Université du Littoral Côte d'Opale

Habilitation à Diriger des Recherches

Spécialité : Mathématiques

Bruno MARTIN

Entiers friables, chiffres des nombres premiers, équations fonctionnelles liées à la transformation de Gauss

---

Date de soutenance : 11 décembre 2017

Après avis des rapporteurs :

M. Régis de la BRETÈCHE	Professeur à l'Université Paris Diderot
M. Tanguy RIVOAL	Directeur de recherches au CNRS
M. Thomas STOLL	Professeur à l'Université de Lorraine

Devant le jury composé de :

M. Michel BALAZARD	Chargé de recherches au CNRS
M. Régis de la BRETÈCHE	Professeur à l'Université Paris Diderot
M. Shalom ELIAHOU	Professeur à l'Université du Littoral Côte d'Opale
M. Christian MAUDUIT	Professeur à l'Université d'Aix-Marseille
M. Tanguy RIVOAL	Directeur de recherches au CNRS
M. Thomas STOLL	Professeur à l'Université de Lorraine
M. Gérald TENENBAUM	Professeur à l'Université de Lorraine

Remerciements

Je suis très honoré que Régis de la Bretèche, Tanguy Rivoal et Thomas Stoll aient accepté d'être les rapporteurs de cette habilitation. Tous trois ont toujours montré de l'intérêt pour mes travaux et m'ont régulièrement invité à les exposer lors de séminaires ou conférences, je les en remercie chaleureusement.

Dans mon cheminement parfois erratique de chercheur, Gérald Tenenbaum, Michel Balazard, Christian Mauduit et Shalom Eliahou ont été des soutiens constants et m'ont toujours prodigué conseils et encouragements. C'est un plaisir pour moi de leur témoigner ma gratitude et je les remercie pour leur participation à ce jury.

Les travaux relatés dans ce texte sont tous le fruit de collaborations scientifiques. Toutes se sont avérées très enrichissantes et m'ont souvent amené à explorer de nouveaux paysages mathématiques, ce que j'affectionne particulièrement. Je remercie donc sincèrement mes co-auteurs : Gérald Tenenbaum, Guillaume Hanrot, Michel Balazard, Christian Mauduit, Joël Rivat, Stéphane Jaffard, Sandro Bettin et Youness Lamzouri.

Depuis sept années, j'ai la chance de travailler au laboratoire de mathématiques Joseph Liouville à Calais. J'y bénéficie d'excellentes conditions de travail et pour cela je remercie les deux directeurs successifs Hassane Sadok et Shalom Eliahou. Je remercie également Isabelle Buchard pour son aide dans la préparation de la soutenance de cette habilitation, et plus généralement pour son travail de grande qualité au sein du laboratoire.

Je tiens également à remercier Peter Grabner pour son accueil à Graz lors de mes deux années de post-doctorat, période qui a joué un rôle important dans mon apprentissage du métier de chercheur.

J'ai commencé la rédaction de ce texte lors de mon séjour en délégation CNRS à l'Unité Mixte Internationale de Montréal. Dans ce cadre propice à la réflexion, j'ai profité de la direction bienveillante d'Emmanuel Giroux que je salue amicalement.

Les journées au laboratoire n'auraient guère de saveur sans la présence et la bonne humeur de mes collègues : Christophe, Christian, Jean, Thierry, Isar, Loïc, Nicolas, Cécile, Romuald, Philippe, Antoine, bref toute l'équipe qui met de la vie au moment des pauses. Merci à eux pour tous ces moments sympathiques !

Enfin je remercie ma famille, mes amis. D'être là, tout simplement.

Liste des travaux présentés

1. *Sur l'inégalité de Turán-Kubilius friable*, avec G. Tenenbaum, J. Reine Angew. Math. 647 (2010), p. 175–234.
2. *Constantes de Turán-Kubilius friables : une étude numérique*, avec G. Hanrot et G. Tenenbaum, Experiment. Math. 19 (2010), no. 3, p. 345–361.
3. *Comportement local moyen de la fonction de Brjuno*, avec M. Balazard, Fund. Math. 218 (2012), p. 193–224.
4. *Sur l'autocorrélation multiplicative de la fonction « partie fractionnaire » et une fonction définie par J. R. Wilton*, avec M. Balazard, arXiv :1305.4395v1, 2013.
5. *Théorème des nombres premiers pour les fonctions digitales*, avec C. Mauduit et J. Rivat, Acta Arith. 165 (2014), no. 1, p. 11–45.
6. *Fonctions digitales le long des nombres premiers*, avec C. Mauduit et J. Rivat, Acta. Arith. 170 (2015), no. 2, p. 175–197.
7. *Sur une équation fonctionnelle approchée due à J. R. Wilton*, avec M. Balazard, Mosc. Math. J. 15 (2015), no. 4, p. 629–652.
8. *On the non-vanishing of certain Dirichlet series*, avec S. Bettin, J. Number Theory 180 (2017), p. 423-442.
9. *Propriétés locales des chiffres des nombres premiers*, avec C. Mauduit et J. Rivat, J. Instit. Math. Jussieu (à paraître).
10. *Multifractal analysis of the Brjuno function*, avec S. Jaffard, Invent. Math. (à paraître).
11. *Nombres premiers avec contraintes digitales multiples*, avec C. Mauduit et J. Rivat, soumis.

Table des matières

Introduction

Ce mémoire d'habilitation consiste en une présentation des travaux que j'ai menés entre les années 2007 et 2017, ce qui correspond aux articles cités page 5. Il est divisé en trois parties, largement indépendantes, qui correspondent aux trois différentes thématiques que j'ai abordées ces dix dernières années.

La première partie de ce texte concerne une extension de l'inégalité de Turán-Kubilius aux nombres entiers friables. En 1934, Turán établit l'existence d'une constante $C > 0$ telle que pour tout $x \geqslant 2$,

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}(\omega(n) - \log\log x)^2 \leqslant C \log\log x, \tag{1}$$

où $\omega(n)$ désigne le nombre de facteurs premiers de n comptés sans leur multiplicité. Il en déduit une nouvelle démonstration du résultat de Hardy et Ramanujan qui stipule informellement que pour presque tout nombre entier n, $\omega(n)$ est équivalent à $\log\log n$ lorsque $n \to +\infty$. Les travaux de Turán puis Kubilius aboutirent à une généralisation de l'inégalité (1) à la classe des fonctions arithmétiques additives, c'est-à-dire les fonctions $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ satisfaisant à $f(mn) = f(m)+f(n)$ pour tous nombres entiers m et n premiers entre eux. Cette inégalité connue maintenant sous le nom d'inégalité de Turán-Kubilius s'avère être un outil particulièrement efficace en théorie analytique et probabiliste des nombres.

Étant donné $y \geqslant 2$, on dit qu'un nombre entier $n \geqslant 2$ est y-friable si son plus grand facteur premier n'excède pas y. Les entiers friables jouent un rôle important dans la théorie analytique des nombres moderne, aussi l'obtention d'une inégalité de Turán-Kubilius adaptée aux entiers friables constitue-t-elle un enjeu important. En 2005, La Bretèche et Tenenbaum obtiennent un résultat pleinement satisfaisant de cet ordre. Se pose alors la question du comportement asymptotique de ce que l'on appelle la meilleure constante dans cette nouvelle inégalité de Turán-Kubilius. La deuxième partie de ma thèse de doctorat en 2005 concernait l'étude de cette meilleure constante dans le domaine $y = x^{1/u}$ avec $u \geqslant 1$ fixé lorsque x tend vers l'infini. J'obtenais des résultats avancés mais la méthode développée se heurtait à une difficulté structurelle que nous n'avons clairement identifiée – et finalement surmontée – qu'en 2010 avec G. Tenenbaum. Nos résultats nous ont ensuite conduits à développer une méthode de calcul numérique pour obtenir une valeur approchée de cette meilleure constante suivant les valeurs de u, ce qui a donné lieu à une publication avec G. Hanrot.

Dans le chapitre 1, je présente l'inégalité de Turán-Kubilius friable et le calcul de la meilleure constante dans un cadre spécifique, celui des fonctions fortement additives. Cela permet de simplifier la discussion et de se concentrer sur l'aspect le plus intéressant et innovant du travail que nous avons mené avec G. Tenenbaum, dont la clef de voûte est l'emploi d'un résultat difficile d'analyse fonctionnelle, le théorème de Weyl-von Neumann.

La deuxième partie est consacrée à mes travaux sur les chiffres des nombres premiers réalisés dans le cadre d'une collaboration avec C. Mauduit et J. Rivat entamée en 2008. Quelques années plus tôt, Mauduit et Rivat avaient résolu un problème posé par Gelfond en 1968 concernant la répartition dans les progressions arithmétiques de la fonction s_q, la somme des chiffres en base $q \geqslant 2$, le long des nombres premiers : ils montrent que pour tout nombre entier $m \geqslant 2$ tel que $(m, q-1) = 1$ et tout $a \in \mathbb{Z}$, on a

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{card}\{p \leqslant N \,:\, s_q(p) \equiv a \bmod m\} \sim \frac{1}{m} \operatorname{card}\{p \leqslant N\} \quad (N \to +\infty),$$

où la lettre p désigne un nombre premier. Ce résultat a suscité beaucoup d'engouement et d'activité autour des chiffres des nombres premiers sur lesquels peu de choses étaient connues jusqu'alors, et plusieurs résultats spectaculaires ont été obtenus depuis.

Dans ce paysage qui évolue rapidement, C. Mauduit, J. Rivat et moi-même avons travaillé à obtenir une première généralisation de (2) à d'autres fonctions que s_q et également à étudier quelques propriétés de l'ensemble $\mathscr{P}_{q,a,m}$ des nombres premiers p tels que $s_q(p) \equiv a \bmod m$. Par exemple, nous obtenons un raffinement du théorème de Vinogradov pour le problème de Goldbach : tout nombre premier impair suffisamment grand est somme de trois nombres premiers appartenant à $\mathscr{P}_{q,a,m}$.

Nous nous sommes également intéressés à l'ensemble $\mathscr{M}$ des nombres entiers n tels que $s_q(n)$ est égal à la partie entière de $\frac{q-1}{2}\frac{\log n}{\log q}$ qui correspond à l'ordre moyen de s_q. Fouvry et Mauduit ont montré en 2005 que pour tout nombre irrationnel β, la suite $(\beta n)_{n\in\mathscr{M}}$ est équirépartie modulo 1. En améliorant des méthodes développées par Bassily-Kátai et Drmota-Mauduit-Rivat, nous obtenons que ce résultat reste valable le long de la suite des nombres premiers appartenant à $\mathscr{M}$. Tous les résultats évoqués s'obtiennent en évaluant des sommes d'exponentielles indexées par des nombres premiers, tâche ardue en général. Pour ce qui nous concerne, nous employons des résultats et méthodes maintenant classiques dûs à Vinogradov, de l'analyse de Fourier discrète ainsi que plusieurs ingrédients issus de la théorie des probabilités.

De manière générale, la troisième partie traite de l'étude de certaines fonctions satisfaisant à des équations fonctionnelles impliquant la transformation de Gauss

$$\begin{array}{rcccl} \alpha & : &]0,1[& \to & [0,1[\\ & & t & \mapsto & \{1/t\} \end{array}$$

où $\{\cdot\}$ est la fonction partie fractionnaire. Notre motivation initiale est l'étude de la fonction d'autocorrélation multiplicative de la fonction partie fractionnaire définie pour tout $x \geqslant 0$ par

$$A(x) = \int_0^\infty \{xt\}\{t\}\frac{dt}{t^2},$$

introduite en 2005 par Báez-Duarte, Balazard, Landreau et Saias et qui intervient dans le critère de Nyman pour l'hypothèse de Riemann. Báez-Duarte *et al.* obtiennent notamment qu'en chaque nombre rationnel positif, la fonction A n'est pas dérivable et admet un maximum local. La question de déterminer les points irrationnels de dérivabilité de A est à l'origine de la première partie de nos travaux avec M. Balazard. Elle nous a conduits à étudier le comportement local moyen de plusieurs séries de fonctions, en particulier celui de la fonction Φ de Brjuno, solution de l'équation fonctionnelle $\Phi(x) - x\Phi(\alpha(x)) = \log(1/x)$, et qui joue un rôle fondamental dans l'étude du système dynamique engendré par les itérations d'une fonction holomorphe au voisinage d'un point fixe. Depuis les résultats obtenus par Yoccoz dans ce cadre, plusieurs travaux ont porté sur l'étude de la régularité de la fonction de Brjuno. Les techniques développées avec M. Balazard ont permis dans un travail avec S. Jaffard de réaliser l'analyse multifractale de Φ. Par ailleurs, nos recherches avec M. Balazard en vue de déterminer les points de dérivabilité de A nous ont amenés à étudier des équations fonctionnelles dites approchées, liées à la transformation α. En particulier nous avons développé une méthode d'analyse complexe pour retrouver et préciser un résultat dû à Wilton en 1933 sur l'équation fonctionnelle approchée vérifiée par les sommes partielles de la série

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{d(n)}{n}\exp(2i\pi nx),$$

où $d(n)$ est le nombre de diviseurs de n. Nous avons également obtenu une nouvelle démonstration d'un joli théorème de La Bretèche et Tenenbaum en lien avec un problème posé par Davenport en 1937.

Enfin une réflexion avec S. Bettin sur la détermination des extrema de la fonction A nous a conduits à étudier la classe des fonctions arithmétiques $f : \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{Q}}$,

p-périodiques avec p premier, impaires, telles que

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{d_k(n)f(n)}{n} = 0$$

où $d_k(n) = \sum_{n_1\ldots n_k=n} 1$. Nous généralisons ainsi un résultat obtenu par Siegel et Chowla pour $k=1$ dans les années soixante. Notre méthode, directement inspirée de celle de Chowla, est de nature purement algébrique. Elle permet dans certains cas de montrer l'indépendance linéaire sur $\mathbb{Q}$ des nombres $\{L(1,\chi)^k\}$ où χ parcourt l'ensemble des caractères impairs de Dirichlet modulo p.

Chapitre 1

Inégalité de Turán-Kubilius friable

Dans ce chapitre, les lettres p et q désignent systématiquement des nombres premiers.

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ est additive si pour tous nombres entiers m et n premiers entre eux, on a

$$f(mn) = f(n) + f(n).$$

En particulier on a pour tout $n \geqslant 1$,

$$f(n) = \sum_{p^\nu \| n} f(p^\nu).$$

Si de plus $f(p^\nu) = f(p)$ pour tout nombre premier p, on dit que f est fortement additive et on a dans ce cas $f(n) = \sum_{p|n} f(p)$. Un exemple important de fonction fortement additive est donné par ω, la fonction qui compte le nombre de facteurs premiers sans multiplicité.

Les articles [64] et [42] abordent certaines questions relatives à l'inégalité de Turán-Kubilius friable établie par La Bretèche et Tenenbaum [15], résultat qui concerne les fonctions additives en général. Mais dans le but de mettre l'accent sur la difficulté principale rencontrée lors de l'élaboration de [64], j'ai choisi de centrer exclusivement mon propos sur les fonctions fortement additives. Le passage aux fonctions additives relève pour l'essentiel d'estimations qui étaient déjà présentes dans ma thèse d'université et qui n'ont donc pas tout à fait leur place ici. En outre, ce choix permet de limiter la discussion, intéressante mais pouvant prêter à confusion, sur les différentes variantes de l'inégalité de Turán-Kubilius. Pour des résultats complets sur les fonctions additives en général, je renvoie à [64] mais également aux récents articles [19] et [14].

Pour commencer, je présente sommairement l'inégalité de Turán-Kubilius au sens classique afin de mettre en évidence les idées probabilistes sous-jacentes. J'expose ensuite l'inégalité de Turán-Kubilius adaptée aux entiers friables établie par La Bretèche et Tenenbaum avant d'exposer les résultats établis et les méthodes utilisées dans [64] puis [42].

1.1 Inégalité de Turán-Kubilius classique

Dans ce qui suit, on désigne par $\mathbb{A}_0$ l'ensemble des fonctions fortement additives à valeurs complexes.

