

# Constantes de Turán–Kubilius Friables : Une Étude Numérique

Guillaume Hanrot, Bruno Martin, and Gérald Tenenbaum

## CONTENTS

- 1. Introduction
- 2. Estimations Auxiliaires
- 3. Approximation Universelle de  $\lambda(u)$
- 4. Amélioration du Terme d’Erreur
- 5. Calcul Numérique de  $\lambda_N(u)$
- 6. La Variance Empirique
- 7. Résultats Experimentaux
- Remerciements
- Références

---

This study is a follow-up to two recent works: [la Bretèche et Tenenbaum 05] and [Martin et Tenenbaum 08]. The former provides a friable (i.e., with respect to integers free of large prime factors) extension of the classical Turán–Kubilius inequality, while the latter furnishes a theoretical method for sharp evaluation of the involved constants. Here, we complement these investigations with a numerical study of the friable Turán–Kubilius constants, thereby supplying an effective, quantitative measure of the discrepancy between probabilistic number theory and its probabilistic model.

Cette étude fait suite à deux travaux récents : [la Bretèche et Tenenbaum 05] et [Martin et Tenenbaum 08]. Le premier fournit une extension friable (i.e., relative aux entiers sans grand facteur premier) de l’inégalité classique de Turán–Kubilius, tandis que le second propose une méthode théorique pour déterminer les constantes optimales impliquées. Ici, nous complétons ces recherches par une étude numérique des constantes friables de Turán–Kubilius, fournissant ainsi une mesure effective et quantitative de la discrédance entre la théorie probabiliste des nombres et son modèle probabiliste.

---

## 1. INTRODUCTION

Un entier naturel  $n \geq 1$  est dit  $y$ -friable si son plus grand facteur premier  $P(n)$  — avec la convention  $P(1) = 1$  — n’excède pas  $y$ . La théorie des entiers friables prend graduellement une place prépondérante dans les diverses branches actuelles de la théorie analytique des nombres.

Dans cette perspective, une étude de la généralisation friable de l’inégalité de Turán–Kubilius, qui constitue un outil classique et essentiel de la théorie analytique et probabiliste des nombres, est susceptible de nombreuses applications. Ce problème a été abordé dans la bibliographie, notamment dans [Alladi 82, Xuan 93a, Xuan 93b, la Bretèche et Tenenbaum 05].

2000 AMS Subject Classification: Primary 11N25, 11N37; Secondary 11-04, 47-04

Keywords: Probabilistic number theory, Kubilius model, Turán–Kubilius inequality, friable integers, self-adjoint operator, power method, saddle-point method.

Conformément à l’usage, nous désignons par  $S(x, y)$  l’ensemble des entiers  $y$ -friables n’excédant pas  $x$  et par  $\Psi(x, y)$  son cardinal. Notons  $\alpha = \alpha(x, y)$  l’unique solution de l’équation transcendante

$$\sum_{p \leq y} \frac{\log p}{p^\alpha - 1} = \log x,$$

qui correspond au point-selle de l’intégrale de Peron inverse pour  $\Psi(x, y)$  — cf. [Hildebrand et Tenenbaum 86]. Dans [la Bretèche et Tenenbaum 05], les auteurs modélisent la répartition d’une fonction additive<sup>1</sup> restreinte à  $S(x, y)$  en introduisant la variable aléatoire  $Z_{f,x,y}$  abstraite

$$Z_{f,x,y} := \sum_{p \leq y} \xi_p,$$

où les  $\xi_p$  sont des variables aléatoires géométriques indépendantes de lois

$$\mathbb{P}(\xi_p = f(p^\nu)) = \frac{1}{p^{\nu\alpha}} \left(1 - \frac{1}{p^\alpha}\right) \quad (\nu \geq 0). \quad (1-1)$$

Nous convenons ici que, si plusieurs valeurs  $f(p^\nu)$  (en nombre éventuellement infini) sont égales, la probabilité correspondante est obtenue en sommant les probabilités apparaissant au second membre. De la démonstration du corollaire 5.1 de [la Bretèche et Tenenbaum 05], on peut facilement déduire que pour toute constante  $c > 0$ , la majoration

$$V_f(x, y) := \frac{1}{\Psi(x, y)} \sum_{n \in S(x, y)} |f(n) - \mathbb{E}(Z_{f,x,y})|^2 \ll \mathbb{V}(Z_{f,x,y})$$

est valable uniformément pour toute fonction additive complexe  $f$  lorsque  $c \log x \leq y \leq x$ . Pour  $x = y$ , on retrouve l’inégalité de Turán–Kubilius dans sa version classique.

Notons  $\mathbb{A}$  l’ensemble des fonctions additives à valeurs complexes. Le calcul de la constante optimale

$$C(x, y) = \sup_{f \in \mathbb{A}, f \neq 0} \frac{V_f(x, y)}{\mathbb{V}(Z_{f,x,y})}$$

et la détermination de son comportement asymptotique sont des questions naturelles issues de la modélisation décrite plus haut : on obtient ainsi une mesure quantitative de l’écart entre la théorie analytique des nombres et son paradigme probabiliste. Dans cette perspective, les

1. Rappelons qu’une fonction arithmétique  $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$  est dite additive si l’on a  $f(mn) = f(m) + f(n)$  pour tous entiers  $m$  et  $n$  premiers entre eux.

auteurs de [la Bretèche et Tenenbaum 05] obtiennent la relation

$$C(x, y) = 1 + o(1) \quad \left(\frac{\log x}{y} + \frac{\log y}{\log x} \rightarrow 0\right). \quad (1-2)$$

Par ailleurs, ils déduisent des résultats de [Hildebrand 83] que l’on a

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} C(x, x) = 2.$$

Le seuil supérieur de l’indépendance asymptotique exprimée par la relation (1-2) est en accord exact avec le modèle probabiliste de Kubilius — voir notamment [Kubilius 62, Kubilius 64, Elliott 79, Elliott 80, Tenenbaum 99].

Plus généralement, le comportement asymptotique de  $C(x, y)$ , lorsque le paramètre

$$u := (\log x)/\log y$$

est fixé, a été récemment élucidé par les deux derniers auteurs [Martin et Tenenbaum 08]. Nous restituons à présent succinctement les notations et le résultat principal de ce travail.

La fonction  $\varrho$  de Dickman, qui permet de fournir une approximation régulière de la fréquence  $\Psi(x, y)/x$  (voir par exemple [Hildebrand 86] pour une formule avec reste), est définie comme l’unique solution de l’équation différentielle aux différences

$$v\varrho'(v) + \varrho(v - 1) = 0 \quad (v > 1),$$

satisfaisant la condition initiale  $\varrho(v) = 1$  ( $0 \leq v \leq 1$ ). Conformément à l’usage, nous notons  $\xi = \xi(v)$  l’unique solution réelle non nulle de l’équation

$$1 + v\xi = e^\xi$$

lorsque  $v \neq 1$  et posons  $\xi(1) = 0$ . Considérant la mesure positive  $m_u$  définie sur  $[0; 1]$  par

$$dm_u(t) = e^{t\xi(u)} \frac{dt}{t},$$

nous introduisons l’espace  $H_u = L^2([0, 1], m_u)$  muni du produit scalaire et de la norme canoniques, notés respectivement  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et  $\|\cdot\|$  en omettant la dépendance en  $u$ , et l’opérateur auto-adjoint  $T_u$  défini sur  $H_u$  par

$$T_u\varphi(t) := h(u, t)\varphi(t) - \int_0^1 K_u(s, t)\varphi(s) dm_u(s) \quad (t \in [0; 1]),$$

avec

$$h(u, t) := \frac{\varrho(u-t)}{\varrho(u)} e^{-t\xi(u)} = \exp\left(\int_0^t \{r(u-v) - \xi(u)\} dv\right) \quad (t \geq 0)$$

et

$$K_u(s, t) := h(u, s) + h(u, t) - h(u, s+t) - 1 \quad (s, t \in [0; 1]^2).$$

Désignant par  $\lambda(u)$  la plus grande valeur spectrale de l'opérateur  $T_u$ , soit

$$\lambda(u) = \sup_{\|\varphi\|=1} \langle T_u \varphi, \varphi \rangle,$$

Dans [Martin et Tenenbaum 08], les auteurs établissent la formule

$$C(u) := \limsup_{x \rightarrow \infty} C(x, x^{1/u}) = \max\{2h(u, u), \lambda(u)\} \quad (u \geq 1).$$

Ainsi que mentionné au paragraphe 13.2 de [Martin et Tenenbaum 08], on a aussi

$$\lambda(u) = \limsup_{y \rightarrow \infty} \sup_{f \in \mathbb{A}_0, f \neq 0} \frac{V_f(y^u, y)}{\mathbb{V}(Z_{f, y^u, y})} \quad (u \geq 1),$$

où  $\mathbb{A}_0$  désigne la classe des fonctions arithmétiques fortement additives.

Nous nous proposons dans ce travail d'aborder l'étude numérique de  $C(u)$ , qui peut être considérée, au vu de (1–2), comme une mesure quantitative de la vitesse avec laquelle l'espace probabilisé  $S(x, y)$  muni de la mesure uniforme s'approche d'un modèle où la divisibilité par des nombres premiers distincts satisfait une condition d'indépendance.

La proposition 2.3 de [Martin et Tenenbaum 08] fournit un développement asymptotique de  $C(u)$ . Cependant, alors que l'étude de la quantité  $h(u, u)$  ne pose guère de difficulté tant d'un point de vue théorique que numérique, il en va tout autrement pour  $\lambda(u)$ . Le présent travail a pour objet essentiel de développer une méthode spécifique pour estimer numériquement  $\lambda(u)$ , et donc  $C(u)$ , en un point arbitraire  $u \geq 1$ . Ce problème d'apparence standard présente certaines difficultés :

- (i) la mesure  $m_u$  n'est pas finie sur  $[0; 1]$ ;
- (ii) dans l'état actuel de nos connaissances, rien n'indique que  $\lambda(u)$  est une valeur propre de l'opérateur  $T_u$ ;
- (iii) la fonction  $K_u$  est discontinue sur l'ensemble  $\{(s, t) \in [0; 1]^2, s + t = u\}$  — réduit à l'ensemble vide dès que  $u \geq 2$ .

Au paragraphe 3, nous mettons en œuvre une méthode classique qui consiste à construire un opérateur  $\theta_{u, N}$  approchant  $T_u$  avec contrôle effectif de la vitesse de convergence.

Le paragraphe 4 est dévolu à la déduction d'une approximation théorique de  $\lambda(u)$  par la plus grande valeur spectrale  $\lambda_N(u)$  de  $\theta_{u, N}$ , avec erreur  $\ll (\log N)/N$  lorsque  $u \geq 2$ .<sup>2</sup>

Au paragraphe 5, nous montrons que  $\lambda_N(u)$  peut être exprimée en fonction de la plus grande valeur propre d'un opérateur de dimension finie. Cette valeur propre est approchable numériquement par la méthode de la puissance, dont nous rappelons les fondements et certains aspects algorithmiques au paragraphe 7.

