Université du Littoral Côte d'Opale
Analyse-Probabilités
Préparation à l'agrégation (écrit)
Année 2022-2023

Fiche n°2. Analyse réelle.

Exercice 1. Soit a un nombre réel et $k > 0$. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $I =]a-k, a+k[$ et dérivable sur $I \setminus \{a\}$. Montrer que si $\lim_{x\to a} f'(x) = L$ alors f est dérivable en a et $f'(a) = L$.

Exercice 2.
1. Calculer le développement limité d'ordre 4 en 0 de l'application $x \mapsto \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$.
2. Calculer le développement limité d'ordre 4 en 1 de l'application $x \mapsto x^{\frac{1}{-1+\ln x}}$.
3. Calculer le développement en $+\infty$ de l'application $x \mapsto (x^3+x)^{1/3} - (x^3-x)^{1/3}$.

Exercice 3. Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}^d$ continue, $\mathbf{R}^d$ étant muni de sa structure euclidienne canonique. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\left\|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right\| = \int_a^b \|f(t)\|\mathrm{d}t$;

(ii) il existe un vecteur e de norme 1 et une fonction $\phi = [a,b] \to \mathbf{R}_+$ tels que, pour tout $t \in [a,b]$, on a $f(t) = \phi(t)e$.

Exercice 4. Soit f l'application définie, pour tout $t > 1$, par :

$$f(t) = \int_0^\pi \ln(t - \cos x)\mathrm{d}x.$$

1. Justifier que f est dérivable sur $]1, +\infty[$.
2. Montrer que $f'(t) = \frac{\pi}{\sqrt{t^2-1}}$ pour tout $t > 1$.
3. En déduire une expression de f.

Exercice 5. Soit f l'application définie, pour tout $t \geq 0$, par :

$$f(t) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x+x^2)^t}.$$

Le but de cet exercice est de fournir un équivalent asymptotique de $f(t)$.

1. Justifier que $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$.
2. Justifier[1] que, pour tout $t \geq 0$, on a $\frac{1}{(1+x+x^2)^t} = e^{-tx+o(x)}$.
3. D'après la question précédente, il est naturel de comparer $f(t)$ à $\int_0^1 e^{-tx}\mathrm{d}x$ (la principale contribution de $\frac{1}{(1+x+x^2)^t}$ lorsque t tend vers $+\infty$ est en effet en 0).
   (a) Justifier que, pour tout $t \geq 0$, on a :
   $$\left|f(t) - \int_0^1 e^{-tx}\mathrm{d}x\right| \leq \frac{1}{t}\int_0^t e^{-u}\left(1 - e^{-t\ln\left(1+\frac{u}{t}+\frac{u^2}{t^2}\right)+u}\right)\mathrm{d}u.$$
   (b) En déduire que $f(t) - \int_0^1 e^{-tx}\mathrm{d}x = o(1/t)$.
   (c) En déduire un équivalent asymptotique de $f(t)$.

Exercice 6. On pose $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x$.

---

1. Le $o(x)$ est à comprendre au sens où x tend vers 0.

(1) Justifier que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

(2) Le but de cette question est de fournir un équivalent asymptotique de u_n.

(a) Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, on a :

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+x}}{\sqrt{2}\sqrt{1+x}} \leq \frac{1-x}{2}.$$

(b) En déduire que

$$u_n - \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{2}} \mathrm{d}x = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

(c) En déduire un équivalent de u_n.