Soit $f \in \mathbb{A}_0$. On a pour tout $x \geqslant 2$, $1 \leqslant n \leqslant x$,

$$f(n) = \sum_{p \mid n} f(p) = \sum_{p \leqslant x} f(p)\zeta_p(n) \tag{1.1}$$

où l'on a posé

$$\zeta_p(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } p \mid n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les fonctions f et ζ_p peuvent être considérées comme des variables aléatoires sur l'espace $\Omega_x = \{n \in \mathbb{N}^* \,:\, n \leqslant x\}$ muni de la mesure de probabilité uniforme notée ν_x. La loi des variables ζ_p est déterminée par

$$\nu_x(\zeta_p = 1) = \frac{\operatorname{card}\{n \leqslant x \,:\, p \mid n\}}{\lfloor x \rfloor} = \frac{1}{\lfloor x \rfloor} \left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor = \frac{1}{p} + O\Big(\frac{1}{x}\Big).$$

De plus, des calculs similaires montrent que pour tout $(\varepsilon, \varepsilon') \in \{0,1\}^2$, $p < q \leqslant x$,

$$\nu_x(\zeta_p = \varepsilon, \zeta_q = \varepsilon') = \nu_x(\zeta_p = \varepsilon)\nu_x(\zeta_q = \varepsilon) + O\Big(\frac{1}{x}\Big). \tag{1.2}$$

En somme, lorsque $x \to +\infty$, les variables ζ_p tendent à se comporter comme des variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de paramètre $1/p$. Cela incite à modéliser f par la variable aléatoire

$$Z_{f,x} = \sum_{p \leqslant x} f(p)\xi_p$$

où (ξ_p) est une suite de variables aléatoires définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes, et telles que pour tout p, ξ_p suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/p$:

$$\mathbb{P}(\xi_p = 1) = 1 - \mathbb{P}(\xi_p = 0) = \frac{1}{p}.$$

L'espérance de $Z_{f,x}$ est donnée par

$$\mathbb{E}(Z_{f,x}) = \sum_{p \leqslant x} \frac{f(p)}{p},$$

et comme les variables ξ_p sont indépendantes, le calcul de la variance de $Z_{f,x}$ est aisé et fournit

$$\mathbb{V}(Z_{f,x}) = B_f(x)^2 - R_f(x)^2$$

avec

$$B_f(x)^2 = \sum_{p \leqslant x} \frac{|f(p)|^2}{p} \quad \text{et } R_f(x)^2 = \sum_{p \leqslant x} \frac{|f(p)|^2}{p^2}.$$

Dans bien des problèmes, tels que la détermination d'un ordre normal pour f, il est utile de pouvoir évaluer la dispersion quadratique des valeurs de f autour de l'espérance de son modèle $Z_{f,x}$. Autrement dit on souhaite disposer d'une majoration pour

$$V_f(x) := \frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} |f(n) - \mathbb{E}(Z_{f,x})|^2.$$

L'inégalité de Turán-Kubilius pour les fonctions fortement additives stipule l'existence d'une constante $C > 0$ telle que pour tout $f \in \mathbb{A}_0$, $x \geqslant 1$, on a

$$V_f(x) \leqslant C\, B_f(x)^2. \tag{1.3}$$

Remarque. *Un autre énoncé similaire, et en fait plus fort, est le suivant : il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $f \in \mathbb{A}_0$, $x \geqslant 1$, on a*

$$\mathbb{V}_x(f) := \frac{1}{\lfloor x \rfloor} \sum_{n \leqslant x} \Big| f(n) - \frac{1}{\lfloor x \rfloor} \sum_{n \leqslant x} f(n) \Big|^2 \leqslant C \mathbb{V}(Z_{f,x}).$$

Cet énoncé semble plus fondamental en ce sens qu'il énonce que le rapport entre la variance de f sur l'espace (Ω_x, ν_x) et la variance de son modèle $Z_{f,x}$ est uniformément borné. Néanmoins nous focalisons dans la suite notre attention sur l'énoncé (1.3)*, systématiquement privilégié dans les applications.*

Posons

$$C_0(x) = \sup_f \frac{V_f(x)}{B_f(x)^2}$$

où le supremum est pris sur toutes les fonctions $f \in \mathbb{A}_0$ non identiquement nulles sur Ω_x. La quantité $C_0(x)$ peut être vue comme une jauge de la pertinence de la modélisation d'une fonction fortement additive f sur Ω_x par son modèle probabiliste $Z_{f,x}$. En 1983, Kubilius [58, 57] (voir également l'article de Stein [84]) obtient l'estimation

$$C_0(x) = \frac{3}{2} + O\Big(\frac{1}{\log x}\Big).$$

Hildebrand [48] obtient par une méthode différente – et davantage susceptible de généralisation, nous y reviendrons – le résultat $C_0(x) = \frac{3}{2} + o(1)$, légèrement plus faible. Le fait que $C_0(x) \not\to 1$ lorsque $x \to +\infty$ montre d'une certaine manière que l'indépendance asymptotique des relations de divisibilité par des nombres premiers distincts illustrée par (1.2) reste relative.

1.2 Inégalité de Turán-Kubilius friable

Étant donné un nombre réel $y \geqslant 2$, on dit que $n \geqslant 2$ est y-friable si ses facteurs premiers n'excèdent pas y. On convient que 1 est y-friable. Traditionnellement on note $S(x, y)$ l'ensemble des entiers y-friables n'excédant pas x et on pose

$$\psi(x, y) = \operatorname{card} S(x, y).$$

Les entiers friables jouent depuis maintenant une quarantaine d'années un rôle important en théorie des nombres. Ils interviennent en cryptographie et ont permis des avancées importantes dans plusieurs problèmes difficiles *a priori* sans lien avec la notion de friabilité (cf. par exemple [15, 93]). De plus, l'étude de leur répartition, de la structure de leurs diviseurs, du comportement des fonctions additives et multiplicatives le long de $S(x, y)$, etc..., constituent des problèmes intéressants et délicats qui nécessitent le développement de nouvelles techniques qui enrichissent la palette d'outils disponibles en théorie analytique et probabiliste des nombres (cf. [50, 40] pour des articles de survol). Les résultats présentés ici en sont une nouvelle illustration.

Avant de poursuivre, donnons pour fixer les idées une première estimation de $\psi(x, y)$. Elle fait intervenir la quantité

$$u := \frac{\log x}{\log y}.$$

Dickman établit en 1930 la relation asymptotique

$$\psi(x, y) \sim x\rho(u) \quad (u \text{ fixé et } x \to +\infty), \tag{1.4}$$

où ρ, la fonction dite de Dickman, est définie comme l'unique solution de l'équation différentielle aux différences [1]

$$\begin{cases} v\rho'(v) + \rho(v-1) = 0 & (v > 1), \\ \rho(v) = 1 & (0 \leqslant v \leqslant 1). \end{cases}$$

En vue d'établir une inégalité de Turán-Kubilius où seuls les entiers friables sont retenus, commençons par construire un modèle probabiliste pour la restriction d'une fonction $f \in \mathbb{A}_0$ à $S(x,y)$ en nous inspirant de la démarche réalisée plus haut pour le cas classique qui correspond à $y = x$. On a pour tout entier $n \in S(x,y)$,

$$f(n) = \sum_{p \mid n} f(p) = \sum_{p \leqslant y} f(p)\zeta_p(n),$$

et notant $\nu_{x,y}$ la mesure de probabilité uniforme sur $S(x,y)$, on a

$$\nu_{x,y}(\zeta_p = 1) = \nu_{x,y}\big(\{n \in S(x,y) \,:\, p \mid n\}\big) = \frac{\psi(x/p,y)}{\psi(x,y)}. \tag{1.5}$$

Pour construire un modèle exploitable de $f_{|S(x,y)}$, il s'agit donc de déterminer une bonne approximation du rapport $\frac{\psi(x/p,y)}{\psi(x,y)}$. Le premier réflexe est de se tourner vers l'estimation (1.4) qui suggère l'approximation

$$\frac{\psi(x/p,y)}{\psi(x,y)} \approx \frac{\rho\big(u - \frac{\log p}{\log y}\big)}{p\rho(u)},$$

mais un tel choix conduit à des inégalités de Turán-Kubilius valables dans des domaines limités de x et y (cf. [1, 90, 91]).

Pour établir une inégalité de Turán-Kubilius valable dans un domaine aussi large que possible, La Bretèche et Tenenbaum utilisent l'estimation de $\psi(x,y)$ obtenue par Hildebrand et Tenenbaum [47] qui a l'avantage d'être uniforme pour $x \geqslant y \geqslant 2$ et bien adaptée pour appréhender les variations locales de $\psi(x,y)$. Cette estimation s'obtient à partir de l'identité donnée par la formule de Perron : on a pour tout $\alpha > 0$, $x \notin \mathbb{N}$,

$$\psi(x,y) = \int_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} \zeta(s,y) x^s \frac{ds}{s}, \tag{1.6}$$

1. Cette équation différentielle est le reflet de l'identité

$$\psi(x,y) = \psi(x,z) - \sum_{y < p \leqslant z} \psi(x/p,p) \quad (x \geqslant 1, z \geqslant y \geqslant 1)$$

appelée identité de Buchstab, assortie de la condition initiale $\psi(x,y) = \lfloor x \rfloor$ pour $y \geqslant x$. (voir par exemple corollaire 5.6 de [85]).

avec

$$\zeta(s,y) = \sum_{\substack{n\geqslant 1\\ n \text{ est } y\text{-friable}}} \frac{1}{n^s} = \prod_{p\leqslant y}\big(1-p^{-s}\big)^{-1}.$$

La méthode du col préconise de choisir $\alpha = \alpha(x,y)$ comme l'unique solution strictement positive de l'équation

$$\frac{d(\zeta(s,y)x^s))}{ds}\Big|_{s=\alpha} = 0 \Leftrightarrow \sum_{p\leqslant y}\frac{\log p}{p^\alpha - 1} = \log x.$$

Introduisons également $\sigma_2 := \sigma_2(x,y) = \frac{d^2\log\zeta(s,y)}{ds^2}\Big|_{s=\alpha}$. Hildebrand et Tenenbaum obtiennent la formule uniforme pour $x \geqslant y \geqslant 2$,

$$\psi(x,y) = \frac{x^\alpha\zeta(\alpha,y)}{\alpha\sqrt{2\pi\sigma_2}}\Big(1+O\Big(\frac{1}{u}+\frac{\log y}{y}\Big)\Big). \tag{1.7}$$

Cette formule suggère l'approximation

$$\frac{\psi(x/p,y)}{\psi(x,y)} \approx \frac{1}{p^\alpha},$$

ce qui conduit à modéliser $f_{|S(x,y)}$ par la variable aléatoire

$$Z_{f,x,y} = \sum_{p\leqslant y} f(p)\Xi_p$$

où $(\Xi_p)_{p\leqslant y}$ est une famille de variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de paramètre $p^{-\alpha}$:

$$\mathbb{P}(\Xi_p = 1) = \frac{1}{p^\alpha}, \quad \mathbb{P}(\Xi_p = 0) = 1 - \frac{1}{p^\alpha}.$$

Remarque. *La définition de $Z_{f,x,y}$ ne correspond pas à celle donnée p. 177 de [64] dans le cas particulier d'une fonction f fortement additive. On trouvera dans l'introduction de [19] de plus amples commentaires sur cette subtilité.*

L'espérance et la variance de $Z_{f,x,y}$ valent

$$\mathbb{E}(Z_{f,x,y}) = \sum_{p\leqslant y}\frac{f(p)}{p^\alpha} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(Z_{f,x,y}) = B_f(x,y)^2 - R_f(x,y)^2$$

avec

$$B_f(x,y)^2 = \sum_{p\leqslant y}\frac{|f(p)|^2}{p^\alpha} \quad \text{et} \quad R_f(x,y)^2 = \sum_{p\leqslant y}\frac{|f(p)|^2}{p^{2\alpha}}.$$

Théorème 1.1 (La Bretèche-Tenenbaum, 2005). *Il existe une constante $C > 0$ tel que uniformément pour toute fonction $f \in \mathbb{A}_0$, $x \geqslant y \geqslant 2$, on a*

$$V_f(x,y) := \frac{1}{\psi(x,y)} \sum_{n \in S(x,y)} \big| f(n) - \mathbb{E}(Z_{f,x,y}) \big|^2 \leqslant C B_f(x,y)^2. \tag{1.8}$$

La Bretèche et Tenenbaum déduisent de ce résultat plusieurs applications dont une étude de la répartition des diviseurs des nombres entiers friables.

Remarque. *Tout comme dans le cas classique, il peut être intéressant de comparer d'autres quantités voisines de $V_f(x,y)$ et $B_f(x,y)^2$. Les différentes versions de l'inégalité de Turán-Kubilius qui en découlent ne sont pas toujours équivalentes et cela peut conduire à des considérations assez subtiles qui font notamment l'objet des articles [17] et [19]. Cela peut également induire des différences de comportement des meilleures constantes pour ces différentes versions, problème que nous n'abordons pas ici.*

Là aussi se pose le problème de déterminer le comportement asymptotique de la meilleure constante dans (1.8), soit

$$C_0(x,y) := \sup_f \frac{V_f(x,y)}{B_f(x,y)^2},$$

lorsque x tend vers $+\infty$. Lorsque $y = x$, on sait déjà que $C_0(x,x) = \frac{3}{2} + o(1)$ lorsque $x \to +\infty$. Les résultats obtenus par La Bretèche et Tenenbaum, complétés par le récent article [14], montrent que sous la condition

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{u} \to 0, \tag{1.9}$$

on a $C_0(x,y) = 1 + o(1)$: la modélisation de $f_{|S(x,y)}$ par $Z_f(x,y)$ semble donc particulièrement pertinente dans ce domaine. Autrement dit, pour reprendre les termes de La Bretèche, Lamzouri et Tenenbaum, on observe sous la condition (1.9) un phénomène de *forte indépendance asymptotique* des relations de divisibilité par les nombres premiers [2].

Mes travaux sur l'inégalité de Turán-Kubilius friable, dans ma thèse d'université puis dans l'article [64] avec G. Tenenbaum, traitent du comportement asymptotique de $C_0(x,y)$ lorsque u est borné. Plus précisément que peut-on dire, pour $u \geqslant 1$, de

$$\mathfrak{C}_0(u) = \limsup_{x \to +\infty} C_0(x, x^{1/u}) \quad ?$$

2. Lorsque y est borné, un calcul élémentaire montre que $C_0(x,y) = o(1)$ pour $x \to +\infty$: ce phénomène semble assez marginal et ne persiste pas lors de l'extension aux fonctions additives.

Le résultat de Kubilius entraîne que $\mathfrak{C}_0(1) = 3/2$ et des calculs issus de [16] permettent de montrer que $\mathfrak{C}_0(u) = 1 + O(u^{-1/2})$. Dans [64], nous montrons que $\mathfrak{C}_0(u)$ s'identifie avec la plus grande valeur spectrale d'un certain opérateur linéaire T_u – la définition précise est donnée en (1.12) *infra* – défini sur un espace de Hilbert spécifique. L'étude du comportement de $\mathfrak{C}_0$ peut dès lors être menée à l'aide de techniques standards d'analyse. On peut de la sorte obtenir les trois faits suivants :

— $u \mapsto \mathfrak{C}_0(u)$ est continue sur $[1, \infty[$;

— pour tout $u \geqslant 1$, $\mathfrak{C}_0(u) > 1$: il n'y a pas dans ce domaine de phénomène de forte indépendance asymptotique [3] ;

— pour $u \to +\infty$, on a $\mathfrak{C}_0(u) - 1 \sim \frac{1}{8u}$.

Ces trois faits n'étaient pas accessibles avec les outils développés dans ma thèse. La méthode, inspirée de l'article de Hildebrand, se heurtait à un obstacle sérieux, que nous allons mettre en évidence dans le paragraphe suivant.

1.3 Opérateur lié à $V_f(x, y)$

Dans ce qui suit on utilise systématiquement la notation

$$u_d = \frac{\log d}{\log y}.$$

Compte-tenu de la formule $f(n) = \sum_{p|n} f(p)$, la quantité $V_f(x, y)$ est une forme quadratique en les variables $\{f(p)\}_{p \leqslant y}$ et on constate que certains coefficients sont de la forme

$$\frac{\psi(x/d, y)}{\psi(x, y)} \tag{1.10}$$

avec $d = p$ ou $d = pq$, que l'on souhaite comparer à $d^{-\alpha}$. Dans la perspective du calcul de $\mathfrak{C}_0(u)$, on ne peut pas employer ici la formule (1.7) à cause du terme d'erreur $O(1/u)$. Dans un premier temps, on se tourne vers une formule obtenue par Hildebrand [49] qui permet d'approcher convenablement (1.10) par $\frac{\rho(u-u_d)}{d\rho(u)}$ pour u borné. Puis nous introduisons une fonction auxiliaire h qui approche le rapport entre $\frac{\rho(u-u_d)}{d\rho(u)}$ et $d^{-\alpha}$. Elle est définie par

$$h(u, t) = \frac{\rho(u - t)}{\rho(u)} e^{-t\xi(u)}$$

3. Ce résultat peut se déduire de l'article [64] mais n'y est pas énoncé ; je n'en ai pris connaissance que tout récemment suite à la parution en ligne de [14] et à un échange avec les auteurs que je remercie.

où $\xi = \xi(u)$, définie comme l'unique solution positive de $1 + u\xi = e^{\xi}$, est une quantité standard dans la théorie des entiers friables. Nous introduisons également la fonction $K_u : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$K_u(s,t) = h(u,s) + h(u,t) - h(u,s+t) - 1,$$

qui joue un rôle capital dans cette étude.