Deux desseins annexes ont motivé ce travail. Le premier consiste à tester la conjecture naturelle, énoncée dans [Martin et Tenenbaum 08], selon laquelle la fonction  $u \mapsto \lambda(u)$  est décroissante sur  $[1; +\infty[$ . Nos résultats expérimentaux semblent mettre en évidence au moins un point de croissance, mais la précision théorique de nos calculs reste encore insuffisante pour conclure formellement. Le second enjeu consiste à déterminer si  $u \mapsto \lambda(u)$  diffère ou non d'une fonction voisine  $u \mapsto \lambda^\#(u)$  introduite dans [Martin et Tenenbaum 08] et liée à une variante  $C^\#(u)$  de la fonction  $C(u)$ . Nous rappelons au paragraphe 6 les définitions précises de  $C^\#(u)$  et  $\lambda^\#(u)$  et décrivons les implications d'une telle comparaison. Nous fournissons au paragraphe 7 une valeur particulière de  $u$  assortie d'estimations numériques suggérant fortement que ces deux fonctions sont bien distinctes.

Nous donnons au paragraphe 7.6 des tables de valeurs et des courbes représentatives expérimentales des fonctions  $u \mapsto \lambda(u)$ ,  $u \mapsto \lambda^\#(u)$ ,  $u \mapsto C(u)$  et  $u \mapsto C^\#(u)$ .

## 2. ESTIMATIONS AUXILIAIRES

Ici et dans la suite, nous posons

$$r(v) := -\frac{\varrho'(v)}{\varrho(v)} \quad (v \geq 0, v \neq 1),$$

et nous prolongeons  $r$  et ses dérivées par continuité à droite sur  $\mathbb{R}$  en posant  $r(1) = 1$  et  $r(v) = 0$  ( $v \leq 0$ ). Hildebrand a établi dans [Hildebrand 86] que la fonction  $r$  est croissante. Nous rappelons également l'encadrement

$$r(u-1) \leq \xi(u) \leq r(u) \quad (u \geq 1) \quad (2-1)$$

établi au Lemme 2 de [Evertse et al. 03].

2. Le résultat est moins précis lorsque  $1 \leq u < 2$ , mais nous donnons un argument en faveur d'un terme d'erreur similaire.

Le lemme suivant regroupe quelques estimations effectives concernant les fonctions  $h(u, \cdot)$  et  $K_u$ . Les constantes sont exprimées en fonction des quantités

$$h_1(u) := \max_{t \in [0;1]} h(u, t)$$

et

$$\delta_j(u) := \max\{r(u) - \xi(u), \xi(u) - r(u - j)\} \\ (u \geq 1, j = 1, 2),$$

dont des estimations effectives sont données au Lemme 2.2 *infra*. De plus, nous posons

$$\mathcal{E}^-(u) := \{(s, t) \in [0; 1]^2, s + t \leq u\}, \\ \mathcal{E}^+(u) := \{(s, t) \in [0, 1]^2, s + t > u\},$$

de sorte que  $[0; 1]^2 = \mathcal{E}^-(u) \cup \mathcal{E}^+(u)$  pour tout  $u \geq 1$ .

**Lemme 2.1.** *Soit  $u \geq 1$ .*

(i) *Posant  $A_1(u) := h_1(u)\delta_1(u)$ , on a*

$$|h(u, t) - h(u, t')| \leq A_1(u)|t - t'| \quad (t, t' \in [0; 1]). \tag{2-2}$$

(ii) *Posant  $A_2(u) := h_1(u)\{\delta_1(u) + \max(1, \delta_2(u))\}$ , on a*

$$|K_u(s, t)| \leq A_2(u)\{\mathbb{1}_{]0, \infty[}(s + t - u) + \min(s, t)\} \\ (s, t \in [0; 1]). \tag{2-3}$$

(iii) *Posons  $A_3(u) := 2h_1(u)\{\delta_1(u) + \delta_2(u)\}$ . Si  $(s, t), (s', t') \in \mathcal{E}^+(u)$  ou  $(s, t), (s', t') \in \mathcal{E}^-(u)$ , on a*

$$|K_u(s, t) - K_u(s', t')| \leq A_3(u) \max(|s - s'|, |t - t'|). \tag{2-4}$$

(iv) *Pour  $u \geq 2$ , la fonction  $K_u$  est continue sur  $[0; 1]^2$ . De plus, on a*

$$|K_u(s, t)| \leq A_4(u)st \quad (s, t \in [0; 1]^2), \tag{2-5}$$

avec

$$A_4(u) := h_1(u) \max \left\{ \delta_2(u)^2, \max_{t \in [0; 2]} r'(u - t) \right\}.$$

*Preuve.* La fonction  $t \mapsto h(u, t)$  est dérivable sur  $[0; u]$ , sauf éventuellement en  $t = u - 1$  où elle admet une dérivée à gauche et à droite, et nous avons

$$\frac{\partial h(u, t)}{\partial t} = \{r(u - t) - \xi(u)\}h(u, t) \quad (0 \leq t \leq u, t \neq u - 1). \tag{2-6}$$

En vertu de la croissance de la fonction  $r$ , nous obtenons bien (i).

Pour établir (ii), nous observons que (2-2) implique

$$|K_u(s, t)| \leq |h(u, s + t) - h(u, s)| + |h(u, t) - 1| \\ \leq h_1(u)\{\delta_2(u) + \delta_1(u)\}t \quad (s + t \leq u),$$

d'où nous déduisons, grâce à la symétrie de  $K_u$ ,

$$|K_u(s, t)| \leq h_1(u)\{\delta_2(u) + \delta_1(u)\} \min(s, t) \quad (s + t \leq u). \tag{2-7}$$

Par ailleurs,

$$|K_u(s, t)| \leq h_1(u) + |h(u, t) - 1| \leq h_1(u)\{1 + \delta_1(u)\} \\ (s + t > u). \tag{2-8}$$

L'assertion (ii) découle bien de (2-7) et (2-8).

En tenant compte du fait  $h(u, s + t) = 0$  dès que  $s + t > u$ , nous déduisons immédiatement de (2-6) que  $2h_1(u)\delta_1(u)$  et  $2h_1(u)\{\delta_1(u) + \delta_2(u)\}$  sont des constantes de Lipschitz admissibles pour  $K_u$ , respectivement sur  $\mathcal{E}^+(u)$  et sur  $\mathcal{E}^-(u)$ . Cela fournit bien (iii).

Convenant que  $h''$  désigne la dérivée seconde de  $(u, t) \mapsto h(u, t)$  par rapport à  $t$ , nous avons

$$|h''(u, t)| = \left| \left( \{r(u - t) - \xi(u)\}^2 - r'(u - t) \right) h(u, t) \right| \\ \leq A_4(u) \quad (t \in [0; 2]).$$

En reportant cette estimation dans la formule

$$K_u(s, t) = - \int_0^s \int_0^t h''(u, v + w) dv dw,$$

nous obtenons bien (iv). □

L'énoncé suivant regroupe des majorations effectives, élémentaires et non optimales, des constantes  $A_j(u)$ .

**Lemme 2.2.** *On a*

$$A_1(u) \leq \xi(2)e^{\xi(2)} \leq \frac{9}{2}, \\ A_2(u) \leq \{\xi(2) + \xi(3)\}e^{\xi(2)} \leq \frac{56}{5}, \\ A_3(u) \leq 2\{\xi(2) + \xi(3)\}e^{\xi(2)} \leq \frac{223}{10}, \\ A_4(u) \leq \max \left\{ \xi(3)^2, \frac{8}{3} \log 5 \right\} e^{\xi(2)} \leq \frac{8}{3} e^{\xi(2)} \log 5 \leq \frac{151}{10}.$$

*Preuve.* La fonction  $\xi'(t) = 1/\int_0^1 se^{s\xi(t)} ds$  étant décroissante sur  $[1; \infty[$ , nous avons

$$\xi(t + 1) - \xi(t) \leq \xi(t_0 + 1) - \xi(t_0) \quad (t \geq t_0).$$

Compte tenu de l'encadrement (2-1), nous obtenons

$$r(t) - \xi(t) \leq \xi(t+1) - \xi(t) \leq \xi(2) - \xi(1) = \xi(2) \quad (t \geq 1).$$

De même, comme  $r(t) = 0$  ( $t < 1$ ) et  $\xi$  est croissante sur  $[1; \infty[$ , nous avons

$$\xi(t) - r(t-1) \leq \xi(2), \quad \xi(t) - r(t-2) \leq \xi(3) \quad (t \geq 1).$$

En particulier,

$$\delta_j(u) \leq \xi(j+1) \quad (u \geq 1, j = 1, 2), \quad (2-9)$$

$$h_1(u) \leq e^{\delta_1(u)} \leq e^{\xi(2)} \quad (u \geq 1). \quad (2-10)$$

Majorons à présent  $r'$ . L'inégalité

$$r(t) \leq 2 \log(t+2) \quad (t \geq 1) \quad (2-11)$$

a été établie dans [Fouvry et Tenenbaum 96]. Un calcul de routine permet d'établir que  $\xi(t) \geq 2 - 2/t$  ( $t \geq 1$ ). Il suit

$$\xi'(t) = \frac{1}{t} + \frac{1 - 1/t}{1 + t(\xi(t) - 1)} \leq \frac{2}{t} \quad (t \geq 1).$$

Par conséquent,

$$\xi(t+1) - \xi(t) \leq \frac{2}{t} \quad (t \geq 1). \quad (2-12)$$

En insérant les majorations (2-11) et (2-12) dans l'identité

$$r'(t) = r(t) \left\{ r(t) - r(t-1) - \frac{1}{t} \right\} \quad (t \geq 1),$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} r'(t) &\leq 2 \log(t+2) \left\{ \xi(t+1) - \xi(t) + \xi(t) - \xi(t-1) - \frac{1}{t} \right\} \\ &\leq 2 \log(t+2) \left\{ \frac{1}{t} + \frac{2}{t-1} \right\} \leq \frac{8}{3} \log 5 \quad (t \geq 3). \end{aligned}$$

Par ailleurs, des estimations numériques pour  $\xi(3)$  et  $r(3)$  fournissent

$$r'(t) \leq r(3) \left\{ \xi(3) - \frac{1}{3} \right\} < \frac{8}{3} \log 5 \quad (2 \leq t < 3).$$

Comme

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq t \leq 2} r'(t) &= \max_{1 \leq t \leq 2} \frac{1 - \varrho(t)}{t^2 \varrho(t)^2} = \max_{1 \leq t \leq 2} \frac{\log t}{t^2 (1 - \log t)^2} \\ &< \frac{8}{3} \log 5, \end{aligned}$$

nous obtenons finalement,

$$r'(t) \leq \frac{8}{3} \log 5 \quad (t \in \mathbb{R}). \quad (2-13)$$

En insérant les majorations (2-9), (2-10) et (2-13) dans les expressions des constantes  $A_j(u)$ , nous obtenons bien les inégalités annoncées.  $\square$

### 3. APPROXIMATION UNIVERSELLE DE $\lambda(u)$

Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ . Pour  $1 \leq j \leq N$ , nous posons  $I_j := [(j-1)/N; j/N]$  et notons

$$\mu_j := m_u(I_j) \quad (1 < j \leq N). \quad (3-1)$$

Notre méthode consiste à approcher l'opérateur  $T_u$  en approchant les fonctions  $t \mapsto h(u, t)$  et  $(s, t) \mapsto K_u(s, t)$  par des fonctions en escaliers. Considérant une suite  $\{t_j\}_{j=1}^N$  de nombre réels tels que  $t_j \in I_j$  ( $1 \leq j \leq N$ ), nous posons à cette fin

$$h_j = h_j(u) := h(u, t_j), \quad (3-2)$$

$$k_{ij} = k_{ij}(u) := K_u(t_i, t_j) \quad (1 \leq j \leq N).$$

Dans la suite, nous imposons  $t_1 = 0$ , de sorte que  $k_{1j} = k_{j1} = 0$ . Nous introduisons alors l'opérateur auto-adjoint  $\vartheta_N = \vartheta_{u,N}$  défini sur  $H_u$  par

$$\begin{aligned} \vartheta_N \varphi(t) &:= \sum_{1 \leq j \leq N} h_j \mathbb{1}_{I_j}(t) \varphi(t) \\ &\quad - \sum_{1 \leq i, j \leq N} k_{ij} \mathbb{1}_{I_j}(t) \int_{I_i} \varphi(s) dm_u(s) \\ &(\varphi \in H_u, t \in [0; 1]), \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \langle \vartheta_N \varphi, \psi \rangle &= \sum_{1 \leq j \leq N} h_j \int_{I_j} \varphi(t) \overline{\psi(t)} dm_u(t) \\ &\quad - \sum_{1 \leq i, j \leq N} k_{ij} \int \int_{I_i \times I_j} \varphi(s) \overline{\psi(t)} dm_u(s) dm_u(t). \end{aligned}$$

Soit  $\lambda_N(u)$  la plus grande valeur spectrale de  $\vartheta_N$ ; désignant par  $S_u$  la boule unité du sous-espace de  $H_u$  constitué des fonctions à valeurs réelles, on a donc

$$\lambda_N(u) := \sup_{\varphi \in S_u} \langle \vartheta_N \varphi, \varphi \rangle.$$

Nous introduisons également la forme bilinéaire  $B_{u,N}$  définie par

$$B_{u,N}(\varphi, \psi) := \langle T_u \varphi, \psi \rangle - \langle \vartheta_N \varphi, \psi \rangle \quad (\varphi, \psi \in H_u). \quad (3-3)$$

Nous obtenons le résultat d'approximation suivant.

