montrer que $d(\cdot,\cdot)$ est une métrique sur l'espace des variables aléatoires.

(2) Soient (X_n) une suite de variables aléatoires réelles et X une variable aléatoire réelle. Montrer l'équivalence

$$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \iff d(X_n, X) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice 2. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, X_n étant de fonction de répartition F_n définie par

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \dfrac{1}{x+n} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

On note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $Y_n = \frac{S_n}{n}$.

(1) Montrer que (X_n) converge vers 0 en probabilité.

(2) Montrer que (Y_n) ne converge pas vers 0 en probabilité.

Exercice 3. (1) Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes convergeant p.s. vers une variable aléatoire X. Montrer que X est p.s. constante.

(2) Montrer que le résultat ci-dessus reste vrai si on suppose seulement la convergence en probabilité.

Exercice 4. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles convergeant en probabilité vers une variable aléatoire X. Montrer que si $|X_n| \leq Y$, où $Y \in L^1$, alors $X_n \xrightarrow{L^1} X$.

Exercice 5. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes telle que X_n suive la loi de Poisson de paramètre λ_n. Montrer que, si $\sum_{n=1}^\infty \lambda_n = \infty$, alors

$$\frac{S_n}{\mathbb{E}[S_n]} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1,$$

où $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

Exercice 6. Soit (τ_n) une suite i.i.d. de variables aléatoires réelles positives et intégrables. Soit (T_n) la suite définie par $T_0 = 0$ et $T_n = \tau_1 + \cdots + \tau_n$ pour tout $n \geq 1$. Posons, pour tout $t \geq 0$,

$$N_t = \sup\{n \geq 0 : T_n \leq t\}.$$

(1) Montrer que $\lim_{n\to\infty} \frac{T_n}{n} = \mathbb{E}[\tau_1]$ p.s. et que $\lim_{t\to\infty} N_t = \infty$ p.s.

(2) En déduire que $\lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} = \frac{1}{\mathbb{E}[\tau_1]}$ p.s..

2. Convergence en loi

Exercice 7. (1) Trouver des variables aléatoires X_n, Y_n et X, Y, toutes définies sur un même espace probabilisé, telles que $X_n \Rightarrow X$, $Y_n \Rightarrow Y$ mais telles que $X_n + Y_n$ ne converge pas en loi vers $X + Y$.

(2) Répondre à la même question en considérant cette fois-ci le produit au lieu de la somme.

Exercice 8. Le but de cet exercice est de démontrer le *lemme de Slutzky*.

(1) Montrer que si (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire p.s. constante égale à a, alors X_n converge en probabilité vers a.

(2) Montrer que si $X_n \Rightarrow X$ et $Y_n \Rightarrow a$, $a \in \mathbf{R}$, alors $X_n + Y_n \Rightarrow X + a$.

(3) Montrer que si $X_n \Rightarrow X$ et $Y_n \Rightarrow a$, $a \in \mathbf{R}$, alors $X_n Y_n \Rightarrow aX$.

Exercice 9. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires de loi normale centrée réduite et soit (Y_n) une suite de variables aléatoires telle que la loi de Y_n est $\mathbb{P}_{Y_n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\delta_1 + \frac{1}{n}\delta_0$ pour tout entier n. Etudier la convergence en loi de $(X_n Y_n)$.

Exercice 10. Soit (p_n) une suite de nombres réels dans $]0,1[$ tels que $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda$, où $\lambda > 0$. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires binomiales de paramètre (n, p_n). Montrer que la suite (X_n) converge en loi et identifier sa limite.

Exercice 11. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires i.i.d. telle qu'il existe $a < b$ tels que

— $\mathbb{P}(X_1 < a) = 0$ et $\mathbb{P}(X_1 > b) = 0$;

— $0 < \mathbb{P}(X_1 \leq x) < 1$ pour tout $x \in]a, b[$.

Posons $Y_n = \inf\{X_1, \ldots, X_n\}$ et $Z_n = \sup\{X_1, \ldots, X_n\}$.

(1) Montrer que $Y_n \Rightarrow a$ et que $Z_n \Rightarrow b$.

(2) Dans le cas où les X_i suivent la loi uniforme sur $[0,1]$, étudier la convergence en loi de nY_n.

Exercice 12. Soit $\alpha \in]0,2[$. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires i.i.d. réelles telles que

$$\mathbb{P}(X_1 > x) = \mathbb{P}(X_1 < -x) \text{ et } \mathbb{P}(|X_1| > x) = x^{-\alpha},$$

pour tout $x \geq 1$.

(1) Montrer que $\mathbb{P}(|X_1| \leq 1) = 0$.

(2) Calculer la densité de X_1.

(3) Soit φ la fonction caractéristique de X_1.

(a) Montrer que, pour tout $t > 0$,

$$1 - \varphi(t) = t^\alpha \alpha \int_t^\infty \frac{1 - \cos u}{u^{\alpha+1}} \mathrm{d}u.$$

(b) Montrer que $1 - \varphi(t)$ est équivalent à $C|t|^\alpha$ quand t tend vers 0, où C est une constante à déterminer.

(4) Posons $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Montrer que la suite $(S_n/n^{1/\alpha})$ converge en loi vers la loi de fonction caractéristique $e^{-C|t|^\alpha}$.

(5) Soit (Z_n) une suite de variables aléatoires i.i.d. de fonction caractéristique $e^{-C|t|^\alpha}$. Montrer que $(Z_1 + \cdots + Z_n)/n^{1/\alpha}$ a la même loi que Z_1.

(6) Que se passe-t-il lorsque $\alpha > 2$?

3. Loi des grands nombres et théorème central limite

Exercice 13. Soient D un domaine de $\mathbf{R}^d$ et f une fonction réelle définie sur $\mathbf{R}^d$ mesurable tels que $\mathbf{1}_D \cdot f$ soit intégrable. Soit (U_n) une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, de loi uniforme sur $[0,1]$. On définit, pour tout entier n, la variable aléatoire $\mathbf{U}_n$ à valeurs dans $\mathbf{R}^d$ par

$$\mathbf{U}_n = (U_{nd+1}, U_{nd+2}, \ldots, U_{(n+1)d})$$

et la variable aléatoire $X_n = (\mathbf{1}_D \cdot f) \circ \mathbf{U}_n$.

(1) Montrer que la suite de terme général $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ converge p.s. vers l'intégrale $I = \int_{D\cap[0,1]^d} f(x)\mathrm{d}x$.

(2) Montrer que, si f est bornée par $c > 0$, alors pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(|S_n - I| > \varepsilon\right) \leq \frac{c^2}{n\varepsilon^2}.$$

Exercice 14. (1) Soit (X_n) une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. de moyenne $m \in \mathbf{R}$ et de variance $\sigma^2 > 0$. Montrer que, pour tout $\alpha \in (0,1)$, on a

$$\mathbb{P}\left(m \in \left[\overline{X_n} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}u_{1-\alpha/2},\ \overline{X_n} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}u_{1-\alpha/2}\right]\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 - \alpha,$$

où $u_{1-\alpha/2}$ désigne le quantile de la loi normale centrée réduite.

(2) Dans le cas particulier où X_n, $n \geq 1$, suit la loi de Bernoulli de paramètre p, montrer que

$$\mathbb{P}\left(p \in \left[\overline{X_n} - \sqrt{\frac{\overline{X_n}(1-\overline{X_n})}{n}}u_{1-\alpha/2},\ \overline{X_n} + \sqrt{\frac{\overline{X_n}(1-\overline{X_n})}{n}}u_{1-\alpha/2}\right]\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 - \alpha.$$