Proposition 1.1. *Soit $u \geqslant 1$. On a uniformément pour tout $f \in \mathbb{A}_0$, $x \to +\infty$, $y = x^{1/u}$,*

$$V_f(x,y) \leqslant Q_f(x,y) + o(B_f(x,y)^2), \tag{1.11}$$

avec

$$Q_f(x,y) = \sum_{p \leqslant y} \frac{|f(p)|^2}{p^{\alpha}} h(u,u_p) - \sum_{p,q \leqslant y} \frac{f(p)\overline{f(q)}}{p^{\alpha}q^{\alpha}} K(u_p,u_q).$$

Si $u > 1$, l'inégalité dans (1.11) *peut être remplacée par une égalité.*

Posons $\mathcal{H} = \mathbb{C}^{\pi(y)}$ et assimilons les éléments de cet espace à des fonctions $f : \{p \leqslant y\} \to \mathbb{C}$. Nous munissons $\mathcal{H}$ du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{p \leqslant y} \frac{f(p)\overline{g}(p)}{p^{\alpha}},$$

et introduisons l'opérateur $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{x,y}$ défini sur $\mathcal{H}$ par

$$\mathcal{T}f(p) = h(u,u_p)f(p) - \sum_{q \leqslant x} \frac{f(q)}{q^{\alpha}} K(u_p,u_q),$$

de sorte que

$$Q_f(x,y) = \langle \mathcal{T}f, f \rangle_{\mathcal{H}}.$$

L'opérateur $\mathcal{T}$ est auto-adjoint, défini sur un espace de dimension finie, il est donc diagonalisable et ses valeurs propres sont réelles. Notant $v_{x,y}$ la plus grande valeur propre de $\mathcal{T}$, nous avons

$$\langle \mathcal{T}f, f \rangle_{\mathcal{H}} \leqslant v_{x,y} \|f\|_{\mathcal{H}}^2 = v_{x,y} B_f(x,y)^2,$$

avec égalité si f est un vecteur propre associé à la valeur propre $v_{x,y}$. On a par conséquent

$$C_0(x,y) = v_{x,y} + o(1).$$

Tout le problème consiste à déterminer $v_{x,y}$. L'idée de Kubilius, dans le cas classique $x = y$, consiste à approcher les éléments propres de $\mathcal{T}$ par ceux d'un opérateur

T qui ne dépend plus de x et dont les valeurs propres sont connues. À cet effet introduisons la classe $\mathcal{L}$ des fonctions $\varphi : [0,1] \to \mathbb{C}$ lipschitziennes et telles que $\varphi(0) = 0$. Si la fonction f est de la forme $f(p) = \varphi(u_p)$ avec $\varphi \in \mathcal{L}$ alors on peut montrer, grâce au théorème des nombres premiers et à la régularité de h, que l'on a pour $x \to +\infty$,

$$B_f(x,y)^2 = \int_0^1 |\varphi(t)|^2 e^{t\xi(u)} \frac{dt}{t} + o_\varphi(1) + o(B_f(x,y)^2),$$
$$Q_f(x,y) = \int_0^1 |\varphi(t)|^2 h(u,t) e^{t\xi(u)} \frac{dt}{t} - \int_0^1\int_0^1 \overline{\varphi(s)}\varphi(t) K_u(s,t) e^{(s+t)\xi(u)} \frac{dsdt}{st} + o_\varphi(1).$$

Ces formules conduisent à introduire la mesure $dm_u(t) = e^{t\xi(u)}dt/t$ sur $[0,1]$, l'espace de Hilbert $H_u = L^2([0,1], m_u)$ muni du produit scalaire canonique noté $\langle \cdot, \cdot \rangle_u$, ainsi que l'opérateur T_u définie sur H_u par

$$T_u\varphi(t) = h(u,t)\varphi(t) - \int_0^1 K_u(s,t)\varphi(s) dm_u(s). \tag{1.12}$$

Avec ces notations nous avons pour $f(p) = \varphi(u_p)$ avec $\varphi \in \mathcal{L}$,

$$B_f(x,y)^2 = \|\varphi\|_u^2\big(1 + o(1)\big) + o_\varphi(1),$$
$$Q_f(x,y) = \langle \mathcal{T} f, f \rangle_{\mathcal{H}} = \langle T_u\varphi, \varphi \rangle_u + o_\varphi(1).$$

Comme $K_u(s,t) = K_u(t,s)$, l'opérateur T_u est auto-adjoint. Il est également facile de constater que T_u est borné. Par conséquent son spectre

$$\sigma(T_u) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T_u - \lambda I \text{ n'est pas inversible}\}$$

est une partie compacte non vide de $\mathbb{R}$ dont nous notons $\lambda(u)$ le plus grand élément. D'après la formule

$$\sup_{\|\varphi\|_u = 1} \langle T_u\varphi, \varphi \rangle_u = \lambda(u), \tag{1.13}$$

nous avons donc

$$V_f(x,y) \leqslant \lambda(u)\|\varphi\|_u^2 + o(B_f(x,y)^2) + o_\varphi(1) = \big(\lambda(u) + o(1)\big)B_f(x,y)^2 + o_\varphi(1).$$

Certes, cette majoration ne concerne qu'une classe restreinte de fonctions f de $\mathbb{A}_0$ et n'est pas uniforme. Elle fournit néanmoins un candidat naturel pour la valeur de $\mathfrak{C}_0(u)$. De fait nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 1.2 (Martin-Tenenbaum, 2010)**.** *On a pour tout* $u \geqslant 1$,

$$\mathfrak{C}_0(u) = \limsup_{x\to+\infty} C_0(x, x^{1/u}) = \lim_{x\to+\infty} C_0(x, x^{1/u}) = \lambda(u).$$

La démonstration du théorème 1.2 est délicate, nous en allons en expliquer les idées principales.

Pour $u = 1$, les démonstrations de Kubilius, Stein et Hildebrand de l'identité $\mathfrak{C}_0(1) = \frac{3}{2}$ reposent toutes sur l'assertion suivante : l'opérateur T_1 admet une décomposition spectrale, autrement dit il existe une base hilbertienne de H_1 qui diagonalise T_1. Les arguments de Kubilius et Stein nécessitent en fait davantage, notamment la connaissance explicite des valeurs propres de T_1. En l'occurrence, Kubilius exhibe une base de décomposition spectrale de T_1 et obtient que l'ensemble des valeurs propres est donné par $\left\{1+\frac{(-1)^j}{j}\right\}_{j\geqslant 1}$ et par conséquent $\lambda(1) = \frac{3}{2}$. En revanche dès que $u > 1$, aucun argument ne semble en mesure de fournir une base de décomposition spectrale explicite pour T_u.

Dans sa démonstration de $\mathfrak{C}_0(1) = \frac{3}{2}$, Hildebrand utilise la base de décomposition spectrale fournie par Kubilius. Mais un examen approfondi montre que dans cette preuve, seule *l'existence* de cette base est requise. Hildebrand utilise également que les fonctions de H_1 qui composent cette base sont lisses, mais on peut toujours se ramener à ce cas grâce au théorème de Stone-Weierstrass. La méthode de Hildebrand peut ainsi être généralisée pour obtenir le résultat suivant.

Proposition 1.2. *Soit $u \geqslant 1$. Si T_u admet une décomposition spectrale, alors on a*

$$\mathfrak{C}_0(u) = \lambda(u). \tag{1.14}$$

Il suffit donc d'établir que T_u est diagonalisable dans une base hilbertienne pour établir le théorème 1.2. Qu'en est-il ? Introduisons les opérateurs T_u^h et T_u^K définie sur H_u par

$$\begin{aligned} T_u^h\varphi(t) &= h(u,t)\varphi(t) \\ T_u^K\varphi(t) &= -\int_0^1 K_u(s,t)\varphi(s)dm_u(s), \end{aligned}$$

de sorte que

$$T_u = T_u^h + T_u^K.$$

Le noyau K_u appartient à $L^2([0,1]^2, m_u \otimes m_u)$. Cela entraîne que T_u^K est un opérateur de Hilbert-Schmidt, en particulier il est compact. Il s'ensuit, d'après un théorème classique d'analyse fonctionnelle, que T_u^K est diagonalisable dans une base hilbertienne. Lorsque $u = 1$, on a $T_1^h = I$ car $h(1,t) = 1$, et donc T_1 est diagonalisable dans la même base hilbertienne que T_1^K.

Supposons à présent $u > 1$. L'opérateur T_u^h n'est plus l'opérateur identité, et par conséquent l'argument employé pour $u = 1$ n'est plus valable. Il suffit de prouver que T_u est compact pour conclure, mais cette assertion est fausse : la fonction $t \mapsto h(u,t)$ ne s'annule pas et par conséquent l'opérateur T_u^h est inversible. Il n'est donc pas compact d'après un théorème classique de Riesz. Comme T_u^K est compact, T_u ne l'est pas puisque l'ensemble des opérateurs compacts est un sous-espace vectoriel des opérateurs de H_u.

Dans ma thèse d'université, ce problème structurel n'était pas clairement identifié et j'avais prolongé la méthode de Hildebrand à $u > 1$ en travaillant avec la base de diagonalisation de T_u^K. Cette stratégie conduit *in fine* à

$$\min_{t\in[0,1]} h(u,t) + \lambda^K(u) \leqslant \mathfrak{C}_0(u) \leqslant \max_{t\in[0,1]} h(u,t) + \lambda^K(u), \tag{1.15}$$

où $\lambda^K(u)$ est la plus grande valeur propre de T_u^K. L'encadrement (1.15) ne permet pas, par exemple, d'établir la continuité de $u \mapsto \mathfrak{C}_0(u)$.

Le point crucial dans l'article [64] consiste à contourner l'absence de résultat permettant d'affirmer que T_u est diagonalisable en employant le théorème de Weyl-von Neumann : ce dernier stipule que dans un espace de Hilbert, tout opérateur borné auto-adjoint peut être approché par un opérateur auto-adjoint diagonalisable avec une précision arbitraire selon la norme d'opérateur. Ce renseignement, inséré adéquatement dans la preuve de la proposition 1.2, permet finalement d'aboutir à une démonstration du théorème 1.2.

1.4 Calculs numériques

Il est ensuite naturel de vouloir développer une méthode d'analyse numérique afin d'obtenir une valeur approchée de $\lambda(u)$. Là également la difficulté principale est liée au fait que l'opérateur T_u n'est pas diagonalisable, ce qui impose de développer une technique spécifique pour approcher $\lambda(u)$. C'est ce que nous avons réalisé dans l'article [42] en collaboration avec Guillaume Hanrot. Notre méthode consiste d'abord à approcher $\lambda(u)$ essentiellement par la plus grande valeur propre $\lambda_N(u)$ d'un opérateur de $\mathbb{R}^N$ judicieusement choisi et obtenu en « discrétisant » l'espace H_u. Nous établissons plusieurs estimations effectives de fonctions liées à la répartition des nombres entiers friables, et cela nous permet de montrer qu'il existe une constante effective $K(u) > 0$ telle que pour $N \geqslant 1000$

$$|\lambda(u) - \max(H_N(u), \lambda_N(u))| \leqslant K(u)\sqrt{\frac{\log N}{N}},$$

où $H_N(u)$ est une quantité facilement calculable numériquement dont j'omets ici la définition exacte. Nous employons ensuite la méthode de la puissance pour obtenir des valeurs numériques approchées de $\lambda_N(u)$ et donc de $\lambda(u)$. Nos résultats plaident fortement en faveur du fait que la fonction $u \mapsto \lambda(u) = \mathfrak{C}_0(u)$ n'est pas décroissante sur $[1,\infty[$, ce qui constitue une certaine surprise et souligne la complexité des phénomènes à l'œuvre dans la modélisation de $f_{|S(x,y)}$ par $Z_{f,x,y}$. Néanmoins nous n'obtenons pas une preuve formelle et la question de la monotonie de $u \mapsto \lambda(u)$ reste donc ouverte. Par ailleurs le graphe de $u \mapsto \lambda(u)$ (cf. [42, p. 359]) laisse présager que cette fonction est régulière, sauf peut-être en $u = 1$. Est-elle par exemple dérivable sur $[1, \infty[$?

Chapitre 2

Chiffres des nombres premiers

Dans tout ce chapitre, q désigne un nombre entier supérieur ou égal 2. La lettre p désigne toujours un nombre premier. Comme il est d'usage, pour $N \geqslant 1$, $\pi(N)$ désigne le nombre de nombres premiers n'excédant pas N, et pour $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$, $\pi(N; a, b)$ désigne le nombre de nombres premiers p n'excédant pas N tels que $p \equiv a \bmod b$. J'emploie aussi de manière systématique pour $x \in \mathbb{R}$, la notation $\mathrm{e}(x) = e^{2i\pi x}$. La notation $\log_q$ désigne le logarithme en base q. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\|x\|$ la distance de x à $\mathbb{Z}$. La lettre φ désigne la fonction indicatrice d'Euler. Enfin même lorsque ce n'est pas mentionné, les constantes implicites dans les O et les $\ll$ peuvent dépendre de q.

2.1 Introduction

Tout nombre entier $n \geqslant 1$ admet un unique développement en base q,

$$n = \sum_{j=0}^{\nu} \varepsilon_j(n) q^j$$

avec $\nu \in \mathbb{N}$, pour tout $0 \leqslant j \leqslant \nu$, $\varepsilon_j(n) \in \{0, \ldots, q-1\}$ et $\varepsilon_\nu \neq 0$. Les nombres $\{\varepsilon_j(n)\}_{j=0}^{\nu}$ sont les chiffres de n en base q.

2.1.1 Fonctions fortement q-additives

Dans l'étude des chiffres des nombres entiers, on s'intéresse assez naturellement aux fonctions q-additives, c'est-à-dire qui vérifient que pour tout $(a, b, j) \in \mathbb{N}^3$ tels que $a < q^j$, on a

$$f(a + bq^j) = f(a) + f(bq^j).$$

Si de plus $f(bq^j) = f(b)$, on dit que f est fortement q-additive. Parmi les fonctions fortement q-additives figurent les fonctions $|\cdot|_k$ pour $1 \leqslant k < q$ qui comptent le nombre d'apparitions du chiffre k dans le développement d'un nombre entier en base q (notons que la fonction $|\cdot|_0$ qui compte le nombre d'apparitions de 0 n'est pas fortement q-additive). On peut facilement montrer qu'une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ est fortement q-additive si et seulement si f est de la forme

$$f = \sum_{1 \leqslant k < q} \alpha_k |\cdot|_k$$

avec $\alpha_1, \ldots, \alpha_{q-1} \in \mathbb{C}$. La fonction fortement q-additive la plus importante est la somme des chiffres définie par

$$s_q(n) = \sum_{j=0}^{\nu} \varepsilon_j(n) = \sum_{1 \leqslant k < q} k|n|_k, \tag{2.1}$$

et qui fait l'objet d'une littérature considérable. Une des raisons est que la suite $\{s_2(n) \bmod 2\}_{n \geqslant 1}$ correspond à la suite de Thue-Morse sur l'alphabet $\{0, 1\}$ qui constitue un exemple emblématique de suite automatique, *i.e.* engendrée par un automate fini (cf. par exemple [3, chapitres 4 et 5] pour cette notion). La suite de Thue-Morse intervient par ailleurs dans diverses branches des mathématiques (cf. [2]). Plus généralement, pour toute fonction f fortement q-additive, la suite $\{f(n) \bmod q\}_{n \geqslant 1}$ est automatique.