**Proposition 3.1.** *Pour  $u \geq 1$ ,  $N \geq 1$ , nous avons*

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{\varphi, \psi \in H_u \\ \|\varphi\| = \|\psi\| = 1}} |B_{u,N}(\varphi, \psi)| & \quad (3-4) \\ & \leq \{2\sqrt{2}A_2(u) + o(1)\} e^{\xi(u)} \sqrt{\frac{\log N}{N}} \quad (N \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

où la quantité entre accolades peut être remplacée par 58 dès que  $N \geq 1000$ .

**Corollaire 3.2.** Soit  $u \geq 1$ . Pour  $N \geq 1$ , on a

$$|\lambda_N(u) - \lambda(u)| \leq 58e^{\xi(u)} \sqrt{\frac{\log N}{N}} \quad (N \geq 1000). \quad (3-5)$$

*Preuve de la Proposition 3.1.* Soient  $\varphi, \psi \in H_u$  tel que  $\|\varphi\| = \|\psi\| = 1$ . Notant  $D_u$  la droite d'équation  $s+t = u$ , nous introduisons  $\mathcal{F}_N := \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 : 1 \leq i, j \leq N\}$  et

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_N^{(1)} &:= \{(i, j) \in \mathcal{F}_N : i = 1 \text{ ou } j = 1\}, \\ \mathcal{F}_N^{(2)} &:= \{(i, j) \in \mathcal{F}_N : I_j \times I_j \cap D_u \neq \emptyset\} \setminus \mathcal{F}_N^{(1)}, \\ \mathcal{F}_N^{(3)} &:= \mathcal{F}_N \setminus (\mathcal{F}_N^{(1)} \cup \mathcal{F}_N^{(2)}), \end{aligned}$$

de sorte qu'en posant

$$\mathcal{P}_q := \bigcup_{(i,j) \in \mathcal{F}_N^{(q)}} I_i \times I_j \quad (q = 1, 2, 3),$$

la réunion  $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2 \cup \mathcal{P}_3$  constitue une partition du carré  $[0; 1]^2$ . Cela implique l'inégalité

$$|B_{u,N}(\varphi, \psi)| \leq R(N) + S_1(N) + S_2(N) + S_3(N) \quad (3-6)$$

avec

$$\begin{aligned} R(N) &:= \left| \int_0^1 h(u, t) \varphi(t) \psi(t) dm_u(t) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{0 \leq j \leq N} h_j \int_{I_j} \varphi(t) \psi(t) dm_u(t) \right|, \\ S_q(N) &:= \left| \sum_{(i,j) \in \mathcal{F}_N^{(q)}} \iint_{I_i \times I_j} \{K_u(s, t) - k_{ij}\} \right. \\ &\quad \left. \times \varphi(s) \psi(t) dm_u(s) dm_u(t) \right| \\ &\quad (q = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

D'après (2-2) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée successivement dans  $H_u$  puis  $\ell^2(\mathbb{C})$ , nous obtenons tout d'abord

$$R(N) \leq \sum_{1 \leq j \leq N} \int_{I_j} |h(u, t) - h_j| \varphi(t) \psi(t) dm_u(t)$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{A_1(u)}{N} \sum_{1 \leq j \leq N} \left( \int_{I_j} \varphi(t)^2 dm_u(t) \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left( \int_{I_j} \psi(s)^2 dm_u(s) \right)^{1/2} \quad (3-7) \\ &\leq \frac{A_1(u)}{N}. \end{aligned}$$

De même, nous déduisons de (2-3) et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \int_0^{1/N} |K_u(s, t) \varphi(s) \psi(t)| dm_u(s) dm_u(t) \\ &\leq A_2(u) \int_0^1 \int_0^1 |\varphi(s) \psi(t)| \{ \mathbb{1}_{s+t > 1}(s, t) + \min(s, t) \} \\ &\quad dm_u(s) dm_u(t) \\ &\leq A_2(u) e^{\xi(u)} \left\{ \left( \int_0^{1/N} |\log(1-s)| \frac{ds}{s} \right)^{1/2} \right. \\ &\quad \left. + \left( \int_0^{1/N} \left( \frac{1}{2} + |\log s| \right) s ds \right)^{1/2} \right\} \\ &\leq A_2(u) e^{\xi(u)} \left( \frac{1}{\sqrt{N-1}} + \frac{\sqrt{2+2 \log N}}{2N} \right). \end{aligned}$$

Grâce à la symétrie de  $K_u$ , il suit

$$\begin{aligned} S_1(N) &\leq \int_0^1 \int_0^{1/N} |K_u(s, t) \varphi(s) \psi(t)| dm_u(s) dm_u(t) \\ &\quad + \int_0^{1/N} \int_0^1 |K_u(s, t) \varphi(s) \psi(t)| dm_u(s) dm_u(t) \\ &\leq 2A_2(u) e^{\xi(u)} \left( \frac{1}{\sqrt{N-1}} + \frac{\sqrt{2+2 \log N}}{2N} \right). \quad (3-8) \end{aligned}$$

Estimons ensuite  $S_2(N)$ . L'inégalité de Cauchy-Schwarz fournit d'abord

$$\begin{aligned} S_2(N) &\leq 2A_2(u) \sum_{(i,j) \in \mathcal{F}_N^{(2)}} \int_{I_i \times I_j} |\varphi(s) \psi(t)| dm_u(s) dm_u(t) \\ &\leq 2A_2(u) \sum_{(i,j) \in \mathcal{F}_N^{(2)}} \left( \int_{I_i \times I_j} \varphi(s)^2 \psi(t)^2 dm_u(s) dm_u(t) \right. \\ &\quad \left. \times \int_{I_i \times I_j} dm_u(s) dm_u(t) \right)^{1/2} \\ &\leq 2A_2(u) e^{\xi(u)} \left( \sum_{(i,j) \in \mathcal{F}_N^{(2)}} \int_{I_i \times I_j} \frac{ds dt}{st} \right)^{1/2}. \quad (3-9) \end{aligned}$$

Or, désignant par  $[x]$  la partie entière d'un nombre réel  $x$ , nous avons

$$\begin{aligned} & \sum_{(i,j) \in \mathcal{F}_N^{(2)}} \iint_{I_i \times I_j} \frac{ds dt}{st} \\ & \leq \int_{1-1/N}^1 \int_{1/N}^{2/N} \frac{ds dt}{st} \\ & \quad + \sum_{2 \leq j \leq N-1} \int_{(j-1)/N}^{j/N} \int_{([Nu]-j)/N}^{([Nu]-j+2)/N} \frac{ds dt}{st} \\ & \leq \frac{1}{N} + \sum_{2 \leq i \leq N-1} \log \left( 1 + \frac{1}{j-1} \right) \log \left( 1 + \frac{2}{[Nu]-j} \right) \\ & \leq \frac{1}{N} + \sum_{2 \leq j \leq N-1} \log \left( 1 + \frac{1}{j-1} \right) \log \left( 1 + \frac{2}{N-j} \right) \\ & \leq \frac{1}{N} + 2 \sum_{2 \leq j \leq N-1} \frac{1}{(j-1)(N-j)} < \frac{1}{N} + \frac{2+2 \log N}{N-1}, \end{aligned} \tag{3-10}$$

et par suite,

$$S_2(N) \leq 2A_2(u)e^{\xi(u)} \sqrt{\frac{3+2 \log N}{N-1}}. \tag{3-11}$$

Enfin, pour chaque couple  $(i, j) \in \mathcal{F}_N^{(3)}$ , le pavé  $I_i \times I_j$  est inclus soit dans  $\mathcal{E}^-(u)$  soit dans  $\mathcal{E}^+(u)$ . Par conséquent, d'après (2-4),

$$\begin{aligned} S_3(N) & \leq \frac{A_3(u)}{N} \sum_{(i,j) \in \mathcal{F}_N^{(3)}} \iint_{I_i \times I_j} |\varphi(s)\psi(t)| dm_u(s) dm_u(t) \\ & \leq \frac{A_3(u)}{N} \int_{1/N}^1 \int_{1/N}^1 |\varphi(s)\psi(t)| dm_u(s) dm_u(t) \\ & \leq \frac{A_3(u)}{N} \int_{1/N}^1 dm_u(s) \leq \frac{A_3(u)e^{\xi(u)} \log N}{N}. \end{aligned} \tag{3-12}$$

Compte tenu de (3-6), (3-7), (3-8), (3-11), (3-12) et du Lemme 2.2, nous obtenons bien la conclusion requise.  $\square$

#### 4. AMÉLIORATION DU TERME D'ERREUR

Remarquons tout d'abord que la majoration (3-4) peut être significativement améliorée dès que  $u \geq 2$ . En effet, on a alors  $\mathcal{F}_N^{(2)} = \emptyset$ , et donc  $S_2(N) = 0$ . De plus, en invoquant (2-5) au lieu de (2-3) dans la preuve de (3-8), nous obtenons

$$S_1(N) \leq \frac{A_4(u)e^{\xi(u)}}{N} \quad (N \geq 1).$$

Ainsi, en tenant compte des estimations respectivement obtenues pour  $R(N)$  et  $S_3(N)$  en (3-7) et (3-12), et en

employant les majorations du Lemme 2.2, nous obtenons l'estimation uniforme

$$|\lambda_N(u) - \lambda(u)| \leq \{A_3(u) + o(1)\} e^{\xi(u)} \frac{\log N}{N} \quad (u \geq 2, N \rightarrow \infty), \tag{4-1}$$

ainsi que la borne effective

$$|\lambda_N(u) - \lambda(u)| \leq 26e^{\xi(u)} \frac{\log N}{N} \quad (u \geq 2, N \geq 1000).$$

La constante 26 est ici essentiellement indicative. En pratique, comme aux paragraphes 7.4 et 7.5, lors d'évaluations spécifiques de  $\lambda(u)$  pour des valeurs fixées de  $u$  et  $N$ , nous déterminons la constante plus soigneusement. En particulier, les supremums de fonctions comme  $t \mapsto h(u, t)$  et  $t \mapsto r'(u - t)$  sur les intervalles appropriés sont évalués explicitement.