Une autre raison qui conduit à privilégier l'étude de s_q, au moins dans un premier temps, est le fait que l'étude de sa fonction génératrice $\sum_{n \leqslant N} w^{s_q(n)}$ (ou plus généralement $\sum_{n \leqslant N} w^{s_q(n)} z^n$) peut être ramenée à celle de $\sum_{n < q^\lambda} w^{s_q(n)}$ qui prend une forme particulièrement agréable. Par exemple, on a formellement pour $w, z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \sum_{n < q^\lambda} w^{s_q(n)} z^n &= \prod_{j=0}^{\lambda-1} \Big(\sum_{0 \leqslant k < q} (w z^{q^j})^k \Big) \\ &= \prod_{j=0}^{\lambda-1} \frac{(w z^{q^j})^q - 1}{w z^{q^j} - 1}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

En 1968, Gelfond [39] analyse le produit (2.2) lorsque $w = \mathrm{e}(t/m)$ avec $1 \leqslant t < m$, $|z| = 1$ et obtient l'existence de $\lambda = \lambda(m, q) > 0$ tel que pour tout $\beta \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n \leqslant N} \mathrm{e}\Big(\frac{t}{m} s_q(n) + \beta n\Big) \ll N^{1-\lambda}. \tag{2.3}$$

Il en déduit *via* la formule d'orthogonalité

$$\sum_{j=0}^{m-1} \mathrm{e}\Big(\frac{b-a}{m} j\Big) = \begin{cases} m & \text{si } a \equiv b \bmod m, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{2.4}$$

que la fonction somme des chiffres est bien répartie dans les progressions arithmétiques le long d'une progression arithmétique arbitraire : pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $(m, q-1) = 1$, il existe $\sigma = \sigma(m, q) > 0$ tel que uniformément pour $a, \ell \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}^*$, $N \geqslant 2$, on a

$$\text{card}\{n \leqslant N \,:\, s_q(n) \equiv a \bmod m, n \equiv \ell \bmod k\} = \frac{N}{mk} + O(N^{1-\sigma}). \tag{2.5}$$

Un autre exemple d'utilisation de la fonction génératrice $\sum_{n \leqslant N} w^{s_q(n)}$ est donné par l'étude de la loi locale de s_q par Mauduit et Sárközy [72] : la formule de Cauchy montre que pour tout $r > 0$,

$$V_k(N) := \text{card}\{n \leqslant N \,:\, s(n) = k\} = \int_{|z|=r} \Big(\sum_{n \leqslant N} z^{s_q(n)} \Big) \frac{dz}{z^{k+1}},$$

intégrale qui peut être évaluée par la méthode du col. Posons

$$\mu_q = \frac{q-1}{2} \qquad \text{et} \qquad \sigma_q^2 = \frac{q^2-1}{12}$$

qui correspondent à la moyenne et à la variance des valeurs $0, 1, \dots, q-1$ prises par les chiffres en base q. Dans le domaine $|k - \mu_q \log_q N| \ll \sqrt{\log_q N}$, Mauduit et Sárközy obtiennent la formule asymptotique

$$V_k(N) = \frac{N}{\sqrt{2\pi\sigma_q^2 \log_q N}} \Big(e^{-\frac{(k-\mu_q \log_q N)^2}{2\sigma_q^2 \log_q N}} + O((\log N)^{-1/2}) \Big). \tag{2.6}$$

Un tel résultat n'est pas surprenant : la formule $s_q = \sum_j \varepsilon_j$ et le principe heuristique suivant lequel les chiffres sont distribués de manière indépendante laissent présager que sur $\{n \leqslant N\}$, s_q se comporte comme une somme de $\lfloor \log_q N \rfloor$ variables aléatoires indépendantes et de loi uniforme sur $\{0, \dots, q-1\}$. On peut d'ailleurs déduire de (2.6) que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $N \to +\infty$,

$$\frac{1}{N} \text{card} \Big\{ n \leqslant N \,:\, \frac{s_q(n) - \mu_q \log_q N}{\sigma_q \sqrt{\log_q N}} \leqslant y \Big\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{1}{2}u^2} du + o(1), \tag{2.7}$$

soit un théorème central limite pour la fonction somme des chiffres.

Les résultats qui précèdent peuvent tous être étendus de manière *ad hoc* aux fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ fortement q-additives par une méthode similaire, c'est-à-dire en considérant $\sum_{n<q^\lambda} w^{f(n)} z^n$ dont l'expression sous forme de produit mène à des analyses similaires mais légèrement plus techniques que dans le cas particulier $f = s_q$ (cf. [32, §8.3.3]).

2.1.2 Chiffres des nombres premiers : un tour d'horizon

Avant d'entrer dans le vif du sujet, donnons plusieurs raisons qui motivent l'étude des chiffres des nombres premiers. D'abord, c'est une problématique classique en théorie analytique des nombres, on souhaite déterminer dans quelle mesure les nombres premiers se comportent statistiquement comme des nombres entiers choisis au hasard – en tenant compte des biais évidents induits par la définition même d'un nombre premier. Ainsi Gelfond suggère-t-il dans [39] de déterminer le nombre de nombres premiers $p \leqslant N$ tels que $s_q(p) \equiv a \bmod m$ sous la condition $(m, q-1) = 1$. *A priori*, les conditions « n est premier » et « $s_q(n) \equiv a \bmod m$ » sont sans lien particulier et on s'attend donc à observer un phénomène d'indépendance asymptotique, soit

$$\operatorname{card}\{p \leqslant N \,:\, s_q(p) \equiv a \bmod m\} \sim \frac{\pi(N)}{m} \quad (N \to +\infty).$$

De même on peut chercher à établir un analogue de (2.6). Dans les deux cas on se heurte à l'impossibilité de calculer de manière directe la somme

$$\sum_{p<q^\lambda} w^{s_q(p)}.$$

La question de Gelfond peut être considérée sous un autre angle. Un problème standard en théorie analytique des nombres consiste, étant donné un sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $\mathbb{N}$ présentant une certaine structure, à déterminer si $\mathcal{A}$ contient ou non une infinité de nombres premiers. Les exemples $\mathcal{A} = \mathbb{N}$ et $\mathcal{A} = \{a + bn \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ avec $(a, b) = 1$ correspondent respectivement à l'infinitude des nombres premiers et au théorème de Dirichlet pour les nombres premiers dans les progressions arithmétiques. Lorsque $\mathcal{A}$ est de densité nulle, *i.e.*

$$\operatorname{card}(\mathcal{A} \cap [1, N]) = o(N)$$

lorsque $N \to \infty$, la question est en général très difficile, et les résultats connus sont généralement le fait de grandes prouesses techniques (cf. l'introduction de [70] par exemple pour plusieurs références). Inspirés par la question de Gelfond, Fouvry et Mauduit [38] posent la question de traiter le cas d'ensembles $\mathcal{A}$ automatiques, c'est-à-dire reconnaissables par un automate fini. Par exemple, pour toute fonction f fortement q-additive à valeurs entières, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \,:\, f(n) \equiv a \bmod m\}$ est automatique et de densité $1/m$. Si l'on se donne un sous-ensemble strict et non vide $\mathscr{C}$ de $\{0, \dots, q-1\}$, l'ensemble

$$\mathcal{A} = \{n \in \mathbb{N} \,:\, \forall j,\, \varepsilon_j(n) \in \mathscr{C}\}$$

est un autre exemple d'ensemble automatique mais cette fois de densité nulle, ce qui rend le problème de la détection des nombres premiers dans $\mathcal{A}$ encore plus difficile *a priori.*

Par ailleurs, certaines conjectures récentes liées au principe d'aléa de Möbius – dont nous parlerons ultérieurement (cf. (2.14)) – offrent de nouvelles perspectives pour l'étude des chiffres des nombres premiers.

Jusqu'en 2005, relativement peu de choses étaient connues sur les chiffres des nombres premiers (cf. introduction de [70]). Bassily et Kátai [9] sont néanmoins parvenus en 1995 à établir un analogue de (2.7) : pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a pour $N \to +\infty$,

$$\frac{1}{\pi(N)} \operatorname{card}\Big\{p \leqslant N \,:\, \frac{s_q(p) - \mu_q \log_q N}{\sigma_q \sqrt{\log_q N}} \leqslant y\Big\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{1}{2}u^2} du + o(1). \tag{2.8}$$

Leur démonstration, maintenant connue sous le nom de *méthode de Bassily-Kátai*, repose sur un théorème classique de la théorie des probabilités, dit de la méthode des moments. Nous y reviendrons dans le §2.4. Cette méthode s'avère extrêmement souple : elle permet d'établir des résultats similaires pour d'autres sous-suites des nombres entiers, notamment des sous-suites du type $P(n)$ où P est un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ tel que $P(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$. Elle permet également, sous certaines conditions peu restrictives, de remplacer la somme des chiffres par une fonction additive quelconque (cf. théorème 8.3.10 de [32]). En revanche, elle est insuffisante pour obtenir une loi locale du type (2.6) le long des nombres premiers.

Pour ce qui est du problème posé par Gelfond, Fouvry et Mauduit [38, 37] en 1996, puis Dartyge et Tenenbaum [27] en 2005 ont obtenu par des méthodes de cribles des résultats sur les éléments de $\{n \,:\, s_q(n) \equiv a \bmod m\}$ qui ont au plus k facteurs premiers comptés avec multiplicité pour $k \geqslant 2$. Dans l'article [70], publié en 2010 mais dont les résultats ont été annoncés cinq ans plus tôt, Mauduit et Rivat réalisent une avancée majeure.

Théorème 2.1 (Mauduit-Rivat, 2005)**.** *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $(q-1)\alpha \notin \mathbb{Z}$, il existe $\sigma_q(\alpha) > 0$ tel que pour tout $N \geqslant 2$, on a*

$$\sum_{p \leqslant N} \mathrm{e}\big(\alpha s_q(p)\big) = O_{q,\alpha}(N^{1-\sigma_q(\alpha)}). \tag{2.9}$$

En faisant appel à la relation (2.4), on peut déduire de ce théorème une réponse complète à la question de Gelfond.

Corollaire. *Soit $m \geqslant 2$ un nombre entier. Il existe $\kappa_{q,m} > 0$ tel que pour tout $a \in \mathbb{Z}$, on a*

$$\operatorname{card}\{p \leqslant N \,:\, s_q(p) \equiv a \bmod m\} = \frac{d}{m}\pi(N; a, d) + O_{q,m}(N^{1-\kappa_{q,m}}), \tag{2.10}$$

où l'on a posé $d = (m, q-1)$.

L'article de Mauduit-Rivat a stimulé de nombreuses recherches sur les chiffres des nombres premiers et en l'espace d'une dizaine d'années plusieurs résultats spectaculaires ont été obtenus. Dans ce qui suit je présente essentiellement ceux en lien avec les techniques développées par Mauduit et Rivat et sur lesquels j'ai travaillé jusqu'à présent.

Dans [33], Drmota, Mauduit et Rivat parviennent à établir un analogue de (2.6) pour les nombres premiers.

Théorème 2.2 (Drmota-Mauduit-Rivat, 2009)**.** *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *on a uniformément pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $(k, q-1) = 1$, $N \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} &\operatorname{card}\{p \leqslant N \,:\, s_q(p) = k\} \\ &\qquad = \frac{q-1}{\varphi(q-1)} \frac{\pi(N)}{\sqrt{2\pi\sigma_q^2 \log_q N}} \Big(e^{-\frac{(k-\mu_q \log_q N)^2}{2\sigma_q^2 \log_q N}} + O((\log N)^{-1/2+\varepsilon}) \Big). \end{aligned} \tag{2.11}$$

La démonstration de (2.11) repose sur une utilisation conjointe des méthodes de Bassily-Kátai et de Mauduit-Rivat, toutes deux nécessitant quelques améliorations. En particulier, elle sollicite une version de (2.9) uniforme en α et comportant une expression explicite pour $\sigma_q(\alpha)$. Je l'énonce à fin de référence ultérieure.

Proposition 2.1 (Drmota-Mauduit-Rivat, 2009)**.** *Il existe* $c_q > 0$ *tel que uniformément pour tous* $\alpha \in \mathbb{R}$, $N \geqslant 2$, *on a*

$$\sum_{p \leqslant N} \mathrm{e}\big(\alpha s_q(p)\big) = O((\log N)^3 N^{1-c_q \|(q-1)\alpha\|^2}). \tag{2.12}$$

Voici une application frappante du théorème 2.2. On peut déduire de (2.6) que l'ensemble des nombres entiers dont la somme des chiffres vaut la « valeur attendue », soit

$$\mathscr{M} = \{n \in \mathbb{N} \,:\, s_q(n) = \lfloor \mu_q \log_q N \rfloor\}, \tag{2.13}$$

est de densité nulle. Plus précisément on a $\operatorname{card}(\mathscr{M} \cap [1, N]) \asymp N(\log N)^{-1/2}$. Le théorème 2.2 permet d'obtenir une formule asymptotique pour la quantité $\operatorname{card}\{p \leqslant N \,:\, p \in \mathscr{M}\}$ que j'omets ici (cf. théorème 2 de [33]) et en particulier de montrer que $\mathscr{M}$ contient une infinité de nombres premiers. Notons que $\mathscr{M}$ n'est pas automatique mais est reconnaissable par un automate infini (cf. [69] pour cette notion).

Les travaux que j'ai menés avec C. Mauduit et J. Rivat visent de manière générale à obtenir des généralisations des théorèmes 2.1 et 2.2 et d'en déduire quelques conséquences intéressantes sur les chiffres des nombres premiers. Certains de nos résultats ont aussi permis en leur temps de légères avancées sur la conjecture de Sarnak pour le principe d'aléa de Möbius. Expliquons succintement de quoi il s'agit. Le principe d'aléa de Möbius énonce de manière informelle que pour toute suite $\{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$ bornée à valeurs complexes « raisonnable », on a pour $N \to +\infty$,

$$\sum_{n\leqslant N} \mu(n)\xi_n = o(N), \tag{2.14}$$

où μ est la fonction de Möbius. Lorsqu'on dispose d'une estimation asymptotique non triviale pour $\sum_{p\leqslant N} \xi_p$, on dit que la suite $\{\xi_n\}_{n\geqslant 1}$ vérifie un théorème des nombres premiers, ce qui est en général plus difficile à établir que (2.14).

En 2011, dans une série de conférences, Sarnak conjecture que toute suite déterministe, c'est-à-dire produite [1] par un système dynamique d'entropie nulle, satisfait à (2.14). Cette conjecture suscite de nombreux travaux – on pourra consulter le récent article de survol [35]. Elle est d'autant plus intéressante qu'elle se situe au carrefour de plusieurs disciplines telles que la théorie analytique des nombres, la combinatoire des mots et la théorie des systèmes dynamiques.

Parmi les suites déterministes figurent les suites automatiques. Plusieurs techniques issues de la théorie analytique des nombres [2] sont maintenant disponibles pour établir un principe d'aléa de Möbius pour ces suites : par exemple le critère de Kátai (théorème 1 de [56]), la méthode de convolution de Daboussi (cf. théorème 2.12 de [27]) ou la méthode de Mauduit-Rivat. Ces trois méthodes permettent par exemple d'établir que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $(q-1)\alpha \notin \mathbb{Z}$, $N \to +\infty$, on a

$$\sum_{n\leqslant N} \mu(n)\mathrm{e}(\alpha s_q(n)) = o(N), \tag{2.15}$$

avec un plus ou moins bon terme d'erreur suivant la méthode choisie – parmi celles mentionnées, seule la méthode de Mauduit-Rivat permet d'obtenir le théorème des nombres premiers correspondant. Dans [66], nous montrons que la relation (2.15) subsiste si l'on remplace αs_q par une fonction de la forme $\sum_{0\leqslant k<q-1} \alpha_k |\cdot|_k$. D'autres avancées se sont succédées (cf. [71, 31, 30, 41]), et finalement Müllner [75] a démontré récemment que la conjecture de Sarnak est satisfaite pour toute suite automatique. Sa démonstration s'appuie sur l'article [71], qui élargit le champ d'application de la méthode de Mauduit-Rivat. Le cas plus général des suites engendrées par un point fixe d'une substitution sur un alphabet fini [3] reste ouvert

1. Étant donné un espace topologique compact X et une application $T : X \to X$ continue, on dit qu'une suite de nombres complexes $(\xi_n)_{n\geqslant 1}$ est produite par le système dynamique (X,T) s'il existe $f : X \to \mathbb{C}$ continue et $x \in X$ tels que pour tout $n \geqslant 0$, $\xi_n = f(T^n x)$.

2. Il existe également des techniques liées à la théorie ergodique des systèmes dynamiques, je ne les évoque pas ici.

3. Les suites automatiques sont exactement les suites engendrées par un point fixe d'une substitution de longueur constante.

et constitue un intéressant problème (cf. [35, §5.2.3] où sont recensés les cas déjà traités). Jusqu'à présent le critère de Kátai et la méthode de Mauduit-Rivat ont été largement privilégiés et il serait intéressant d'étudier le champ d'applications de la méthode de convolution développée par Dartyge et Tenenbaum [27].