Par ailleurs, bien que l'estimation (4-1) implique le facteur  $e^{\xi(u)} \asymp u$  — cf., e.g., [Tenenbaum 08] lemme 3.5.11 —, la constante ne tend pas vers l'infini avec  $u$ . En effet,  $A_3(u)$  est un multiple borné de

$$\delta_1(u) + \delta_2(u) \ll 1/u. \tag{4-2}$$

Cette dernière majoration peut être déduite de (2-12). Comme nos expérimentations numériques privilégient les petites valeurs de  $u$ , nous n'avons pas complété le Lemme 2.2 par une majoration du type (4-2), dont la constante implicite est de mauvaise qualité.

La convergence observée en pratique est également quasi-linéaire lorsque  $1 \leq u < 2$ . Le résultat suivant décrit un cas où nous sommes en mesure d'établir le résultat théorique correspondant.

**Proposition 4.1.** *Soit  $u \geq 1$ . Si  $\kappa(u) := \lambda(u) - h_1(u) > 0$ , il existe une constante absolue effective  $W$  et un entier  $N_0(u) = N_0$ , dépendant explicitement de  $u$ , tels que*

$$|\lambda(u) - \lambda_N(u)| \leq \frac{W e^{3\xi(u)} \log N}{\kappa(u)^2 N} \quad (N \geq N_0). \tag{4-3}$$

D'après le lemme 13.1 de [Martin et Tenenbaum 08], on a  $\kappa(u) \geq 0$  pour tout  $u \geq 1$ . Par ailleurs,  $\lambda(1) = \frac{3}{2}$  et  $h_1(1) = 1$ . En vertu de la continuité de  $\lambda$  et  $h_1$ , l'hypothèse de la Proposition 4.1 est donc satisfaite dans un voisinage de  $u = 1$ . Au-delà, nous ne disposons d'aucun argument théorique en faveur de l'inégalité stricte. Toutefois, pour  $u$  fixé, une estimation numérique préliminaire de  $\lambda(u)$  effectuée, selon le Corollaire 3.2, avec une erreur de l'ordre de  $\sqrt{\log N/N}$  peut permettre de valider cette

hypothèse. Il demeure que, lorsque  $1 \leq u < 2$ , l'exploitation pratique de la Proposition 4.1 est délicate lorsque le facteur  $1/\kappa(u)^2$  prend de grandes valeurs; l'estimation (4-3) n'améliore alors (3-5) que pour de grandes valeurs de  $N$ , de nature à mettre en péril l'effectivité algorithmique de notre méthode.

Notre preuve de la Proposition 4.1 repose sur l'estimation auxiliaire suivante, établie à la fin de ce paragraphe.

**Lemme 4.2.** *Il existe une constante absolue effective  $R$  telle que, pour tous  $u \geq 1$ ,  $\alpha, \beta \geq 0$ ,  $\varphi \in H_u$  satisfaisant à*

$$|\varphi(t)| \leq \alpha + \beta \sqrt{|\log(1-t)|} \text{ pour presque tout } t \in [0; 1],$$

on ait

$$|B_{u,N}(\varphi, \varphi)| \leq R(\alpha + \beta)^2 e^{2\xi(u)} \frac{\log N}{N} \quad (N \geq 4). \quad (4-4)$$

*Preuve de la Proposition 4.1.* Nous avons  $T_u = T_u^h + T_u^K$  où  $T_u^h$  et  $T_u^K$  sont les opérateurs auto-adjoints définis par

$$\begin{aligned} T_u^h \varphi(t) &:= h(u, t) \varphi(t) \\ T_u^K \varphi(t) &:= - \int_0^1 \varphi(s) K_u(s, t) dm_u(s) \end{aligned} \quad (4-5)$$

$(t \in [0; 1], \varphi \in H_u).$

Il est établi dans [Martin et Tenenbaum 08] que  $K_u \in L^2([0; 1]^2, m_u \otimes m_u)$ . Cela implique classiquement que l'opérateur  $T_u^K$  est un opérateur de Hilbert-Schmidt et donc, en particulier, compact. D'après un théorème de Weyl (cf. [Riesz et Sz.-Nagy 55] par exemple), l'addition d'un opérateur compact ne modifie pas le spectre essentiel<sup>3</sup> d'un opérateur borné. Les spectres essentiels de  $T_u^h$  et de  $T_u$  sont donc identiques. Or, d'après l'hypothèse faite sur  $T_u$ ,

$$\begin{aligned} \max \sigma(T_u^h) &= h_1(u) < \lambda(u) \\ &= \max \sigma(T_u). \end{aligned}$$

Par conséquent  $\lambda(u)$  n'appartient ni au spectre essentiel de  $T_u^h$ , ni au spectre essentiel de  $T_u$ . Ainsi,  $\lambda(u)$  est une valeur propre de multiplicité finie de  $T_u$ . Soit alors un vecteur propre normé  $\varphi_u$  de  $T_u$  associé à  $\lambda(u)$ . D'après la majoration (2-3) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous

3. Rappelons que le spectre essentiel d'un opérateur borné est constitué des valeurs spectrales qui ne sont pas des valeurs propres de multiplicité finie.

avons

$$\begin{aligned} |\varphi_u(t)| &= \left| \frac{1}{\lambda(u) - h(u, t)} \int_0^1 K_u(s, t) \varphi_u(s) dm_u(s) \right| \\ &\leq \frac{A_2(u)}{\kappa(u)} \left\{ \int_{1-t}^1 |\varphi_u(s)| dm_u(s) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 \min(s, t) |\varphi_u(s)| dm_u(s) \right\} \\ &\leq \frac{A_2(u)}{\kappa(u)} \left\{ \left( \int_{1-t}^1 dm_u(s) \right)^{1/2} \right. \\ &\quad \left. + \left( \int_0^1 \min(s, t)^2 dm_u(s) \right)^{1/2} \right\} \\ &\leq \frac{A_2(u) e^{\xi(u)/2}}{\kappa(u)} \left\{ \sqrt{|\log(1-t)|} + t \sqrt{|\log t| + \frac{1}{2}} \right\} \\ &\leq \frac{2A_2(u) e^{\xi(u)/2}}{\kappa(u)} \sqrt{|\log(1-t)|} \quad (t \in [0; 1]). \end{aligned} \quad (4-6)$$

Le Lemme 4.2 nous permet donc de conclure que l'on a, uniformément pour  $u \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} |\lambda(u) - \langle \vartheta_N \varphi_u, \varphi_u \rangle| &= |\langle T_u \varphi_u, \varphi_u \rangle - \langle \vartheta_N \varphi_u, \varphi_u \rangle| \\ &\ll \frac{e^{3\xi(u)} \log N}{\kappa(u)^2 N}. \end{aligned} \quad (4-7)$$

Par ailleurs, considérons un vecteur normé  $\psi_N \in H_u$  tel que

$$\vartheta_N \psi_N = \lambda_N(u) \psi_N,$$

dont l'existence peut être établie comme au début du paragraphe 5 *infra*. Désignant par  $\vartheta_N^K$  l'opérateur défini sur  $H_u$  par

$$\begin{aligned} \vartheta_N^K \varphi(s) &= \sum_{1 \leq i, j \leq N} k_{ij} \int_0^1 \mathbb{1}_{I_i \times I_j}(s, t) \varphi(t) dm_u(t) \\ &(\varphi \in H_u, s \in [0; 1]), \end{aligned}$$

nous avons

$$\psi_N(s) = \frac{T_N^K \psi_N(s)}{\lambda_N(u) - \sum_{1 \leq j \leq N} h_j \mathbb{1}_{I_j}(s)} \quad (s \in [0; 1]). \quad (4-8)$$

Le dénominateur s'écrit encore

$$\begin{aligned} \lambda_N(u) - \sum_{1 \leq j \leq N} h_j \mathbb{1}_{I_j}(s) &= \{\lambda_N(u) - \lambda(u)\} + \kappa(u) \\ &\quad + \left\{ h_1(u) - \sum_{1 \leq j \leq N} h_j \mathbb{1}_{I_j}(s) \right\}. \end{aligned}$$

D'après le Corollaire 3.2, il existe un entier  $N_0(u) = N_0$  explicitement calculable tel que l'on ait  $|\lambda_N(u) - \lambda(u)| \leq$



$\kappa(u)/2$  pour tout entier  $N \geq N_0$ . Comme, de plus,  $h_1(u) - \sum_{1 \leq j \leq N} h_j \mathbb{1}_{I_j}(s) \geq 0$  pour tout  $s \in [0; 1]$ , il vient

$$\lambda_N(u) - \sum_{1 \leq j \leq N} h_j \mathbb{1}_{I_j}(s) \geq \frac{1}{2} \kappa(u) \quad (4-9)$$

$$(u \geq 1, N \geq N_0(u), s \in [0; 1])$$

et donc

$$|\psi_N(s)| \leq \frac{2 \{ |(\vartheta_N^K - T^K)\psi_N(s)| + |T^K\psi_N(s)| \}}{\kappa(u)}$$

$$(N \geq N_0, s \in [0; 1]).$$

Le vecteur  $\psi_N$  étant normé, un calcul similaire à (4-6) fournit

$$|T^K\psi_N(s)| \leq 2A_2(u)e^{\xi(u)/2} \sqrt{|\log(1-s)|} \quad (s \in [0; 1]).$$

Par ailleurs,

$$(\vartheta_N^K - T^K)\psi_N(s)$$

$$= \sum_{1 \leq i \leq N} \mathbb{1}_{I_i}(s) \sum_{1 \leq j \leq N} \int_{I_j} (K_u(s, t) - k_{ij}) \psi_N(t) dm_u(t)$$

$$= \sum_{1 \leq i \leq N} \mathbb{1}_{I_i}(s) \{V_1(i, s) + V_2(i, s) + V_3(i, s)\}$$

$$(s \in [0; 1])$$

où l'on a posé

$$V_q(i, s) := \sum_{\substack{1 \leq j \leq N \\ (i, j) \in \mathcal{F}_N^{(q)}}} \int_{I_j} \{K_u(s, t) - k_{ij}\} \psi_N(t) dm_u(t)$$

$$(1 \leq i \leq N, s \in I_i, 1 \leq q \leq 3).$$

Nous avons d'abord

$$|V_1(i, s)| = \left| \int_0^{1/N} K_u(s, t) \psi_N(t) dm_u(t) \right|$$

$$\leq \int_0^1 |K_u(s, t) \psi_N(t)| dm_u(t)$$

$$\leq 2A_2(u)e^{\xi(u)/2} \sqrt{|\log(1-s)|}.$$

Ensuite, nous observons que, pour chaque indice  $i$  fixé, il existe au plus deux indices  $j$  tels que  $(i, j) \in \mathcal{F}_N^{(2)}$ . La majoration (2-3) et l'inégalité de Cauchy–Schwarz permettent donc d'écrire, pour  $i \in [1, N]$ ,  $s \in I_i$ ,

$$V_2(i, s) \leq 2A_2(u) \sum_{\substack{2 \leq j \leq N \\ (i, j) \in \mathcal{F}_N^{(2)}}} \sqrt{\mu_j} \leq 4A_2(u) \max_{2 \leq j \leq N} \sqrt{\mu_j}$$

$$\leq 4A_2(u)e^{\xi(u)/2} \sqrt{\log \frac{3}{2}}.$$

Finalement, nous avons dans les mêmes conditions

$$V_3(i, s) \leq \frac{A_1(u)}{N} \sum_{\substack{2 \leq j \leq N \\ (i, j) \in \mathcal{F}_N^{(3)}}} \sqrt{\mu_j}$$

$$\leq \frac{A_1(u)}{\sqrt{N}} \left( \int_{1/N}^1 dm_u(t) \right)^{1/2}$$

$$\leq A_1(u)e^{\xi(u)/2} \sqrt{\frac{\log N}{N}}.$$

Nous obtenons donc

$$|(\vartheta_N^K - T^K)\psi_N(s)| \ll e^{\xi(u)/2} \left( 1 + \sqrt{|\log(1-s)|} \right).$$

Par application du Lemme 4.2 compte tenu de (4-8) et (4-9), il s'ensuit que

$$|\langle T_u \psi_N, \psi_N \rangle - \langle \vartheta_N \psi_N, \psi_N \rangle| \ll \frac{e^{3\xi(u)} \log N}{\kappa(u)^2 N}$$

$$(u \geq 1, N \geq N_0).$$

Nous sommes à présent en mesure de conclure. En effet, pour  $N \geq N_0$ , nous avons

$$\lambda(u) = \langle T_u \varphi_u, \varphi_u \rangle$$

$$= \langle \vartheta_N \varphi_u, \varphi_u \rangle + \langle T_u \varphi_u, \varphi_u \rangle - \langle \vartheta_N \varphi_u, \varphi_u \rangle$$

$$\leq \lambda_N(u) + O\left(\frac{e^{3\xi(u)} \log N}{\kappa(u)^2 N}\right),$$

alors que

$$\lambda(u) \geq \langle T_u \psi_N, \psi_N \rangle$$

$$= \langle \vartheta_N \psi_N, \psi_N \rangle + \langle T_u \psi_N, \psi_N \rangle - \langle \vartheta_N \psi_N, \psi_N \rangle$$

$$= \lambda_N(u) + O\left(\frac{e^{3\xi(u)} \log N}{\kappa(u)^2 N}\right). \quad \square$$

*Preuve du Lemme 4.2.* Par bilinéarité, il suffit de montrer que, si  $\varphi_1$  désigne la fonction constante égale à 1, et  $\varphi_2$  la fonction définie presque partout sur  $[0; 1]$  par  $\varphi_2(t) = \sqrt{|\log(1-t)|}$ , alors nous avons uniformément pour  $u \geq 1$ ,  $N \geq 2$ ,  $(p, q) \in \{1, 2\}^2$ ,

$$|B_{u, N}(\varphi_p, \varphi_q)| \ll e^{2\xi(u)} \frac{\log N}{N}.$$

Pour établir cette inégalité, il suffit de préciser convenablement, pour  $\varphi := \psi_p$ ,  $\psi := \varphi_q$  les majorations  $S_1(N)$  et  $S_2(N)$  obtenues au cours de la preuve de la Proposition 3.1; celles de  $R(N)$  et  $S_3(N)$  sont en effet de l'ordre de grandeur requis puisque  $\max\{A_1(u), A_3(u)\} \ll 1$ .

Considérons d'abord le cas  $p = q = 1$ . Nous avons alors

$$\begin{aligned} S_1(N) &\leq 2 \int_0^{1/N} \int_0^1 |K_u(s, t)| dm_u(s) dm_u(t) \\ &\leq 2e^{2\xi(u)} A_2(u) \int_0^{1/N} \int_0^1 (\mathbb{1}_{s+t>1}(s, t) + \min(s, t)) \\ &\quad \frac{ds dt}{st} \\ &\leq 2e^{2\xi(u)} A_2(u) \int_0^{1/N} \left\{ \frac{|\log(1-t)|}{t} + 1 - \log t \right\} dt \\ &\leq 2e^{2\xi(u)} A_2(u) \left\{ \frac{1}{N-1} + \frac{2 + \log N}{N} \right\}, \end{aligned}$$

tandis que

$$\begin{aligned} S_2(N) &\leq 2e^{2\xi(u)} A_2(u) \sum_{i,j \in \mathcal{F}_N^{(2)}} \int_{I_i \times I_j} dm_u(s) dm_u(t) \\ &\leq 2A_2(u) e^{\xi(u)} \left\{ \frac{1}{N} + \frac{2 \log N + 2}{N-1} \right\}, \end{aligned}$$

où la dernière inégalité provient de (3-10).

Traisons ensuite le cas  $p = q = 2$ . Posant

$$I := \int_0^1 \sqrt{|\log(1-t)|} \frac{dt}{t} \in ]1, \infty[$$

nous avons, d'après la majoration (2-3) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} &\int_0^1 |K_u(s, t)| \sqrt{|\log(1-t)|} \frac{dt}{t} \\ &\leq A_2(u) \left\{ \int_{1-s}^1 \sqrt{|\log(1-t)|} \frac{dt}{t} + \int_0^s \sqrt{|\log(1-t)|} dt \right. \\ &\quad \left. + s \int_s^1 \sqrt{|\log(1-t)|} \frac{dt}{t} \right\} \\ &\leq A_2(u) \left\{ \sqrt{\frac{s}{1-s} \int_{1-s}^1 |\log(1-t)| dt} + s |\log(1-s)| \right. \\ &\quad \left. + Is \right\} \\ &\leq A_2(u) \left\{ s \sqrt{\frac{1 + |\log s|}{1-s}} + \frac{s^2}{1-s} + Is \right\} \quad (0 < s \leq \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

Il suit, pour  $N \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} S_1(N) &\leq 2A_2(u) e^{2\xi(u)} \int_0^{1/N} \sqrt{|\log(1-s)|} \\ &\quad \times \left\{ \sqrt{\frac{1 + |\log s|}{1-s}} + \frac{s}{1-s} + I \right\} ds \\ &\leq \frac{2A_2(u) e^{2\xi(u)}}{\sqrt{N-1}} \int_0^{1/N} \left\{ \sqrt{\frac{1 + |\log s|}{1-s}} + \frac{s}{1-s} + I \right\} ds \\ &\leq \frac{2A_2(u) e^{2\xi(u)}}{\sqrt{N-1}} \left\{ \sqrt{\frac{2 + \log N}{N(N-1)}} + \frac{1}{2N(N-1)} + \frac{I}{N} \right\} \\ &\leq \frac{2A_2(u) e^{2\xi(u)}}{N-1} \left\{ \sqrt{\frac{2 + \log N}{N}} + \frac{I}{\sqrt{N-1}} \right\}. \end{aligned}$$

Nous avons également

$$S_2(N) \leq 2e^{2\xi(u)} A_2(u) \{Q_1 + Q_2 + Q_3\}$$

avec

$$\begin{aligned} Q_1 &:= \int_{1-1/N}^1 \int_{1/N}^{2/N} \varphi_2(s) \varphi_2(t) \frac{ds dt}{st}, \\ Q_2 &:= \sum_{\substack{2 \leq i < (N+1)/2 \\ (i,j) \in \mathcal{F}_N^{(2)}}} \int_{I_i \times I_j} \varphi_2(s) \varphi_2(t) \frac{ds dt}{st}, \\ Q_3 &:= \sum_{\substack{(N+1)/2 \leq i \leq N-1 \\ (i,j) \in \mathcal{F}_N^{(2)}}} \int_{I_i \times I_j} \varphi_2(s) \varphi_2(t) \frac{ds dt}{st}. \end{aligned}$$

Nous observons d'abord que

$$\begin{aligned} Q_1 &\leq \sqrt{\log N |\log(1-2/N)|} \int_{1-1/N}^1 \int_{1/N}^{2/N} \frac{ds dt}{st} \\ &\leq \frac{\log 2 \sqrt{2 \log N}}{(N-1) \sqrt{N-2}}. \end{aligned}$$

En employant la croissance de  $\varphi_2$  sur  $[0; 1 - 1/N]$ , nous obtenons ensuite

$$\begin{aligned} Q_2 &\leq \sqrt{\log N} \sum_{2 \leq i < (N+1)/2} \\ &\quad \int_{(i-1)/N}^{i/N} \varphi_2(s) \frac{ds}{s} \int_{([Nu]-i+2)/N}^{([Nu]-i)/N} \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \frac{N\sqrt{\log N}}{N-3} \sum_{2 \leq i < (N+1)/2} \int_{(i-1)/N}^{i/N} \varphi_2(s) \frac{ds}{s} \int_{(\lfloor Nu \rfloor - i + 2)/N}^{(\lfloor Nu \rfloor - i)/N} dt \\
 &\leq \frac{2\sqrt{\log N}}{N-3} \sum_{2 \leq i < (N+1)/2} \int_{(i-1)/N}^{i/N} \varphi_2(s) \frac{ds}{s} \\
 &\leq \frac{2I\sqrt{\log N}}{N-3}.
 \end{aligned}$$

Un calcul similaire montre que

$$Q_3 \leq \frac{I\sqrt{\log N}}{N-3},$$

de sorte que

$$S_2(N) \leq 2e^{2\xi(u)} A_2(u) \left\{ \frac{\sqrt{\log N}}{(N-1)\sqrt{N-2}} + \frac{3I\sqrt{\log N}}{N-3} \right\}.$$

Comme  $A_2(u) \ll 1$ , nous obtenons bien la conclusion souhaitée.

La majoration  $|B_{u,N}(\varphi_1, \varphi_2)| \ll e^{2\xi(u)}(\log N)/N$  peut être établie par des calculs similaires dont nous omettons les détails.  $\square$

## 5. CALCUL NUMÉRIQUE DE $\lambda_N(u)$

Le calcul numérique de la quantité  $\lambda_N(u)$ , telle qu'elle est définie, n'est pas direct. Nous l'exprimons à l'aide de la plus grande valeur propre d'un opérateur de  $\mathbb{R}^N$  convenablement choisi.

Rappelons la définition des suites  $\{\mu_j\}_{2 \leq j \leq N}$  et  $\{h_j\}_{1 \leq j \leq N}$  en (3-1) et (3-2). Étant donnée une fonction  $\varphi \in S_u$ , nous posons

$$x_j^2 := \int_{I_j} \varphi(t)^2 dm_u(t) \quad (1 \leq j \leq N),$$

$$y_j := \int_{I_j} \varphi(t) dm_u(t) \quad (2 \leq j \leq N),$$

de sorte que, d'après l'inégalité de Cauchy–Schwarz,

$$y_j^2 \leq \mu_j x_j^2 \quad (2 \leq j \leq N).$$

Ainsi

$$\lambda_N(u) = \sup \left\{ \sum_{1 \leq j \leq N} h_j x_j^2 - \sum_{2 \leq i, j \leq N} k_{ij} y_i y_j \right\}$$

où le supremum est pris sous la contrainte

$$\sum_{1 \leq j \leq N} x_j^2 = 1, \quad y_j^2 \leq \mu_j x_j^2 \quad (2 \leq j \leq N). \quad (5-1)$$

Posant

$$H_N(u) := \max_{1 \leq j \leq N} |h_j|,$$

nous observons que

$$\lambda_N(u) \geq H_N(u). \quad (5-2)$$

En effet, si  $q$  est défini par  $h_q = H_N(u)$ , le choix  $x_j := \delta_{jq}$ ,  $y_j = 0$  ( $1 \leq j \leq N$ ) fournit bien l'inégalité (5-2).