Dans [75], Müllner obtient aussi un théorème des nombres premiers pour toute une classe de suites automatiques. Je le formule ici en des termes légèrement différents : soit $\mathcal{A}$ un ensemble reconnaissable par un automate $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ – je reprends ici la notation de [3, p. 128]. Si l'automate M est fortement connexe, et si $\delta(q_0, 0) = q_0$, alors

$$\frac{1}{\pi(N)} \operatorname{card}\{p \leqslant N \,:\, p \in \mathcal{A}\}$$

admet une limite quand $N \to +\infty$. La détermination de cette limite peut se heurter à certaines complications arithmétiques du fait de la relation $s_q(n) \equiv n \bmod q-1$: le cas des ensembles $\mathcal{A} = \{n \,:\, f(n) \equiv a \bmod m\}$ avec f fortement q-additive abordé au §2.3 en est une bonne illustration. Notons que le résultat de Müllner ne permet pas de traiter le cas d'un ensemble automatique de densité nulle car la condition de forte connexité entraîne que l'ensemble $\mathcal{A}$ est de densité strictement positive.

Et justement Maynard [73] a annoncé en 2016 des résultats spectaculaires sur les nombres premiers avec des chiffres manquants : il obtient par exemple qu'il existe une infinité de nombres premiers ne comportant pas le chiffre 9 en base 10. Il fournit ainsi les premiers exemples d'ensembles automatiques de densité nulle dont on sait prouver qu'ils contiennent une infinité de nombres premiers. Notons que le problème de déterminer s'il existe ou non une infinité de nombres premiers de Mersenne (les nombres dont le développement en base 2 ne comporte que des 1) reste malgré tout largement ouvert en l'état actuel des connaissances.

Les techniques développées par Mauduit et Rivat se sont également avérées pertinentes pour établir des principes d'aléa de Möbius en lien avec plusieurs questions issues de la théorie de la complexité posées par Kalai sur son blog [55] (voir notamment [12]). J'en omets la présentation dans la mesure où les résultats que j'ai obtenus avec C. Mauduit et J. Rivat ne relèvent pas de ce champ d'étude.

Enfin, bien que ce ne soit pas directement en lien avec les techniques ou les résultats décrits jusqu'ici, il est difficile de clore ce tour d'horizon sans citer l'impressionnant résultat de Bourgain [13] qui améliore considérablement ce qui était connu sur les nombres premiers avec des chiffres préassignés (cf. [45, 46]). Il obtient l'existence de $c > 0$ tel que pour $N \to \infty$, $1 \leqslant d \leqslant cN$, $0 \leqslant j_1 < \ldots < j_d < N$, $\ell_1, \ldots, \ell_d \in \{0, 1\}$, on a

$$\operatorname{card}\{p < 2^N \,:\, \varepsilon_{j_1}(p) = \ell_1, \ldots, \varepsilon_{j_d}(p) = \ell_d\} \sim_{N\to\infty} \frac{\pi(2^N)}{2^d}. \tag{2.16}$$

La méthode de Bassily-Kátai sur laquelle j'ai travaillé repose également sur la considération d'ensembles de nombres premiers dont certains chiffres sont préassignés, mais avec des conditions et des perspectives différentes. Nous l'évoquerons au §2.4.1.

2.2 Prolongement de la méthode de Mauduit et Rivat

En 2009, j'ai commencé à travailler avec C. Mauduit et J. Rivat sur la question suivante relative à l'estimation (2.12) : peut-on obtenir plus généralement pour $\beta \in \mathbb{R}$ une majoration non triviale de

$$\sum_{p \leqslant N} \mathrm{e}(\alpha s_q(p) + \beta p) \quad ? \tag{2.17}$$

Cela permettrait, par exemple, d'étudier la répartition dans les progressions arithmétiques des nombres premiers p satisfaisant à $s_q(p) \equiv a \bmod m$. En fait, une étude attentive de l'article [70] montre qu'une telle majoration découle de quelques changements mineurs dans la méthode de Mauduit-Rivat. On obtient même une majoration de (2.17) uniforme en β, ce qui constituait alors une certaine surprise. Cette uniformité ouvre la voie vers des applications plus sophistiquées comme nous le verrons.

Nous nous sommes ensuite penchés sur la possibilité d'étendre le théorème 2.1 et la proposition 2.1 à d'autres fonctions que la somme de chiffres. La généralisation la plus simple consiste à traiter le cas des fonctions fortement q-additives et c'est précisément l'objet de l'article [66]. En fait nous traitons une situation plus générale en considérant des fonctions de la forme $\sum_{0\leqslant k<q} \alpha_k |\cdot|_k$ avec $\alpha_0, \dots, \alpha_{q-1} \in \mathbb{R}$.

Théorème 2.3 (Martin-Mauduit-Rivat, 2014). *Il existe $c_q > 0$ tel que, uniformément pour tout $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \dots, \alpha_{q-1}) \in \mathbb{R}^q$, $\beta \in \mathbb{R}$ et $N \geqslant 2$, on a*

$$\sum_{p \leqslant N} \mathrm{e}\Big(\sum_{0\leqslant k<q} \alpha_k |p|_k + \beta p \Big) = O_q\big((\log N)^3 N^{1-c_q\sigma_q(\boldsymbol{\alpha})}\big) \tag{2.18}$$

avec

$$\sigma_q(\boldsymbol{\alpha}) = \|(q-1)(\alpha_1-\alpha_0)\|^2 + \sum_{2\leqslant k<q} \|\alpha_k - \alpha_0 - k(\alpha_1-\alpha_0)\|^2. \tag{2.19}$$

Cet énoncé ne correspond pas exactement à ceux des théorèmes 1 et 2 de [66] mais en découle après quelques arguments standards (voir par exemple la démonstration de la proposition 1 de [65]). Le théorème 2.3 contient en germe plusieurs applications exposées dans les §2.3 et §2.4. Dans la suite de ce paragraphe je donne quelques idées de la démonstration du théorème 2.3.

Commençons par décrire brièvement la méthode de Mauduit-Rivat pour établir le théorème 2.1. Elle consiste à utiliser la méthode de Vinogradov (cf. [86] ou [29, chapitre 24]) pour estimer des sommes oscillantes portant sur les nombres premiers. Étant donnée une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, il s'agit, *via* certaines identités combinatoires, de décomposer une somme portant sur les nombres premiers de la forme

$$\sum_{p \leqslant N} f(p)$$

en combinaisons linéaires de sommes portant sur les nombres entiers de la forme

$$\sum_{\substack{m,n \\ mn \leqslant N}} a_m b_n f(mn), \tag{2.20}$$

où a_m et b_n sont des nombres complexes de module n'excédant pas 1. Cette décomposition fait intervenir deux types de sommes :

— les sommes dites de type I pour lesquelles une des variables, disons a_m est lisse (par exemple $a_m = \log m$), et la sommation en n est longue, *i.e.* comporte suffisamment de termes pour espérer obtenir des compensations ;

— les sommes dites de type II où aucune des suites $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ n'est lisse mais où les sommations en m et n sont longues.

Dans notre situation, la fonction f est donnée par $f(n) = \mathrm{e}(\alpha s_q(n))$. Les idées de Gelfond pour établir (2.3) permettent d'obtenir à peu de frais une majoration suffisante des sommes de type I [4]. En revanche obtenir une majoration non triviale des sommes de type II constitue une difficulté majeure. On commence par découper les sommes de type II en sommes de la forme

$$\sum_{q^\mu \leqslant m < q^{\mu+1}} \sum_{\substack{q^\nu \leqslant n < q^{\nu+1} \\ mn \leqslant N}} a_m b_n f(mn). \tag{2.21}$$

La méthode repose ensuite sur un argument lié à la propagation d'une retenue lors d'une addition en base q. Cet argument, que je ne détaille pas ici, permet en quelque sorte, lors de l'évaluation de (2.21), de remplacer à un certain stade des calculs la fonction s_q par une version tronquée définie par

$$s_{q,\lambda}\Big(\sum_j \varepsilon_j q^j\Big) = \sum_{0 \leqslant j < \lambda} \varepsilon_j,$$

4. L'emploi de techniques plus sophistiquées liées à l'inégalité du grand crible permet d'obtenir une majoration de meilleure qualité. Cela est requis par exemple pour obtenir la proposition 2.1.

avec $\lambda = \lambda(\mu, \nu) \in \mathbb{N}^*$. Introduisons alors la fonction $g_\lambda : n \mapsto \mathrm{e}(\alpha s_{q,\lambda}(n))$ qui est q^λ-périodique. L'estimation des sommes de type II est conclue au moyen de deux estimations concernant la transformée de Fourier discrète de g_λ définie par

$$\widehat{g_\lambda}(n) = \frac{1}{q^\lambda} \sum_{h \bmod q^\lambda} g_\lambda(h)\mathrm{e}\Big(-\frac{hn}{q^\lambda}\Big) = \frac{1}{q^\lambda} \sum_{0 \leqslant h < q^\lambda} \mathrm{e}\Big(\alpha s_q(n) - \frac{hn}{q^\lambda}\Big).$$

Précisément, Mauduit et Rivat démontrent :
1) l'existence de $\sigma = \sigma(\alpha) > 0$ tel que uniformément pour tout $h \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in \mathbb{N}$ on a

$$|\widehat{g_\lambda}(h)| \ll q^{-\sigma\lambda} \quad ; \tag{2.22}$$

2) l'existence de $0 < \eta < 1/2$ tel que uniformément pour tout $\lambda, \delta, k \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$ tels que $0 \leqslant \delta \leqslant \lambda$, $k \mid q^{\lambda-\delta}$, $q \mid k$, on a

$$\sum_{\substack{0 \leqslant h < q^\lambda \\ h \equiv a \bmod kq^\delta}} |\widehat{g_\lambda}(h)| \ll k^{-\eta} q^{\eta(\lambda-\delta)+1} |\widehat{g_\delta}(a)|. \tag{2.23}$$

Ces deux majorations reposent largement sur la forte q-additivité de s_q qui entraîne que la fonction $\widehat{g_\lambda}$ s'écrit comme un produit – c'est un cas particulier de (2.2) – :

$$\widehat{g_\lambda}(h) = q^{-\lambda} \prod_{j=0}^{\lambda} \varphi_\alpha\Big(\frac{h}{q^j}\Big)$$

avec

$$\varphi_\alpha(t) = \sum_{0 \leqslant k < q} \mathrm{e}(k(\alpha - t)) = \frac{\sin(\pi q(\alpha - t))}{\sin(\pi(\alpha - t))}.$$

Que se passe-t-il lorsque l'on essaie d'étendre le théorème 2.1 à des fonctions de la forme $f = \sum_{0 \leqslant k < q} \alpha_k |\cdot|_k$? Il s'avère tout d'abord que l'argument sur la propagation de retenue reste valide. Ensuite la transformée de Fourier $\widehat{g_\lambda}$ correspondant à f admet une représentation similaire sous forme de produit. Mais en général

$$\sum_{0 \leqslant k < q} \mathrm{e}(\alpha f(k) - kt)$$

n'est plus la somme des termes d'une suite géométrique ce qui complique l'analyse. Une estimation du type (2.22) s'obtient néanmoins sans trop de difficulté. En revanche, établir une majoration du type (2.23) est un problème délicat. Notre méthode, inspirée du cas $f = s_2$ traité dans [70], consiste à combiner à plusieurs reprises et de manière relativement astucieuse l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'égalité de Parseval.

Pour conclure ce paragraphe, notons que l'article [66], dans la lignée de [34], a permis de simplifier quelques étapes techniques dans la méthode initiale de Mauduit-Rivat. Le travail réalisé a également mis en évidence la nécessité d'améliorer cette méthode afin d'être en mesure de pouvoir se passer d'une estimation en moyenne ℓ^1 du type (2.23) qui s'avère trop restrictive. Cet objectif sera atteint peu après par Mauduit et Rivat dans [71].

2.3 Répartition des fonctions fortement additives le long des nombres premiers

Soit f une fonction fortement q-additive et à valeurs entières. Le théorème 2.3 fournit la majoration uniforme pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $N \geqslant 2$,

$$\sum_{p \leqslant N} \mathrm{e}\big(\alpha f(p) + \beta p\big) \ll (\log N)^3 N^{1-\tau_{f,\alpha}} \tag{2.24}$$

avec

$$\tau_{f,\alpha} := \|\alpha(q-1)f(1)\|^2 + \sum_{2 \leqslant k < q} \|\alpha(f(k) - kf(1))\|^2.$$

Nous pouvons utiliser cette majoration pour étudier l'existence de nombres premiers de l'ensemble automatique

$$\mathscr{G}_{f,a,m} = \{n \geqslant 1 \,:\, f(n) \equiv a \bmod m\}.$$

On peut toujours se ramener au cas où $(f(1), \dots, f(q-1)) = 1$ ce que nous supposerons dans la suite. L'étude des nombres premiers de $\mathscr{G}_{f,a,m}$ comporte une complication d'ordre arithmétique qui vient de la relation classique

$$s_q(n) \equiv n \bmod q - 1.$$

Par exemple si $f = s_q$, alors pour tout diviseur d de $q-1$ on a

$$\mathscr{G}_{s_q,a,d} \subseteq \{n \,:\, n \equiv a \bmod d\},$$

et ce dernier ensemble contient au plus un nombre premier si $(a, d) > 1$. Cela nous amène à introduire d_f, le plus grand diviseur d de $q-1$ tel que f et s_q sont liées modulo d ; nous le nommons *entier caractéristique* de f. On peut alors montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\tau_{f,\alpha} = 0 \iff d_f \alpha \in \mathbb{Z}. \tag{2.25}$$

Cette dernière équivalence est suffisante pour déduire de (2.24) une formule asymptotique pour $\operatorname{card}\{p \leqslant N \,:\, p \in \mathscr{G}_{f,a,m}\}$. Cependant la quantité $\tau_{f,\alpha}$ reste délicate à manipuler. De plus, en vue d'établir une loi locale le long des nombres premiers pour f (cf. §2.4), il s'avère nécessaire d'obtenir une version quantitative de l'équivalence (2.25). En combinant judicieusement des inégalités élémentaires concernant la fonction $\|\cdot\|$, nous montrons qu'il existe $c_1, c_2 > 0$ des nombres réels ne dépendant que de q tels que pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}$

$$c_1\|d_f\alpha\|^2 \leqslant \tau_{f,\alpha} \leqslant c_2\|d_f\alpha\|^2.$$

Nous obtenons ainsi une parfaite généralisation de la proposition 2.1.

Proposition 2.2. *Il existe $c = c(q) > 0$ tel que uniformément pour toute fonction f fortement q-additive et tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $N \geqslant 2$, on a*

$$\sum_{p\leqslant N} \mathrm{e}\big(\alpha f(p) + \beta p\big) = O\Big((\log N)^3 N^{1-c\|d_f\alpha\|^2}\Big). \tag{2.26}$$

Cette nouvelle majoration permet assez facilement de montrer (cf. théorème 3 de [67]) que pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $m \geqslant 2$,

$$\mathscr{G}_{f,a,m} \text{ contient une infinité de nombres premiers} \iff (a, d_f, m) = 1,$$

et que dans ce cas, on a pour $N \to +\infty$ avec $r = (d_f, m)$,

$$\sum_{\substack{p\leqslant N \\ p\in\mathscr{G}_{f,a,m}}} 1 \sim \frac{r}{\varphi(r)} \frac{\pi(N)}{m}.$$

La présence du terme linéaire $p\beta$ dans (2.26) peut ensuite être exploitée pour établir certaines propriétés de l'ensemble $\mathscr{G}_{f,a,m}$.

1. Le critère de Weyl énonce qu'une suite $\{u_n\}_{n\geqslant 1}$ de nombres réels est équirépartie modulo 1 si et seulement si pour tout $h \in \mathbb{Z}^*$,

$$\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N} \mathrm{e}(hu_n) = o(N) \quad (N \to +\infty).$$

   Par ailleurs, un résultat classique stipule que pour tout $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, la suite $\{\beta p\}_p$ est équirépartie modulo 1. Nous déduisons de ces deux résultats et de (2.26) que pour tout nombre irrationnel β, la suite $\{\beta p\}_{p\in\mathscr{G}_{f,a,m}}$ est équirépartie modulo 1 (cf. théorème 4 de [67]).
2. La majoration (2.26) employée avec $\beta \in \mathbb{Q}$ permet d'étudier la répartition des nombres premiers de $\mathscr{G}_{f,a,m}$ dans les progressions arithmétiques (cf. théorème 5 de [67]).

3. L'uniformité en β de la majoration (2.26) permet d'obtenir un raffinement du théorème de Vinogradov pour le problème de Goldbach ternaire. En partant de l'identité

$$\sum_{\substack{p\leqslant N\\ p_1+p_2+p_3=N\\ \forall j,\, p_j\in\mathscr{G}_{f,a,m}}} 1 = \int_0^1 \Big(\sum_{\substack{p\leqslant N\\ p\in\mathscr{G}_{f,a,m}}} \mathrm{e}(\beta p)\Big)^3 \mathrm{e}(-N\beta)d\beta,$$

on peut montrer sous l'hypothèse supplémentaire $(d_f, m) = 1$, que tout nombre impair suffisamment grand peut s'écrire sous la forme $N = p_1+p_2+p_3$ où p_1, p_2, p_3 sont trois nombres premiers appartenant à $\mathscr{G}_{f,a,m}$ (c'est un cas particulier du théorème 6 de [67]).