**Lemme 5.1.** Soient  $u \geq 1$ ,  $N \geq 1$ , et  $\lambda_N^*(u)$  la plus grande valeur propre de l'opérateur  $L_{u,N}$  de  $\mathbb{R}^N$  associé à la forme quadratique  $Q_{u,N}$  définie par

$$Q_{u,N}(z_1, \dots, z_N) = \sum_{1 \leq j \leq N} h_j z_j^2 - \sum_{2 \leq i, j \leq N} k_{ij} \sqrt{\mu_i \mu_j} z_i z_j \quad (\{z_j\}_{j=1}^N \in \mathbb{R}^N).$$

Alors on a

$$\lambda_N(u) = \max(H_N(u), \lambda_N^*(u)). \quad (5-3)$$

*Preuve.* Soient  $\{x_j\}_{j=1}^N$  et  $\{y_j\}_{j=2}^N$  deux suites finies vérifiant les conditions (5-1). Nous avons

$$\begin{aligned}
 &\sum_{1 \leq j \leq N} h_j x_j^2 - \sum_{2 \leq i, j \leq N} k_{ij} y_i y_j \\
 &\leq H_N(u) \sum_{1 \leq j \leq N} x_j^2 + \sum_{1 \leq j \leq N} (h_j - H_N(u)) x_j^2 \\
 &\quad - \sum_{2 \leq i, j \leq N} k_{ij} y_i y_j \\
 &\leq H_N(u) + \sum_{1 \leq j \leq N} \{h_j - H_N(u)\} x_j^2 - \sum_{2 \leq i, j \leq N} k_{ij} y_i y_j \\
 &\leq H_N(u) + \sum_{1 \leq j \leq N} \{h_j - H_N(u)\} z_j^2 \\
 &\quad - \sum_{2 \leq i, j \leq N} k_{ij} \sqrt{\mu_i \mu_j} z_i z_j,
 \end{aligned}$$

où nous avons posé

$$z_1 := x_1, \quad z_j := y_j / \sqrt{\mu_j} \quad (2 \leq j \leq N),$$

de sorte que d'après (5-1),

$$\sum_{1 \leq j \leq N} z_j^2 \leq 1.$$

Désignons par  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne de  $\mathbb{R}^N$  et posons  $z := \{z_j\}_{j=1}^N$ . Il suit

$$\lambda_N(u) \leq H_N(u) + \max_{\|z\| \leq 1} \left\{ \sum_{1 \leq j \leq N} (h_j - H_N(u)) z_j^2 - \sum_{2 \leq i, j \leq N} k_{ij} \sqrt{\mu_i \mu_j} z_i z_j \right\}.$$

Le dernier maximum est positif ou nul d'après (5-2). S'il est nul, on a  $\lambda_N(u) \leq H_N(u)$  et donc  $\lambda_N(u) = H_N(u)$  en vertu de (5-2). S'il est strictement positif, il est nécessairement atteint sur la sphère unité  $\|z\| = 1$ . On a alors

$$\lambda_N(u) \leq H_N(u) + \max_{\|z\|=1} \left\{ \sum_{1 \leq j \leq N} (h_j - H_N(u)) z_j^2 - \sum_{2 \leq i, j \leq N} k_{ij} \sqrt{\mu_i \mu_j} z_i z_j \right\} = \lambda_N^*(u),$$

avec

$$\lambda_N^*(u) := \max_{\|z\|=1} \left\{ \sum_{1 \leq j \leq N} h_j z_j^2 - \sum_{2 \leq i, j \leq N} k_{ij} \sqrt{\mu_i \mu_j} z_i z_j \right\}. \tag{5-4}$$

Or, si  $z = \{z_j\}_{j=1}^N \in \mathbb{R}^N$  vérifie  $\|z\| = 1$  et réalise le maximum de (5-4), le choix

$$x_j^2 = z_j^2 \quad (1 \leq j \leq N), \quad y_j^2 = x_j^2 \mu_j \quad (2 \leq j \leq N),$$

fournit  $\lambda_N^*(u) \leq \lambda_N(u)$ , et finalement  $\lambda_N^*(u) = \lambda_N(u)$ .  $\square$

### 6. LA VARIANCE EMPIRIQUE

Dans [Martin et Tenenbaum 08], les deux derniers auteurs s'intéressent également à la quantité

$$V_f^\#(x, y) := \frac{1}{\Psi(x, y)} \sum_{n \in S(x, y)} \left| f(n) - \frac{1}{\Psi(x, y)} \sum_{n \in S(x, y)} f(n) \right|^2,$$

qui représente la variance de  $f$  en tant que variable aléatoire définie sur l'ensemble  $S(x, y)$  muni de la loi uniforme.

Alors que la quantité  $V_f(x, y)$ , qui compare, en moyenne quadratique,  $f$  à une quantité aisément calculable, est d'une utilité pratique évidente et conduit effectivement à de nombreuses applications (voir par exemple [la Bretèche et Tenenbaum 05]), la variance empirique  $V_f^\#(x, y)$  est d'intérêt essentiellement théorique.

Introduisant l'opérateur  $T_u^\#$  défini sur  $H_u$  par

$$T_u^\# \varphi(t) := h(u, t) \varphi(t) - \int_0^1 K_u^\#(s, t) \varphi(s) dm_u(s) \quad (t \in [0; 1]),$$

avec

$$K_u^\#(s, t) := h(u, s)h(u, t) - h(u, s + t) = K_u(s, t) - (h(u, s) - 1)(h(u, t) - 1) \quad (s, t \in [0; 1]^2),$$

Martin et Tenenbaum obtiennent

$$C^\#(u) := \limsup_{x \rightarrow \infty} \sup_{f \in \mathbb{A}} \frac{V_f^\#(x, y)}{\mathbb{V}(Z_{f, x, y})} = \max \{ 2h(u, u), \lambda^\#(u) \},$$

où  $\lambda^\#(u)$  désigne la plus grande valeur spectrale de  $T_u^\#$ .

De l'identité,

$$\langle T_u \varphi, \varphi \rangle = \langle T_u^\# \varphi, \varphi \rangle + \left| \int_0^1 \{h(u, t) - 1\} \varphi(s) dm(s) \right|^2 \quad (u \geq 1, \varphi \in H_u),$$

on déduit l'inégalité  $\lambda^\#(u) \leq \lambda(u)$  de sorte que

$$C^\#(u) \leq C(u) \quad (u \geq 1).$$

Notons par ailleurs que, comme  $K_1 = K_1^\#$ , nous avons

$$\lambda^\#(1) = \lambda(1), \quad C^\#(1) = C(1).$$

La quantité  $V_f(x, y)$  s'obtient en remplaçant dans la définition de  $V_f^\#(x, y)$  l'espérance empirique de  $f$  par l'espérance de son modèle  $Z_{f, x, y}$ . C'est l'origine de la dénomination « variance semi-empirique » utilisée dans [la Bretèche et Tenenbaum 05] pour désigner  $V_f(x, y)$ . On a

$$V_f(x, y) - V_f^\#(x, y) = |E_f(x, y) - \mathbb{E}(Z_{f, x, y})|^2.$$

L'égalité

$$C(u) = C^\#(u) \tag{6-1}$$

lorsqu'elle a lieu, signifie donc que, pour les fonctions maximisant la variance empirique, l'espérance du modèle est une bonne approximation de l'espérance empirique. Ainsi qu'il est remarqué dans [Martin et Tenenbaum 08], on a effectivement (6-1) dans un voisinage de  $u = 1$ , pour lequel  $C(u) = C^\#(u) = 2h(u, u)$ . Hors ce voisinage, la question, qui a motivé en partie ce travail, est posée<sup>4</sup> de l'égalité des quantités  $\lambda^\#(u)$  et  $\lambda(u)$  : pour l'heure, nous ne disposons en effet d'aucun argument théorique permettant d'affirmer que  $\lambda(u) \neq \lambda^\#(u)$  pour au moins une valeur de  $u > 1$ .

Il est aisé de constater que le noyau  $K_u^\#$  satisfait aux majorations (2-3), (2-4) et (2-5) avec des constantes  $A_j$  légèrement différentes. Notre méthode reste donc valable pour approcher numériquement  $\lambda^\#(u)$ .

4. Voir le paragraphe 2.3 de [Martin et Tenenbaum 08] pour une discussion plus détaillée.

## 7. RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

### 7.1 La Méthode de la Puissance

Les paragraphes 3 et 5 réduisent le calcul d'une valeur approchée de  $\lambda(u)$  à la détermination de la plus grande valeur propre de l'opérateur  $L_{u,N}$  de  $\mathbb{R}^N$  introduit au Lemme 5.1, que nous notons simplement  $L_N$  dans la suite. Classiquement, ce calcul s'effectue au moyen de la méthode de la puissance, que nous rappelons brièvement.

On choisit un vecteur  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$  aléatoire dans  $\mathbb{R}^{N+1}$ , et on forme la suite de vecteurs définie par

$$\mathbf{v}_{k+1} = \frac{L_N \mathbf{v}_k}{\|L_N \mathbf{v}_k\|} \quad (k \geq 0),$$

pour une norme vectorielle fixée. Cette suite n'est bien définie que si  $\mathbf{v} \notin \cup_{k \geq 0} \text{Ker } L_N^k$ ; dans le cas contraire, on réitère le processus en partant d'un nouveau vecteur aléatoire  $\mathbf{v}$ .

S'il existe une seule valeur propre  $\lambda$  de plus grand module pour  $L_N$ , la suite  $\{\mathbf{v}_k\}_{k=0}^\infty$  converge presque sûrement vers un vecteur propre de  $L_N$  associé à  $\lambda$ ; en particulier,  $\|L_N \mathbf{v}_k\|/\|\mathbf{v}_k\|$  tend presque sûrement vers  $\lambda$ . La convergence est linéaire, et l'on a

$$\log \left| \frac{\|L_N \mathbf{v}_k\|}{\|\mathbf{v}_k\|} - |\lambda| \right| \sim k \log |\mu/\lambda|,$$

où  $\mu$  est une valeur propre de deuxième plus grand module. En pratique, le calcul est arrêté dès que la différence

$$\left| \frac{\|L_N \mathbf{v}_{k+1}\|}{\|\mathbf{v}_{k+1}\|} - \frac{\|L_N \mathbf{v}_k\|}{\|\mathbf{v}_k\|} \right|$$

atteint une certaine limite  $\varepsilon$  fixée par avance. Le signe de  $\lambda$  peut être déterminé en comparant  $L_N \mathbf{v}_k$  et  $|\lambda| \mathbf{v}_k$ .

### 7.2 Considérations Numériques

Du calcul numérique décrit plus haut, découle en toute rigueur une borne inférieure sur le module de la plus grande valeur propre, à savoir  $\|L_N \mathbf{v}_k\|_2/\|\mathbf{v}_k\|_2$ . Cette borne peut être rendue numériquement rigoureuse en utilisant un calcul en arithmétique d'intervalles, qui maintient à toutes les étapes élémentaires du calcul numérique un encadrement du résultat exact. Cet encadrement est aussi précis que le permettent le calcul en double précision et la propagation des erreurs.

Si la méthode ne fournit a priori pas de borne supérieure pour la plus grande valeur propre, il est extrêmement peu probable que celle-ci diffère significativement de la valeur obtenue. Une telle éventualité ne peut se produire que si le vecteur  $\mathbf{v}$  initial est très proche

d'un vecteur de l'orthogonal  $E_\lambda^\perp$  du sous-espace  $E_\lambda$  associé à la plus grande valeur propre. Cela suppose de surcroît que les erreurs numériques commises lors du calcul de  $\mathbf{v}_k = L_N^k \mathbf{v}$  n'éloignent pas  $\mathbf{v}_k$  de  $E_\lambda^\perp$ . Cette situation est évidemment possible, mais porte en germe une forte instabilité numérique. Sans disposer d'une preuve rigoureuse que les valeurs approchées que nous avons calculées pour  $\lambda_N(u)$  et  $\lambda_N^\#(u)$  correspondent bien aux plus grandes valeurs propres des opérateurs  $\vartheta_N$  et  $\vartheta_N^\#$ , nous pouvons donc considérer que les calculs effectués fournissent une solide évidence numérique.