En théorie, le théorème 2.3 doit permettre d'établir des résultats similaires pour des ensembles automatiques de la forme

$$\{n \geqslant 1 \,:\, f_1(n) \equiv a_1 \bmod m_1, \dots, f_k(n) \equiv a_k \bmod m_k\}$$

où $f_1, \dots, f_k$ sont des fonctions fortement q-additives. Mais cette situation générale fait surgir trop de complications arithmétiques et nous nous contentons dans le théorème 1 de [65] de traiter le cas où $f_j = |\cdot|_j$ avec $1 \leqslant j < q$.

Pour $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_{q-1}) \in (\mathbb{N}^*)^{q-1}$ et $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{q-1}) \in \mathbb{Z}^{q-1}$, posons

$$\mathcal{K}_{\mathbf{a},\mathbf{m}} = \{n \in \mathbb{N}^* \,:\, |n|_1 \equiv a_1 \bmod m_1, \dots, |n|_{q-1} \equiv a_{q-1} \bmod m_{q-1}\}.$$

L'obtention d'une formule asymptotique pour $\mathrm{card}\{p \leqslant N \,:\, p \in \mathcal{K}_{\mathbf{a},\mathbf{m}}\}$ passe par une nouvelle analyse de la contrainte

$$\sum_{1\leqslant k<q} k|n|_k = s_q(n) \equiv n \bmod q-1,$$

et de ses répercussions dans le traitement analytique du problème. Précisément, il s'agit dans l'identité

$$\mathrm{card}\{p \leqslant N \,:\, p \in \mathcal{K}_{\mathbf{a},\mathbf{m}}\} = \frac{1}{m_1 \dots m_{q-1}} \sum_{\substack{0\leqslant j_1<m_1\\ \vdots\\ 0\leqslant j_{q-1}<m_{q-1}}} S(j_1, \dots, j_{q-1}),$$

où l'on a posé

$$S(j_1, \dots, j_{q-1}) = \mathrm{e}\Big(-\sum_{1\leqslant k<q} \frac{j_k a_k}{m_k}\Big) \sum_{p\leqslant N} \mathrm{e}\Big(\sum_{1\leqslant k<q} \frac{|p|_k j_k}{m_k}\Big),$$

de distinguer les termes $S(j_1, \dots, j_{q-1})$ qui contribuent au terme principal de ceux qui contribuent au terme d'erreur.

2.4 Propriétés locales des nombres premiers

Les résultats exposés dans cette section concernent des généralisations et des variantes du théorème 2.2 dont il me paraît utile de donner au préalable une idée générale de la démonstration.

2.4.1 Les méthodes de Bassily-Kátai et Drmota-Mauduit-Rivat

Commençons par décrire brièvement la méthode de Bassily-Kátai pour obtenir (2.8), dont le théorème 2.2 est une version locale. Elle consiste à obtenir une estimation des moments normalisés de s_q le long de la suite des nombres premiers : pour tout $d \geqslant 1$, $N \to +\infty$, on a

$$\frac{1}{\pi(N)} \sum_{p \leqslant N} \Big(\frac{s_q(p) - \mu_q \log_q N}{\sqrt{\sigma_q^2 \log_q N}} \Big)^d \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u^d e^{-\frac{1}{2}u^2} du, \tag{2.27}$$

soit une convergence vers le moment d'ordre d d'une loi normale centrée réduite. Le théorème dit de la méthode des moments [5] permet d'en déduire (2.8) immédiatement. Pour établir (2.27), la méthode de Bassily-Kátai consiste à modéliser $s_q = \sum_j \varepsilon_j$ sur $\{p \leqslant N\}$ muni de la probabilité uniforme par

$$Z = \sum_{0 \leqslant j \leqslant \log_q N} X_j$$

où $\{X_j\}_j$ est une famille de variables aléatoires indépendantes et de loi uniforme sur l'ensemble $\{0, \dots, q-1\}$. Il s'agit alors de montrer que la loi de $\{\varepsilon_j\}_j$ est sufffisamment bien approchée par celle de $\{X_j\}_j$, donc de comparer pour $\ell_1, \dots, \ell_d \in \{0, \dots, q-1\}$,

$$\frac{1}{\pi(N)} \operatorname{card}\{p \leqslant N \,:\, \varepsilon_{j_1}(p) = \ell_1, \dots, \varepsilon_{j_d}(p) = \ell_d\} \tag{2.28}$$

à $1/q^d$. Cela évoque le résultat (2.16) obtenu par Bourgain. Mais ici, il est nécessaire d'obtenir pour (2.28) une formule asymptotique très précise et cela peut s'avérer problématique si certains indices j sont proches de $\log_q N$. De même on souhaite éviter le cas où des indices j sont proches de 0, ce qui relèverait de la répartition des nombres premiers en progressions arithmétiques. Un procédé élémentaire montre que dans la perspective d'établir (2.27), on peut toujours se

5. Soit $\{X_n\}_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires possédant des moments de tout ordre et soit X une variable aléatoire dont la loi est déterminée par ses moments (c'est le cas de la loi normale). Si pour tout $d \geqslant 1$, $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(X_n^d) = \mathbb{E}(X^d)$ alors $\{X_n\}_{n \geqslant 1}$ converge en loi vers X.

ramener à la situation où dans (2.28) les indices $j_1, \ldots, j_d$ sont dans un intervalle du type $[(\log_q N)^\nu, \log_q N - (\log_q N)^\nu]$ avec $0 < \nu < 1$. Par ailleurs, rappelons que le nombre entier d est ici fixé.

Pour $\ell \in \{0, ..., q-1\}$, on a

$$\varepsilon_j(p) = \ell \Leftrightarrow \Big\{\frac{p}{q^{j+1}}\Big\} \in \Big[\frac{\ell}{q}, \frac{\ell+1}{q}\Big[.$$

On peut ainsi « lisser » la condition $\varepsilon_j(p) = \ell$ en approchant $\mathbb{1}_{[\ell/q,(\ell+1)/q[}(\{t\})$ par une série trigonométrique absolument convergente $\sum_{h\in\mathbb{Z}} c_{h,j,\ell}\, \mathrm{e}(ht)$ dont les coefficients satisfont à

$$c_{h,j,\ell} \in [0,1] \quad \text{et} \quad \sum_{\ell=0}^{q-1} c_{h,j,\ell} = 1. \tag{2.29}$$

Finalement le problème est ramené à l'estimation de sommes d'exponentielles de la forme

$$\sum_{p\leqslant N} \mathrm{e}\Big(\frac{Ap}{Q}\Big)$$

avec $(A, Q) = 1$ et $e^{(\log N)^\nu} \ll Q \ll N e^{-(\log N)^\nu}$, sommes pour lesquelles on dispose d'une excellente majoration, grâce au travail fondamental de Vinogradov sur les sommes de ce type.

Esquissons également la démonstration du théorème 2.2 de Drmota-Mauduit-Rivat. Partant de

$$\mathrm{card}\{p \leqslant N \,:\, s_q(p) = k\} = \int_0^1 \Big(\sum_{n\leqslant N} \mathrm{e}(\alpha s_q(p))\Big)\mathrm{e}(-k\alpha)d\alpha$$

on applique la méthode du col. Les points cols sont les points $\{\frac{k}{q-1}\}_{k=0}^{q-1}$ et la majoration (2.12), uniforme en α, permet de montrer que pour $A = (\log N)^{\eta-1/2}$ avec $\eta > 0$, on a

$$\begin{aligned}&\mathrm{card}\{p \leqslant N \,:\, s_q(p) = k\}\\ &\qquad = \sum_{k=0}^{q-1} \int_{|\alpha-\frac{k}{q-1}|\leqslant A} \Big(\sum_{p\leqslant N} \mathrm{e}(\alpha s_q(p))\Big)\mathrm{e}(-k\alpha)d\alpha + O\Big(\frac{\pi(N)}{\log N}\Big).\end{aligned}$$

La relation $s_q(n) \equiv n \bmod q-1$ montre que le calcul des intégrales $\int_{|\alpha-\frac{k}{q-1}|\leqslant A}$ se ramène à celui de

$$\begin{aligned}&\int_{|\alpha|<A} \Big(\sum_{n\leqslant N} \mathrm{e}(\alpha s_q(p))\Big)\mathrm{e}(-k\alpha)d\alpha\\ &\qquad = \frac{1}{2\pi\sigma_q\sqrt{\log_q N}} \int_{|t|<A'} \Big(\sum_{p\leqslant N} e^{it\frac{s_q(p)-\mu_q \log_q N}{\sigma_q\sqrt{\log_q N}}}\Big) e^{it\frac{\mu_q \log_q N - k}{\sigma_q\sqrt{\log_q N}}}\, dt,\end{aligned}$$

par changement de variables. On interprète alors la quantité

$$\frac{1}{\pi(N)}\sum_{p\leqslant N} e^{it\frac{s_q(p)-\mu_q\log_q N}{\sigma_q\sqrt{\log_q N}}},$$

comme la fonction caractéristique de la variable aléatoire $W = \frac{s_q-\mu_q\log_q N}{\sigma_q\sqrt{\log_q N}}$ sur l'espace $\{p \leqslant N\}$ muni de la probabilité uniforme. Grâce à la formule de Taylor, approcher cette fonction caractéristique par celle d'une loi normale centrée réduite revient à obtenir une formule asymptotique pour les moments d'ordre d de W, uniformément pour des valeurs de d n'excédant pas $(\log_q N)^{\kappa}$ avec $\kappa > 0$: pour ce faire, on emploie la méthode de Bassily-Kátai décrite précédemment, mais en tenant du fait que d peut varier avec N ce qui complique la tâche.

2.4.2 Nouvelles lois locales le long des nombres premiers

Une fois la proposition 2.2 obtenue, il est assez facile de généraliser le théorème 2.2 à toute fonction f fortement q-additive : la démonstration esquissée plus haut fonctionne de la même manière, à ceci près que $f = \sum_j f(\varepsilon_j)$ est maintenant modélisée par la variable aléatoire $Z_f = \sum_j f(X_j)$. Dans l'article [68], nous nous sommes fixés un objectif plus ambitieux que cette simple généralisation, à savoir établir une loi locale pondérée pour les fonctions fortement q-additives : c'est l'objet du §2.4.3.

Tout comme dans le §2.3, le théorème 2.3 permet en théorie d'étudier la loi locale jointe de fonctions fortement q-additives le long des nombres premiers au voisinage des valeurs moyennes de ces fonctions mais nous ne traitons dans [65] que le cas des fonctions $|\cdot|_j$. Par exemple, nous fournissons une formule asymptotique pour

$$\operatorname{card}\{p \leqslant N \,:\, |p|_1 = b_1, \ldots, |p|_{q-1} = b_{q-1}\} \tag{2.30}$$

lorsque $(b_1, \ldots, b_{q-1}) \in \mathbb{N}^{q-1}$ est proche $(\frac{\log_q N}{q}, \ldots, \frac{\log_q N}{q})$ (cf. théorème 2 de [65]). Cela s'obtient là aussi en généralisant la démarche exposée au §2.4.1. On applique cette fois la méthode du col à une intégrale multiple. Il convient dans un premier temps d'identifier correctement les points cols, ce qui revient encore une fois à décrypter le rôle de la relation $\sum_k\ k|n|_k \equiv n \bmod q-1$ dans ce problème. Pour estimer la contribution des voisinages des points cols, on met en œuvre une méthode de Bassily-Kátai multidimensionnelle. Le théorème 3 de [65] est une application parlante de la formule asymptotique obtenue pour (2.30) : il énonce en particulier qu'il y a une infinité de nombres premiers p tels que pour tout $0 \leqslant i, j < q$, $\big||p|_i - |p|_j\big| \leqslant 1$. Ce résultat s'obtient en adaptant la preuve du théorème 1.2 de [33].

2.4.3 Analogue d'un théorème de Fouvry-Mauduit pour les nombres premiers

Dans [68], nous obtenons une nouvelle application du théorème 2.3, plus élaborée que celles décrites jusqu'à présent. Il s'agit ici de mettre en œuvre une méthode de Bassily-Kátai avec poids, et cela va nécessiter l'introduction d'un nouvel argument de nature probabiliste. L'article [68] traite des fonctions fortement q-additives en général, mais je limite ici la discussion au cas de s_q. Rappelons la notation

$$\mathscr{M} := \{n \in \mathbb{N}^* \,:\, s_q(n) = \lfloor \mu_q \log_q n \rfloor\},$$

et l'estimation

$$\operatorname{card}\{n \leqslant N \,:\, n \in \mathscr{M}\} \asymp \frac{N}{\sqrt{\log N}}. \tag{2.31}$$

Dans [36], Fouvry et Mauduit établissent un résultat d'équirépartition modulo 1 pour les nombres entiers n dont la somme des chiffres est proche de la valeur moyenne $\mu_q \log_q n$ en un sens que je ne précise pas ici. Leurs méthodes permettent de montrer le résultat suivant.

Théorème 2.4 (Fouvry-Mauduit, 2005). *Pour tout $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, la suite $(\beta n)_{n \in \mathscr{M}}$ est équirépartie modulo 1.*

En vue d'établir que ce résultat reste valable le long de la suite des nombres premiers, nous avons établi dans [68] une version pondérée du théorème 2.2.

Théorème 2.5 (Martin-Mauduit-Rivat, 2016). *Pour tout $\varepsilon > 0$, on a uniformément pour tout $k \geqslant 1$, $\beta \in \mathbb{R}$, $N \geqslant 2$,*

$$\sum_{\substack{p \leqslant N \\ s_q(p) = k}} \mathrm{e}(\beta p) = \Big(\sum_{p \leqslant N} \mathrm{e}(\beta p)\Big) \frac{e^{-\frac{(k - \mu_q \log_q N)^2}{2\sigma_q^2 \log_q N}}}{\sqrt{2\pi\sigma_q^2 \log_q N}} + O_\varepsilon\Big(\frac{\pi(N)}{(\log N)^{1/2-\varepsilon}}\Big). \tag{2.32}$$

À l'aide du critère de Weyl, et du fait que la suite $\{\beta p\}_p$ est équirépartie modulo 1 pour tout nombre irrationnel β, on peut déduire de (2.32) le résultat espéré.

Corollaire. *Pour tout $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, la suite $\{\beta p\}_{p \in \mathscr{M}}$ est équirépartie modulo 1.*

La formule (2.32) comporte néanmoins un aspect décevant : lorsque β est proche d'un nombre rationnel à grand dénominateur (autrement dit β est sur un arc mineur pour reprendre la terminologie de la méthode du cercle), on s'attend à ce que la somme

$$\sum_{\substack{p \leqslant N \\ s_q(p) = k}} \mathrm{e}(\beta p)$$

soit nettement plus petite que le terme d'erreur $O_\varepsilon\Big(\frac{\pi(N)}{(\log N)^{1/2-\varepsilon}}\Big)$. En particulier cette formule est insuffisante pour établir que tout nombre impair suffisamment grand est somme de trois nombres premiers p appartenant à $\mathscr{M}$. De nouvelles idées semblent requises pour obtenir un tel résultat.