### 7.3 Considérations Algorithmiques

La méthode de la puissance requiert un grand nombre d'évaluations de l'opérateur  $L_N$ ; il est donc crucial de savoir optimiser ces opérations. Dans le cas présent, la structure de la matrice associée à l'opérateur  $L_N$  peut être mise à profit pour effectuer ces évaluations de façon particulièrement efficace; quand bien même il s'agit d'un résultat classique d'algèbre linéaire algorithmique, nous rappelons le procédé à fins de complétude.

**Proposition 7.1.** *Soit  $u \geq 1$ . Si  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$ , l'évaluation de  $L_N \mathbf{v}$  peut s'effectuer en temps  $O(N \log N)$  et en espace  $O(N)$ .*

*Preuve.* Soit  $M_N$  la matrice associée à l'opérateur  $L_N$ . Posons

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &:= (h(u, t_1), \dots, h(u, t_N)), \\ \mathbf{m} &:= (0, \sqrt{\mu_2}, \dots, \sqrt{\mu_N}), \\ \mathbf{1} &:= (1, \dots, 1), \end{aligned}$$

et notons  $H$  la matrice  $(h(u, t_i + t_j))_{1 \leq i, j \leq N}$ . De la formule

$$k_{ij} = h(u, t_i) + h(u, t_j) - h(u, t_i + t_j) - 1 \quad (1 \leq i, j \leq N),$$

découle la décomposition

$$\begin{aligned} M_N &= \text{diag}(\mathbf{h}) \\ &+ \text{diag}(\mathbf{m}) ((\mathbf{h} - \mathbf{1}) \cdot {}^t \mathbf{1} + \mathbf{1} \cdot {}^t \mathbf{h} - H) \text{diag}(\mathbf{m}). \end{aligned}$$

En utilisant cette écriture, l'évaluation du produit de  $M_N$  par un vecteur  $\mathbf{v}$  donné se réduit donc à celle du produit  $H\mathbf{v}$  et à des opérations de complexité linéaire : produit scalaire de deux vecteurs, produit d'une matrice diagonale par un vecteur, multiplication d'un vecteur par une constante.

Façons-nous dorénavant dans le cas  $t_i = (i - 1)/N$  ( $1 \leq i \leq N$ ). La matrice  $H$  est alors de Hankel : son

terme d'indices  $i, j$  ne dépend que de  $i + j$ . Classiquement, le produit d'une telle matrice par un vecteur se calcule avec complexité  $O(N \log N)$  en utilisant la transformée de Fourier rapide. Nous rappelons succinctement la méthode.

Notons  $\widehat{h}$  la transformée de Fourier discrète du vecteur

$$\left( h(0), h\left(\frac{1}{N}\right), \dots, h\left(\frac{2N-1}{N}\right) \right)$$

et  $\widehat{v}$  celle du vecteur  $(v_1, 0, \dots, 0, v_N, v_{N-1}, \dots, v_2) \in \mathbb{R}^{2N}$  — dont les coordonnées d'indices  $j \in [2, N + 1]$  sont donc choisies nulles. Dans la suite, nous posons

$$v_i = 0 \quad (N < i \leq 2N),$$

et étendons la suite  $\{v_i\}_{i=1}^{2N}$  en une suite définie sur  $\mathbb{N}$  par périodicité modulo  $2N$ .

Avec la notation  $e_q(x) := e^{2\pi i x/q}$  ( $q \in \mathbb{N}^*$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ), nous avons

$$\begin{aligned} \widehat{h}_k &= \sum_{0 \leq \ell < 2N} h\left(\frac{\ell}{N}\right) e_{2N}(k\ell), \\ \widehat{v}_k &= \sum_{0 \leq \ell < 2N} v_{2N+1-\ell} e_{2N}(k\ell) \\ &\quad (0 \leq k < 2N), \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \widehat{h}_k \widehat{v}_k &= \sum_{0 \leq \ell < 2N} \sum_{\substack{0 \leq i, j < 2N \\ i+j \equiv k \pmod{2N}}} v_{2N+1-i} h\left(\frac{j}{N}\right) e_{2N}(k\ell) \\ &= \sum_{0 \leq \ell < 2N} \sum_{1 \leq i \leq 2N} v_i h\left(2 \left\langle \frac{k+i-1}{2N} \right\rangle\right) e_{2N}(k\ell) \\ &\quad (0 \leq k < 2N), \end{aligned}$$

où  $\langle x \rangle$  désigne la partie fractionnaire du nombre réel  $x$ .

La transformée de Fourier inverse du vecteur  $(\widehat{h}_k \widehat{v}_k)_{0 \leq k < 2N}$  produit donc le vecteur

$$\left( \sum_{1 \leq i \leq N} v_i h\left(2 \left\langle \frac{k+i-1}{2N} \right\rangle\right) \right)_{0 \leq k < 2N},$$

dont les  $N$  premières coordonnées fournissent alors le produit  $Hv$ .

L'algorithme de transformée de Fourier rapide (FFT) permettant le calcul des transformées de Fourier discrètes d'ordre  $2N$  en complexité  $O(N \log N)$ , on constate que le coût global du produit matrice-vecteur est  $O(N \log N)$ , comme annoncé.

En ce qui concerne la complexité en espace, il suffit de noter que la matrice  $H$ , du fait de sa structure, peut

être stockée dans un espace  $O(N)$ , et que l'algorithme de transformée de Fourier rapide a une complexité en espace linéaire.  $\square$

### 7.4 Étude de la Différence $\lambda - \lambda^\#$

Nous avons programmé deux versions de la méthode de la puissance :

- La première est utilisée pour calculer une valeur approchée  $\ell_N(u)$  (resp.  $\ell_N^\#(u)$ ) de  $\lambda_N(u)$  (resp.  $\lambda^\#(u)$ ), ainsi qu'un vecteur propre approché  $v_N(u)$  (resp.  $v_N^\#(u)$ ) associé;
- La seconde est utilisée pour calculer un encadrement rigoureux de  $\|L_N v_N(u)\| / \|v_N(u)\|$  (resp.  $\|L_N^\# v_N^\#(u)\| / \|v_N^\#(u)\|$ ).

La première version repose sur la bibliothèque FFTW qui installe la transformée de Fourier rapide, et permet d'utiliser des valeurs de  $N$  jusqu'à  $2^{26}$ . Dans l'application de la méthode de la puissance, le calcul est interrompu quand deux valeurs consécutives de l'itéré  $\|L_N v_k\|_2 / \|v_k\|_2$  diffèrent d'au plus  $10^{-11}$ . La seconde repose sur la bibliothèque d'arithmétique d'intervalles Boost [Brönnimann et al. 06], ainsi que sur les deux bibliothèques CRlibm<sup>5</sup> et MPFR [Fousse et al. 07]. Elle effectue une seule itération de la méthode de la puissance, avec comme vecteur initial le résultat de l'exécution de la première version.

Sous l'hypothèse que les deux quantités calculées approchent effectivement la plus grande valeur propre des opérateurs  $\vartheta_N$  et  $\vartheta_N^\#$  avec une erreur n'excédant pas  $10^{-11}$ , nous obtenons, pour  $u = 2,03$ ,  $N = 131072$ , les encadrements

$$\begin{aligned} 1,1054506340898075933 &\leq \lambda_N(2,03) \\ &\leq 1,1054506409667739231, \\ 1,1018794563076095283 &\leq \lambda_N^\#(2,03) \\ &\leq 1,1018794630729715767. \end{aligned}$$

Une forme effective de l'estimation (4-1) fournit de plus l'inégalité

$$\begin{aligned} \max \left( |\lambda_N(2,03) - \lambda(2,03)|, |\lambda_N^\#(2,03) - \lambda^\#(2,03)| \right) \\ \leq 1,2 \cdot 10^{-3}. \end{aligned}$$

En combinant ces différents encadrements, nous pouvons conjecturer que

$$|\lambda(2,03) - \lambda^\#(2,03)| \geq 1,1 \cdot 10^{-3}.$$

5. <http://lipforge.ens-lyon.fr/projects/crlibm>

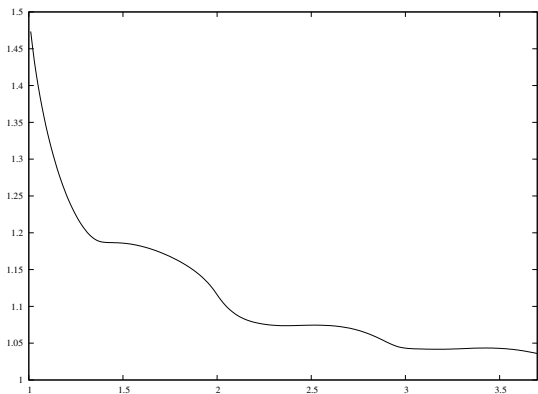


FIGURE 1. Courbe approchée de  $u \mapsto \lambda(u)$  sur  $[1; 3,7]$ .

Cette conjecture est vraie si, sur cet exemple, la méthode de la puissance a fourni une approximation de la plus grande valeur propre des deux opérateurs  $\vartheta_N$  et  $\vartheta_N^\#$ . Il ne s’agit donc pas là d’un résultat rigoureux, mais d’une *évidence numérique* qui nous semble suffisante pour étayer l’hypothèse que l’on a bien  $\lambda \neq \lambda^\#$ .

### 7.5 Étude de la Décroissance de $\lambda$

Les courbes représentatives présentées aux figures 1, 2 et 3 font apparaître un phénomène surprenant : contrairement à la conjecture naturelle en ce type de circonstance, la fonction  $u \mapsto \lambda(u)$  semble ne pas être décroissante. Nous avons appliqué la méthode du paragraphe précédent pour tester l’hypothèse d’un artefact. En supposant toujours que la méthode de la puissance a bien produit une approximation de la plus grande valeur propre des opérateurs concernés à  $10^{-11}$  près, nous

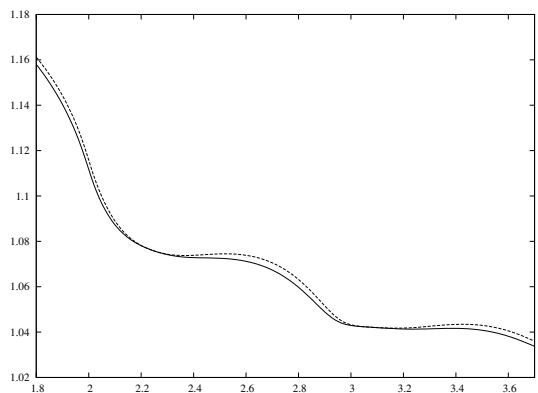


FIGURE 2. Courbes approchées de  $u \mapsto \lambda(u)$  et  $u \mapsto \lambda^\#(u)$  sur  $[2; 3]$ .