La démonstration de (2.32) est difficile. La stratégie est décrite en détails dans [68, §2], je ne l'évoque ici que brièvement. On utilise la méthode de Drmota-Mauduit-Rivat exposée au §2.4.1 et la difficulté survient au moment d'appliquer la méthode de Bassily-Kátai, lors de l'évaluation des moments pondérés [6]

$$M_d = \sum_{p\leqslant N} \mathrm{e}(\beta p)\Big(\frac{s_q(p)-\mu_q\log_q N}{\sigma_q\sqrt{\log_q N}}\Big)^d.$$

En développant la puissance d, on est ramené à l'estimation de

$$\sum_{\substack{p\leqslant N\\ \varepsilon_{j_1}(p)=\ell_1,\ldots,\varepsilon_{j_d}(p)=\ell_d}} \mathrm{e}(\beta p), \tag{2.33}$$

où $\ell_1,\ldots,\ell_d \in \{0,\ldots,q-1\}$ et $j_1<\ldots<j_d$. Le lissage des conditions digitales conduit à approcher (2.33) par

$$\sum_{h_1,\ldots,h_d\in\mathbb{Z}} c_{h_1,j_1,\ell_1}\cdots c_{h_d,j_d,\ell_d}\, S_N\Big(\beta+\frac{h_1}{q^{j_1+1}}+\ldots+\frac{h_d}{q^{j_d+1}}\Big) \tag{2.34}$$

où l'on a posé pour $\gamma\in\mathbb{R}$,

$$S_N(\gamma)=\sum_{p\leqslant N}\mathrm{e}(\gamma p),$$

et où les coefficients $c_{h,j,\ell}$ ont été introduits au §2.4.1. On souhaite à présent obtenir une formule asymptotique pour (2.34) afin d'en déduire une formule asymptotique pour M_d. Lorsque $\beta\neq 0$, la difficulté vient de ce qu'on ne peut pas déduire des bonnes approximations diophantiennes de β celles de ses translatés

$$\beta+\frac{h_1}{q^{j_1+1}}+\ldots+\frac{h_d}{q^{j_d+1}}.$$

Un argument élémentaire permet de montrer qu'il y a au plus un de ces translatés, noté $\widetilde{\beta}$, pour lequel la contribution de $S_N(\widetilde{\beta})$ peut être substantielle. Ensuite, le point clef de notre méthode consiste à utiliser (2.29) pour interpréter $\{c_{h,j,\ell}\}_{\ell=0}^{q-1}$ comme le germe d'une loi de probabilité uniforme sur $\{0,\ldots,q-1\}$. Cela permet d'obtenir pour M_d une formule asymptotique faisant intervenir des familles

6. En réalité nous considérons les moments pondérés d'une version tronquée de s_q.

paramétrées de variables aléatoires indépendantes ; et *in fine* de mener les calculs à bien. La mise en œuvre de cette méthode exige des considérations assez techniques. Une partie non négligeable du travail consiste à analyser la combinatoire à l'œuvre dans les différentes représentations d'un nombre $m/2^j$ avec $(m,2)=1$ sous la forme
$$\frac{h_1}{2^{j_1+1}}+\ldots+\frac{h_d}{2^{j_d+1}}$$
avec $h_1,\ldots,h_d\in\mathbb{Z}$ et $j_1<\ldots<j_d$.

Chapitre 3

Équations fonctionnelles liées à la transformation de Gauss

Dans tout ce chapitre, on désigne par $\{x\}$ la partie fractionnaire du nombre réel x, soit $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Rappelons que la fonction zêta de Riemann est définie pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(s) > 1$ par

$$\zeta(s) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^s}.$$

Elle admet un unique prolongement méromorphe au plan complexe avec un unique pôle en $s = 1$. L'hypothèse de Riemann est l'assertion, ni prouvée ni infirmée à ce jour, selon laquelle tous les zéros de ζ situés dans le demi-plan $\Re(s) > 0$ ont pour partie réelle $1/2$.

3.1 Le critère de Nyman et la fonction d'autocorrélation de la partie fractionnaire

En 1955, Beurling suggère que la formule

$$\int_0^\infty \{t\} \frac{dt}{t^{s+1}} = -\frac{\zeta(s)}{s},$$

valable pour $0 < \Re(s) < 1$, doit permettre de formuler toute propriété remarquable de la fonction ζ en termes d'une propriété satisfaite par la fonction partie fractionnaire. En 1950, Nyman [77] avait obtenu dans sa thèse dirigée par Beurling un résultat de cet ordre pour l'hypothèse de Riemann. Dans l'espace de Hilbert $H = L^2\big(]0;\infty[, \frac{dt}{t^2}\big)$, considérons la famille de fonctions $(e_\alpha)_{\alpha>0}$ définie par

$$e_\alpha(t) = \left\{\frac{t}{\alpha}\right\}.$$

Le critère de Nyman (cf. introduction de [4]) peut s'énoncer sous la forme suivante : l'hypothèse de Riemann est équivalente à l'assertion

$$\chi := \mathbb{1}_{[1,\infty[} \in \overline{\mathrm{Vect}(e_\alpha,\ \alpha \geqslant 1)}^H.$$

On peut alors introduire

$$D(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \mathrm{dist}_H\Big(\chi, \mathrm{Vect}(e_{\alpha_1}, \ldots, e_{\alpha_n})\Big),$$

de sorte que l'hypothèse de Riemann est aussi équivalente à l'assertion

$$\inf D(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$$

où l'infimum est pris sur tous les choix possibles de $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geqslant 1$. Or d'après une formule classique de géométrie dans un espace de Hilbert, on a

$$D(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^2 = \frac{\mathrm{Gram}(e_{\alpha_1}, \ldots, e_{\alpha_n}, \chi)}{\mathrm{Gram}(e_{\alpha_1}, \ldots, e_{\alpha_n})}, \tag{3.1}$$

où pour une famille de n vecteurs $u_1, \ldots, u_n$, $\mathrm{Gram}(u_1, \ldots, u_n) := \det\big(\langle u_i, u_j\rangle\big)_{i,j}$ est le déterminant de Gram-Schmidt. Deux types de coefficients apparaissent dans les déterminants de Gram-Schmidt figurant dans la formule (3.1), à savoir $\langle e_\alpha, \chi\rangle$ et $\langle e_\alpha, e_\beta\rangle$ avec $\alpha, \beta \geqslant 1$. Le comportement analytique de $\alpha \mapsto \langle e_\alpha, \chi\rangle$ est clair puisqu'un calcul direct fournit

$$\langle e_\alpha, \chi\rangle = \int_1^\infty \Big\{\frac{t}{\alpha}\Big\}\frac{dt}{t^2} = \frac{\log\alpha + 1 - \gamma}{\alpha},$$

où γ est la constante d'Euler. L'étude des coefficients $\langle e_\alpha, e_\beta\rangle$ est plus délicate. Un changement de variables donne la formule

$$\langle e_\alpha, e_\beta\rangle = \int_0^\infty \Big\{\frac{t}{\alpha}\Big\}\Big\{\frac{t}{\beta}\Big\}\frac{dt}{t^2} = \frac{1}{\alpha}A\Big(\frac{\alpha}{\beta}\Big),$$

avec

$$A(x) = \int_0^\infty \{t\}\{xt\}\frac{dt}{t^2} \quad (x \geqslant 0). \tag{3.2}$$

En 2005, Báez-Duarte, Balazard, Landreau et Saias [4] initient l'étude de la fonction A qu'ils nomment *fonction d'autocorrélation multiplicative de la partie fractionnaire*. Pour étudier le comportement local de A, ils établissent une identité reliant la fonction A à la fonction 1-périodique et continue définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi_2(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{B_2(nx)}{n^2}$$

où $B_2(t) = \{t\}^2 - \{t\} + 1/6$ est la deuxième fonction de Bernoulli. Ils obtiennent que pour tout $x > 0$,

$$A(x) = \frac{\varphi_2(x)}{2x} + H(x),$$

où $H :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable. L'étude du comportement local de A est donc en partie ramenée à celle de φ_2.

Considérons pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_1(x) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{B_1(nx)}{n}, \tag{3.3}$$

où B_1 est la première fonction de Bernoulli normalisée définie par

$$B_1(t) = \begin{cases} \{t\} - \frac{1}{2} & \text{si } t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il existe des nombres $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels la série $\varphi_1(x)$ est divergente mais on peut néanmoins démontrer de manière élémentaire qu'elle converge presque partout, en tout point x rationnel, et dans $L^2(0, 1)$. Comme

$$\varphi_2(x) = 2 \int_0^x \varphi_1(t) dt + \frac{\zeta(2)}{6}, \tag{3.4}$$

la fonction φ_2 (et par conséquent A) est absolument continue, donc presque partout dérivable. Báez-Duarte *et al.* établissent la relation asymptotique

$$\varphi_2\Big(\frac{p}{q} + h\Big) - \varphi_2\Big(\frac{p}{q}\Big) \sim \frac{1}{q} |h| \log(|h|) \quad (h \to 0), \tag{3.5}$$

valable pour tous $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $(p, q) = 1$, et en déduisent la relation

$$A\Big(\frac{p}{q} + h\Big) - A\Big(\frac{p}{q}\Big) \sim \frac{1}{2p} |h| \log(|h|) \quad (h \to 0). \tag{3.6}$$

En particulier, en tout nombre rationnel, les fonctions A et φ_2 ne sont pas dérivables et admettent un maximum local strict. Báez-Duarte *et al.* posent deux questions :

Question 1. *En quels nombres irrationnels les fonctions A et φ_2 sont-elles dérivables ?*

Question 2. *La fonction A admet-elle d'autres extrema locaux ?*

3.2 Détermination des points de dérivabilité de φ_2

Dans ce paragraphe, je présente la stratégie que nous avons suivie avec M. Balazard pour répondre à la question 1.

3.2.1 La fonction de Wilton

Il est tentant, au vu de (3.4), d'énoncer la conjecture suivante :
(3.7)
$$\text{« pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_2 \text{ est dérivable en } x \Leftrightarrow \text{ la série } \varphi_1(x) \text{ est convergente,}$$

et dans ce cas on a $\varphi_2'(x) = 2\varphi_1(x)$ ». Cette conjecture est fausse pour les nombres x rationnels d'après (3.5). Qu'en est-il pour les nombres irrationnels ? Cela soulève pour commencer le problème de déterminer les points de convergence irrationnels de la série $\varphi_1(x)$. Cette question a été résolue dans [15].

Proposition 3.1 (La Bretèche-Tenenbaum, 2004)**.** *Pour tout nombre x irrationnel, la série $\varphi_1(x)$ est convergente si et seulement si la série alternée*

$$\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k \frac{\log q_{k+1}(x)}{q_k(x)}, \tag{3.8}$$

où $\{q_k(x)\}_{k\geqslant 1}$ désigne la suite des dénominateurs des fractions réduites de x, est convergente.

On peut facilement montrer que la série (3.8) converge pour tout nombre irrationnel x admettant un exposant d'irrationnalité finie (cf. définition (3.19)). En particulier elle converge presque partout.

La série (3.8) a un comportement très similaire à celui d'une autre série d'aspect plus technique, qui avait été introduite par Wilton pour l'étude de la convergence ponctuelle de la série de Fourier de φ_1 – problème sur lequel nous reviendrons au §3.4. Pour définir cette nouvelle série, nous introduisons l'ensemble

$$X =]0,1[\backslash\mathbb{Q}$$

et la transformation de Gauss

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & X & \to & X \\ & x & \mapsto & \left\{\frac{1}{x}\right\}. \end{array} \tag{3.9}$$

Le théorème fondamental de Ryll-Nardzewski [83] stipule que α laisse invariante la mesure dite de Gauss $d\mu(x) = \frac{1}{\log 2}\frac{dx}{1+x}$ sur $[0,1]$. Cela revient à dire que
(3.10)
$$\forall f \in L^1([0,1]), \quad f\circ\alpha \in L^1([0,1]) \quad \text{et} \quad \int_0^1 f(\alpha(x))d\mu(x) = \int_0^1 f(x)d\mu(x).$$

Nous pouvons définir par récurrence les itérées de α en posant pour tout $x \in X$,

$$\alpha_0(x) = x \text{ et pour } k \geqslant 1,\ \alpha_k(x) = \alpha(\alpha_{k-1}(x)).$$

Rappelons que la suite $\{a_k(x)\}_{k\geqslant 0}$ des quotients partiels de x est alors donnée par $a_0(x) = 0$ et $a_k(x) = \lfloor 1/\alpha_{k-1}(x)\rfloor$ pour $k \geqslant 1$, et que si $\{p_k(x)/q_k(x)\}_{k\geqslant 0}$ désigne la suite des fractions réduites de x, on a pour tout $k \geqslant 0$, avec la notation habituelle,

$$\frac{p_k(x)}{q_k(x)} = [a_0(x); a_1(x), \ldots, a_k(x)] := \cfrac{1}{a_1(x) + \cfrac{1}{a_2(x) + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{k-1}(x) + \cfrac{1}{a_k(x)}}}}}.$$

Posons à présent $\beta_{-1}(x) = 1$ et pour $k \geqslant 0$,

$$\beta_k(x) = \alpha_0(x) \ldots \alpha_k(x) \tag{3.11}$$

ainsi que

$$\gamma_k(x) = \beta_{k-1}(x) \log(1/\alpha_{k-1}(x)).$$

On peut montrer que pour tout $x \in X$, l'écart $\gamma_k(x) - \frac{\log q_{k+1}(x)}{q_k(x)}$ est le terme général d'une série absolument convergente de sorte que la série (3.8) et la série

$$W(x) := \sum_{k\geqslant 0} (-1)^k \gamma_k(x) \tag{3.12}$$

convergent et divergent simultanément. La série (3.12) converge donc presque partout et définit une fonction W que l'on prolonge à $\mathbb{R}$ par 1-périodicité. Nous l'avons nommée fonction de Wilton en hommage au mathématicien J. Wilton qui l'a introduite (cf. §3.4). Nous appelons *nombres de Wilton* les nombres irrationnels x tels que la série $W(\{x\})$ est convergente. La fonction W est localement intégrable et satisfait pour presque tout $x \in X$ à l'équation fonctionnelle

$$W(x) + xW(\alpha(x)) = \log(1/x), \tag{3.13}$$

qui est voisine d'une équation fonctionnelle satisfaite par φ_1 (cf. proposition 8 de [4]) : on a pour presque tout $x \in]0, 1[$,

$$\varphi_1(x) + x\varphi_1(\alpha(x)) = \log(1/x) + F(x), \tag{3.14}$$

où F est une fonction continue sur $[0, 1]$. Le théorème de Ryll-Nardzewski peut permettre, à partir de (3.13) et (3.14), de trouver assez rapidement une relation valable presque partout entre φ_1 et W. Nous obtenons (cf. théorème 2 de [7]) un résultat plus précis.

Proposition 3.2. *La fonction $G = \varphi_1 + \frac{1}{2}W$, initialement définie en tout nombre de Wilton, admet un prolongement à $\mathbb{R}$, qui est borné, 1-périodique, continu en tout point irrationnel et admet une limite à gauche et à droite en tout point rationnel.*

Il en découle immédiatement que les fonctions $\varphi_2 : x \mapsto 2\int_0^x \varphi_1(t)dt + \frac{\zeta(2)}{6}$ et

$$\Upsilon : x \mapsto \int_0^x W(t)dt \tag{3.15}$$

ont les mêmes points de dérivabilité sur X. La proposition (3.2) est obtenue à partir d'une *équation fonctionnelle approchée* pour les sommes partielles de la série $\varphi_1(x)$. Nous reviendrons sur ce concept au §3.4.

3.2.2 Deuxième étape : étude du comportement local moyen de W et de la fonction de Brjuno

Nous sommes ainsi ramenés à la recherche des points de dérivabilité de Υ définie en (3.15). Comme les fonctions γ_k sont positives, un problème *a priori* plus simple est de déterminer les points de dérivabilité de la fonction Ψ définie sur $[0,1]$ par

$$\Psi(x) = \int_0^x \Phi(t)dt,$$

où l'on a posé pour tout $x \in X$,

$$\Phi(x) = \sum_{k \geqslant 0} \gamma_k(x). \tag{3.16}$$

La série (3.16) converge presque partout, dans $L^1(]0,1[)$, et la fonction Φ ainsi définie satisfait à l'équation fonctionnelle

$$\Phi(x) - x\Phi(\alpha(x)) = \log(1/x).$$

Il se trouve que la fonction Φ, prolongée à $\mathbb{R}$ par 1-périodicité, n'est autre que la fonction de Brjuno [1] qui joue un rôle clef dans l'étude du système dynamique engendré par les itérations d'une fonction holomorphe au voisinage d'un point fixe (cf. [92]). La régularité de Φ a depuis fait l'objet de plusieurs investigations (voir notamment [62, 20, 22]). On dit qu'un nombre irrationnel $x \in \mathbb{R}$ est un *nombre de Brjuno* si la série $\Phi(\{x\})$ est convergente. Dans [6], nous étudions avec M. Balazard le comportement local moyen des fonctions γ_k sur un intervalle I de $]0,1[$ et nous

1. Elle est aussi appelée fonction de Brjuno-Yoccoz par certains auteurs.

en déduisons que la fonction Ψ est dérivable en $x \in X$ si et seulement si x est un nombre de Brjuno. Dans ce cas, on a même lorsque $\rho \to 0$,

$$\int_{x-\rho/2}^{x+\rho/2} |\Phi(t) - \Phi(x)|dt = o(\rho), \tag{3.17}$$

autrement dit x est un point de Lebesgue de la fonction Φ. Nous reviendrons plus tard sur la technique employée pour évaluer $\int_I \gamma_k(x)dx$ où I est un intervalle de longueur ρ.

Les techniques développées pour étudier localement la fonction de Brjuno s'avèrent tout aussi adaptées pour étudier la fonction de Wilton, et nous obtenons que pour tout $x \in X$, Υ est dérivable en x si et seulement si x est un nombre de Wilton. Nous parvenons finalement à la conclusion suivante dans [7].