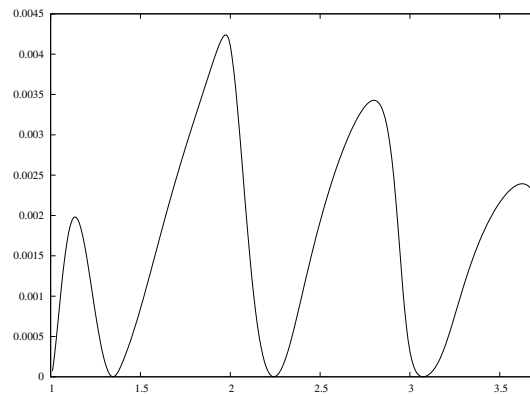


FIGURE 3. Courbe approchée de  $u \mapsto \lambda_N(u) - \lambda_N^\#(u)$  sur  $[1; 3,7]$ .

obtenons les encadrements

$$\begin{aligned} 1,04173002504414502491 &\leq \lambda_{2^{19}}(3,18) \\ &\leq 1,0417300308529369168 \\ 1,0434394767269152826 &\leq \lambda_{2^{19}}(3,43) \\ &\leq 1,0434394852511428287. \end{aligned}$$

Une forme effective de l’estimation (4-1) fournit l’inégalité

$$\begin{aligned} \max(|\lambda(3,18) - \lambda_{2^{19}}(3,18)|, |\lambda(3,43) - \lambda_{2^{19}}(3,43)|) \\ \leq 6,1 \cdot 10^{-4}, \end{aligned}$$

d’où, toujours sous notre hypothèse de bon comportement de la méthode de la puissance,  $\lambda(3,18) \leq 1,0423 < 1,0428 \leq \lambda(3,43)$ . Nous avons donc bien obtenu une évidence numérique remettant en cause la décroissance de  $\lambda$ .

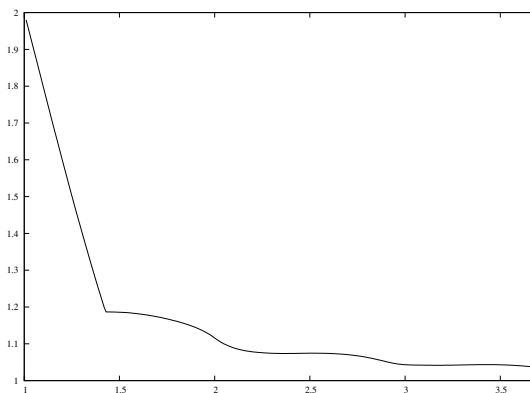


FIGURE 4. Courbe approchée de  $u \mapsto C(u)$  ou de  $u \mapsto C^\#(u)$  sur  $[1; 3,7]$ .

$u$	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	
$\lambda(u)$	3/2	1,3350	1,2514	1,2038	1,1871	1,1859	1,1816	1,1733	1,1613	1,1443	
$u$	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	
$\lambda(u)$	1,1159	1,0891	1,0783	1,0744	1,0739	1,0745	1,0739	1,0706	1,0632	1,0516	
$u$	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4
$\lambda(u)$	1,0433	1,0420	1,0418	1,0426	1,0434	1,0430	1,0406	1,0360	1,0308	1,0302	1,0298

TABLE 1. Valeurs approchées pour  $\lambda(u)$  ( $1 \leq u \leq 4$ ).

$u$	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	
$C(u)$	2	1,7983	1,5990	1,4088	1,2321	1,1859	1,1816	1,1733	1,1613	1,1443	
$u$	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	
$C(u)$	1,1159	1,0891	1,0783	1,0744	1,0739	1,0745	1,0739	1,0706	1,0632	1,0516	
$u$	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4
$C(u)$	1,0433	1,0420	1,0418	1,0426	1,0434	1,0430	1,0406	1,0360	1,0308	1,0302	1,0298

TABLE 2. Valeurs approchées pour  $C(u)$  ( $1 \leq u \leq 4$ ).

$u$	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	
$C^\#(u)$	2	1,7983	1,5990	1,4088	1,2321	1,1850	1,1799	1,1707	1,1580	1,1403	
$u$	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	
$C^\#(u)$	1,1117	1,0873	1,0781	1,0742	1,0728	1,0725	1,0712	1,0673	1,0597	1,0489	
$u$	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9	4
$C^\#(u)$	1,0429	1,0420	1,0414	1,0414	1,0416	1,0408	1,0382	1,0337	1,0302	1,0302	1,0296

TABLE 3. Valeurs approchées pour  $C^\#(u)$  ( $1 \leq u \leq 4$ ).

### 7.6 Tables et Représentations Graphiques

Nous concluons ce travail avec quelques éléments graphiques et numériques.

D’une part, nous reproduisons les courbes représentatives, calculées par la première version de notre programme, des fonctions

- $u \mapsto \lambda(u)$  sur  $[1; 3,7]$ ;
- $u \mapsto \lambda(u)$  et  $u \mapsto \lambda^\#(u)$  sur  $[2; 3]$ ;
- $u \mapsto \lambda(u) - \lambda^\#(u)$  sur  $[1; 3,7]$ .
- $u \mapsto C(u)$  sur  $[1; 3,7]$ .

Les courbes représentatives de  $C$  et  $C^\#$  sur l’intervalle  $[1; 3,7]$  étant indiscernables à l’œil nu, nous les rassemblons sur un même graphique. D’autre part, nous donnons des tables de valeurs approchées, avec quatre chiffres significatifs et arrondies supérieurement, pour  $\lambda(u)$ ,  $C(u)$  et  $C^\#(u)$  lorsque  $u$  parcourt l’intervalle  $[1; 4]$  (les tables 1, 2, 3).

Ces résultats numériques nous portent à conjecturer l’existence d’un seuil  $v_0$  tel que<sup>6</sup> :

$$C(u) = \begin{cases} 2h(u, u) & \text{si } 1 \leq u \leq v_0, \\ \lambda(u) & \text{si } u \geq v_0. \end{cases}$$

Nos calculs suggèrent que

$$1,4272285 < v_0 < 1,427229.$$

Conformément aux conclusions de la discussion développée au paragraphe 13.2 de [Martin et Tenenbaum 08], le seuil  $v_0$  correspondrait à l’unique valeur de  $u$  pour laquelle le rapport  $V_f(x, y)/\mathbb{V}(Z_{f,x,y})$  atteindrait son supremum asymptotique ( $x \rightarrow \infty, y = x^{1/u}$ ) simultanément sur l’ensemble des fonctions fortement additives et sur l’ensemble des fonctions additives  $f$  telles que  $f(p) = 0$ .

### REMERCIEMENTS

Bruno Martin is supported by the Austrian Science Foundation FWF, project S9605, part of the Austrian National

6. Une conjecture similaire peut être formulée pour  $C^\#(u)$ .



Research Network “Analytic Combinatorics and Probabilistic Number Theory.”

## REFERENCES

- [Alladi 82] K. Alladi. “The Turán–Kubilius Inequality for Integers without Large Prime Factors.” *J. Reine Angew. Math.* 335 (1982), 180–196.
- [la Bretèche et Tenenbaum 05] R. de la Bretèche et G. Tenenbaum. “Entiers friables: inégalité de Turán–Kubilius et applications.” *Invent. Math.* 159 (2005), 531–588.
- [Brönnimann et al. 06] H. Brönnimann, G. Melquiond, et S. Pion. “The Design of the Boost Interval Arithmetic Library.” *Theoret. Comput. Sci.* 351 (2006), 111–118.
- [Elliott 79] P. D. T. A. Elliott. *Probabilistic Number Theory: Mean Value Theorems*, Grundlehren der Math. Wiss. 239. New York: Springer, 1979.
- [Elliott 80] P. D. T. A. Elliott. *Probabilistic Number Theory: Central Limit Theorems*, Grundlehren der Math. Wiss. 240. New York: Springer, 1980.
- [Evertse et al. 03] J.-H. Evertse, P. Moree, C. L. Stewart, et R. Tijdeman. “Multivariate Diophantine Equations with Many Solutions.” *Acta Arith.* 107:2 (2003), 103–125.
- [Fousse et al. 07] L. Fousse, G. Hanrot, V. Lefèvre, P. Pélicier, et P. Zimmermann. “MPFR: A Multiple-Precision Binary Floating-Point Library with Correct Rounding.” *ACM Trans. Math. Soft.* 33:2 (2007), art. 13 (15pp.).
- [Fouvry et Tenenbaum 96] É. Fouvry et G. Tenenbaum. “Répartition statistique des entiers sans grand facteur premier dans les progressions arithmétiques.” *Proc. London Math. Soc.* (3) 73 (1996), 481–514.
- [Frigo et Johnson 05] M. Frigo et S. G. Johnson. “Design and Implementation of FFTW.” *Proc. IEEE* 93:2 (2005), 216–231.
- [Hildebrand 83] A. Hildebrand. “An Asymptotic Formula for the Variance of an Additive Function.” *Math. Z.* 183 (1983), 145–170.
- [Hildebrand 86] A. Hildebrand. “On the Numbers of Positive Integers  $\leq x$  and Free of Prime Factors  $> y$ .” *J. Number Theory* 22 (1986), 289–307.
- [Hildebrand et Tenenbaum 86] A. Hildebrand et G. Tenenbaum. “On Integers Free of Large Prime Factors.” *Trans. Am. Math. Soc.* 296 (1986), 265–290.
- [Kubilius 62] J. Kubilius. “Probabilistic Methods in the Theory of Numbers” (en russe). *Uspehi Mat. Nauk* 11:2 (1956), 31–66, *Amer. Math. Soc. Transl.* (2) 19 (1962), 47–85.
- [Kubilius 64] J. Kubilius. *Probabilistic Methods in the Theory of Numbers*, Translations of Mathematical Monographs 11. Providence: American Mathematical Society, 1964.
- [Martin et Tenenbaum 08] B. Martin et G. Tenenbaum. “Sur l’inégalité de Turán–Kubilius friable.” *J. Reine Angew. Math.* À paraître, 2008.
- [Tenenbaum 99] G. Tenenbaum. “Crible d’Ératosthène et modèle de Kubilius.” Dans *Number Theory in Progress, Proceedings of the Conference in Honor of Andrzej Schinzel, Zakopane, Poland 1997*, édité par K. Györy, H. Iwaniec, et J. Urbanowicz, pp. 1099–1129. Berlin: Walter de Gruyter, 1999.
- [Tenenbaum 08] G. Tenenbaum. *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, troisième édition, Collection Échelles. Paris: Éditions Belin, 2008.
- [Riesz et Sz.-Nagy 55] F. Riesz et B. Sz.-Nagy. *Leçons d’analyse fonctionnelle*. Paris / Budapest: Gauthier-Villars / Akadémiai Kiadó, 1955.
- [Xuan 93a] T. Z. Xuan. “The Turán–Kubilius Inequality for Integers Free of Large Prime Factors.” *J. Number Theory* 43 (1993), 82–87.
- [Xuan 93b] T. Z. Xuan. “The Turán–Kubilius Inequality for Integers Free of Large Prime Factors (II).” *Acta Arith.* 65 (1993), 329–352.

Guillaume Hanrot, INRIA Lorraine, Technopôle de Nancy-Brabois, 615, rue du Jardin Botanique, 54602 Villers-lès-Nancy Cedex, France (guillaume.hanrot@loria.fr)

Bruno Martin, Institut für Mathematik A, Technische Universität, Steyrergasse 30, 8010 Graz, Autriche (martin@finanz.math.tugraz.at)

Gérald Tenenbaum, Institut Élie Cartan, Université de Nancy 1, BP 239, 54506 Vandœuvre Cedex, France (gerald.tenenbaum@iecn.u-nancy.fr)

Received June 4, 2009; accepted August 3, 2009.