Théorème 3.1 (Balazard-Martin, 2013)**.** *Soit x un nombre irrationnel positif. Les fonctions A et φ_2 sont dérivables en x si et seulement x est un nombre de Wilton.*

Remarque. *La Bretèche et Tenenbaum ont obtenu dans [18] une nouvelle preuve du théorème 3.1, plus directe puisque leur démarche consiste à déterminer directement les points de dérivabilité de φ_2 en évitant le recours à la fonction W.*

3.3 Analyse multifractale de la fonction de Brjuno

En avril 2013, S. Jaffard a remarqué lors d'un exposé au séminaire Cristolien d'Analyse Multifractale de Paris 12 que combinés à des calculs de coefficients d'ondelette, nos résultats obtenus avec M. Balazard sur la fonction de Brjuno devraient permettre de réaliser une étude multifractale de la fonction Φ. De quoi s'agit-il ?

Étant donnée une fonction localement bornée f, définie disons sur $\mathbb{R}$ et à valeur complexes, on définit pour chaque point x l'exposant de Hölder $h_f(x)$ comme étant la borne supérieure des nombres β tels qu'il existe $C > 0$ et un polynôme P de degré n'excédant pas β tels que pour $|t - x|$ suffisamment petit, on a

$$|f(t) - P(t-x)| \leqslant C|t-x|^\beta.$$

Il est intéressant de considérer pour tout $\beta \in \mathbb{R}$ les ensembles de niveaux

$$H_f(\beta) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, h_f(x) = \beta\}.$$

Pour certaines fonctions, l'exposant de Hölder varie erratiquement d'un point à un autre et les ensembles $H_f(\beta)$ peuvent présenter une structure fractale [2]. On rencontre de telles fonctions dans la modélisation de certains phénomènes physiques

2. Il n'existe pas de définition précise mais on parle d'ensemble fractal en présence d'un ou plusieurs « signes distinctifs »tels que : invariance de la structure par changement d'échelle, dimension de Hausdorff strictement supérieure à la dimension topologique, géométrie complexe.

(cf. par exemple chapitre 9 de [54]). Réaliser l'analyse multifractale d'une fonction f consiste à calculer pour chaque ensemble $H_f(\beta)$ sa dimension de Hausdorff que l'on note $d_f(\beta)$. On appelle spectre multifractal de f l'application $d_f : \beta \to d_f(\beta)$. Bien qu'il n'existe pas de définition unanimement reconnue, certains auteurs considèrent qu'une fonction f est multifractale lorsque l'image de d_f n'est pas un ensemble discret. C'est le cas de la fonction dite de Riemann

$$\xi(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(\pi n^2 x)}{n^2}$$

connue pour n'être dérivable qu'aux nombres rationnels p/q avec $(p,q)=1$ et p et q tous deux impairs. Jaffard [52] a montré en 1996 que le spectre multifractal de ξ est donné par

$$d_\xi(\beta) = \begin{cases} 4\beta - 2 & \text{si } \beta \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}], \\ 0 & \text{si } \beta = \frac{3}{2}, \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

C'est dans ce contexte que s'inscrit notre travail avec S. Jaffard sur la fonction Φ de Brjuno. Cependant, comme Φ n'est bornée sur aucun intervalle non vide, l'exposant de Hölder au sens usuel est inadapté. Aussi considérons-nous l'exposant de Hölder L^1 introduit par Calderón et Zygmund [21] en 1961 dans un autre contexte, et qui concerne les fonctions f localement intégrables : pour $x \in \mathbb{R}$, on définit $h^1_f(x)$ comme étant la borne supérieure des nombres réels β tels qu'il existe $C > 0$ et un polynôme P de degré n'excédant pas β tels que pour ρ suffisamment petit, on a

$$\frac{1}{2\rho} \int_{x-\rho}^{x+\rho} |f(t) - P(t-x)| dt \leqslant C\rho^\beta. \tag{3.18}$$

Dans [53], nous déterminons avec S. Jaffard l'exposant $h^1_\Phi(x)$ en tout point $x \in \mathbb{R}$. Le résultat fait intervenir l'exposant d'irrationnalité d'un nombre x irrationnel défini par

$$\tau(x) = \sup\left\{\tau \geqslant 0 : \text{il existe une infinité de couples } (p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*, \left|x - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^\tau}\right\}. \tag{3.19}$$

D'après le théorème de Dirichlet sur les approximations diophantiennes, on a $\tau(x) \geqslant 2$ pour tout x irrationnel. Par ailleurs, un résultat classique stipule que pour presque tout x, on a $\tau(x) = 2$.

Théorème 3.2 (Jaffard-Martin, 2016). *Soit $x \in \mathbb{R}$. On a*

$$h^1_\Phi(x) = \begin{cases} 0 & \textit{si } x \in \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{\tau(x)} & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Un théorème classique de géométrie fractale dû à Jarnik permet de déduire immédiatement du théorème 3.2 que le spectre multifractal de Φ est donné par

$$d_\Phi(\beta) = \begin{cases} 2\beta & \text{si } \beta \in [0, 1/2], \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Outre que ce résultat établit de nouveaux liens entre l'analyse multifractale, la dynamique holomorphe et la théorie des nombres, son originalité vient de ce qu'il existe peu de fonctions déterministes présentant un comportement multifractal dont on sait calculer le spectre. De plus les cas traités dans la littérature sont souvent des exemples *ad hoc*, c'est-à-dire qui ont été précisément construits dans le but d'exhiber une fonction très irrégulière ; il en est ainsi de la fonction ξ (pour d'autres exemples, je renvoie à la bibliographie de [53]).

Nous donnons à la fin de l'article [53] quelques perspectives de recherche de difficulté variable liées à ce travail. En particulier l'extension de nos résultats aux fonctions généralisées de Brjuno, étudiées en particulier par Marmi-Moussa-Yoccoz [62], constitue un objectif en principe abordable. Un travail certainement plus ambitieux consiste à réaliser l'analyse multifractale de la partie réelle de la fonction de Brjuno complexe construite par Marmi-Moussa-Yoccoz [63] dont Φ est la partie imaginaire.

3.3.1 Précisions sur le comportement moyen de la fonction de Brjuno

Dans ce paragraphe, je donne davantage de détails sur la manière dont nous avons étudié dans [6] et [53] le comportement local moyen de Φ. Du fait de la représentation (3.16), il s'agit d'estimer des intégrales du type

$$\int_I \gamma_k(t)dt \tag{3.20}$$

où I est un intervalle de $]0, 1[$ de longueur ρ, ρ ayant vocation à tendre vers 0. Il est utile à ce stade de remarquer que

$$\gamma_k(t) = (-1)^k \big(q_{k-1}(t)t - p_{k-1}(t)\big) \log\Big(\frac{p_{k-1}(t) - tq_{k-1}(t)}{q_k(t)t - p_k(t)}\Big).$$

L'estimation de l'intégrale (3.20) est donc particulièrement simple si dans l'intervalle I les fonctions q_j, p_j sont constantes pour tout $j \leqslant k$. Or les parties de $]0, 1[$ satisfaisant à cette propriété sont précisément les intervalles ouverts d'extrémités

$$[0; a_1, \ldots, a_k] \quad \text{et} \quad [0; a_1, \ldots, a_k + 1].$$

Ces derniers sont connus sous divers noms dans la littérature : intervalles fondamentaux d'ordre k, cylindres d'ordre k ou plus récemment cellules de profondeur k, terminologie que nous avons introduite [3] avec M. Balazard.

Il est alors naturel de considérer, étant donné un intervalle I de $]0,1[$, le plus grand nombre entier $K = K(I)$ tel que I est inclus dans une cellule de profondeur K : on dit que l'intervalle I est de profondeur K. On peut établir la majoration $|\gamma_k'(t)| \leqslant Cq_{k+1}(t)$. Donc pour $k < K$, $|\gamma_k'(t)| \leqslant Cq_{k+1}$, où q_{k+1} est la valeur constante prise par $t \mapsto q_{k+1}(t)$ sur I. On peut ainsi appliquer directement le théorème des accroissement finis et obtenir que pour tout $x \in I$, $k < K$, on a $\int_I |\gamma_k(t) - \gamma_k(x)|dt \ll \rho^2 q_{k+1}$. Lorsque $k = K$, ce raisonnement n'est plus valable mais on peut tout de même montrer que $\int_I \gamma_K(t)dt$ est majoré par un multiple constant de $\rho\gamma_K(x)$ où x est le milieu de l'intervalle I.

Lorsque $k > K$, il nous faut procéder autrement. En gros, nous découpons l'intervalle suivant les cellules $\mathfrak{c}$ de profondeur $K+1$ dont l'intersection avec I est non vide, puis, grâce au théorème de Ryll-Nardzewski sous la forme (3.10), nous ramenons l'estimation de $\int_{\mathfrak{c}} \gamma_k(t)dt$ à celle de $\int_{]0,1[} \gamma_0(t)dt$ $(= \int_0^1 \log(1/u)du = 1)$.

Finalement on parvient aux estimations suivantes, pour l'essentiel obtenues dans [6] mais auxquelles j'incorpore les améliorations établies dans [53].

Proposition 3.3. *Soit $x \in X$, $0 < \rho < e^{-2}$ tels que $x - \rho/2$ et $x + \rho/2$ soient irrationnels. Soit $I =]x - \rho/2, x + \rho/2[$ et K la profondeur de I. Il existe une constante $C > 0$ absolue telle que pour $K \geqslant 1$, on a*

$$\forall k < K, \int_I |\gamma_k(t) - \gamma_k(x)|dt \leqslant Cq_{k+1}\rho^2 \tag{3.21}$$

$$\int_I |\gamma_K(t) - \gamma_K(x)|dt \leqslant Cq_{K+1}(x)\rho^2 \log(q_{K+1}(x)) \tag{3.22}$$

$$\forall k > K, \int_I \gamma_k(t)dt \leqslant C\frac{\rho}{F_{k-K}}\Big(\frac{\log(1/\rho)}{q_{K+1}(x)} + \rho^{1/2}\Big), \tag{3.23}$$

où F_k est le k-ième nombre de Fibonacci ($F_0 = F_1 = 1$ et $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$ pour $k \geqslant 2$).

Pour exploiter ces majorations, et en déduire par exemple que tout nombre de Brjuno est un point de Lebesgue de Φ, il suffit de disposer d'estimations reliant la fraction continue de x à la distance de x aux extrêmités de la cellule d'ordre k qui le contient (cf. proposition 4 de [6]).

Parlons à présent du calcul de l'exposant $h^1_\Phi(x)$. Obtenir une minoration de $h^1_\Phi(x)$ consiste à démontrer que Φ est suffisamment régulière en moyenne au voisi-

3. Sans doute n'était-ce pas nécessaire ! Cependant le terme de cellule nous semble particulièrement parlant.

nage de x. Par exemple, lorsque x est irrationnel et tel que $\tau(x) < \infty$, la proposition 3.3 permet d'obtenir la minoration $h^1_\Phi(x) \geqslant 1/\tau(x)$.

Pour obtenir une majoration de $h^1_\Phi(x)$, l'idée est de s'inspirer de la contraposée d'un principe bien connu d'analyse : la transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ tend d'autant plus rapidement vers 0 en l'infini que f est plus régulière. On souhaite établir puis utiliser une version locale d'un tel résultat. Un moyen d'y parvenir consiste à calculer un coefficient d'ondelettes pour f. Partant d'une fonction $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrable, à support compact, bornée par 1 et d'intégrale nulle sur $\mathbb{R}$, dite « ondelette mère », on considère la famille d'ondelettes $\{H_{a,b}\}_{a\in]0,\infty[,b\in\mathbb{R}}$ définie par

$$H_{a,b}(t) = H\Big(\frac{t-b}{a}\Big) \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Le coefficient d'ondelette d'une fonction localement intégrable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ selon $H_{a,b}$ est définie par

$$C_f(a,b) = \frac{1}{a}\int_{\mathbb{R}} f(t)H_{a,b}(t)dt.$$

En ajustant les valeurs de a et b relativement à un nombre x donné, on peut établir des résultats établissant que $C_f(a,b)$ est d'autant plus petit que f est plus régulière en x. Déjà en germe dans l'article [43] de Hardy sur la dérivabilité de ξ, ce procédé a été formalisé dans les années quatre-vingt-dix par Jaffard, qui montre en outre que sous certaines conditions (régularité globale de f ou régularité de H, cf. [51] et [52]), on peut obtenir des énoncés réciproques du type : f est d'autant plus régulière en x que $C_f(a,b)$ est plus petit. L'emploi de coefficients d'ondelettes constitue maintenant une technique standard de l'analyse multifractale (cf. chapitre 10 de [54]). Dans le cadre du calcul de l'exposant de Hölder au sens L^1, on peut facilement montrer, par exemple, que si $0 < \beta \leqslant 1$, $0 < \rho < 1$ et $\mathrm{supp}(H_{a,b}) \subset]x-\rho, x+\rho[$, alors

$$h^1_f(x) > \beta \Longrightarrow |C_f(a,b)| \leqslant \frac{\rho^{1+\beta}}{a}. \tag{3.24}$$

Et justement une formule asymptotique pour $\int_r^{r+\rho} \Phi(t)dt$ avec $r \in \mathbb{Q}$ obtenue avec M. Balazard (proposition 12 de [6]) fournit directement une estimation de certains coefficients d'ondelettes de Φ lorsque H est l'ondelette dite de Haar, soit $H = \mathbb{1}_{[0,1/2[} - \mathbb{1}_{[1/2,1[}$: pour tout $r = p/q \in \mathbb{Q}$ avec $(p,q) = 1$, $\rho > 0$ suffisamment petit, on a

$$C_\Phi(\rho, r) = \frac{\log 2}{q} + \big(q\rho\log(1/(q^2\rho))\big).$$

Cette formule, appliquée aux points $r_k = \frac{p_k(x)}{q_k(x)}$ et à des valeurs judicieuses de ρ, puis combinée au lemme 1 de [53] (qui est un raffinement de (3.24)), permet d'aboutir à la majoration $h^1_\Phi(x) \leqslant \frac{1}{\tau(x)}$ pour tout x irrationnel, en convenant que $\frac{1}{\infty} = 0$.

3.4 Équations fonctionnelles approchées liées à la transformation de Gauss

3.4.1 Méthode de l'équation fonctionnelle approchée

Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions définies sur une partie A de $\mathbb{R}$, à valeurs complexes, bornées et 1-périodiques. L'étude de l'ordre de grandeur, ou de la convergence lorsque $v \to \infty$ des sommes partielles

$$f(x,v) = \sum_{1\leqslant n\leqslant v} f_n(x)$$

pour $x \in A$ fixé, peut s'avérer particulièrement ardue lorsque la suite $\{f_n(x)\}_{n\geqslant 1}$ est oscillante. La somme partielle

$$\varphi_1(x,v) = \sum_{1\leqslant n\leqslant v} \frac{B_1(nx)}{n} \tag{3.25}$$

en est un bon exemple. Dans quelques cas bien spécifiques, il arrive que l'on soit capable d'établir une identité liant $f(x,v)$ et $f(T(x),v')$ où T est une application de $]0,1[$ dans lui-même et v' s'exprime en fonction de x et de v. Cette identité comporte généralement un terme d'erreur, ce qui lui confère le nom d'équation fonctionnelle approchée. Le cas où T est la transformation de Gauss α définie en (3.9) est particulièrement présent dans la littérature. On rencontre notamment des identités du type

$$f(x,v) + \kappa(x) f(\alpha(x), x^a v) = g(x) + O(x^{-b}v^{-c}), \tag{3.26}$$

ou encore

$$f(x,v) + \kappa(x)\overline{f(\alpha(x), x^a v)} = g(x) + O(x^{-b}v^{-c}),$$

où κ et g sont des fonctions définies sur $]0,1[$, à valeurs complexes, où a,b,c sont des nombres réels tels que $a > 0$ et $b,c \geqslant 0$. Pour étudier l'ordre de grandeur de $f(x,v)$ pour $x \in X$ fixé, la méthode consiste à appliquer (3.26) aux points $x, \alpha(x), \ldots, \alpha_K(x)$ avec $K \geqslant 1$ et donc d'obtenir des relations entre les nombres $\{f(\alpha_k, v_k)\}_{0\leqslant k\leqslant K}$ où l'on a posé $\alpha_k = \alpha_k(x)$ et $v_k = \beta_{k-1}(x)^a v$ (rappelons la définition de β_k en (3.11)). Par combinaison on obtient une relation entre $f(x,v)$ et $f(\alpha_K, v_K)$. Comme la suite (v_k) est strictement décroissante, on peut ensuite choisir $K = K(x,v)$ tel que $v_K < 1 \leqslant v_{K-1}$ de sorte que la somme partielle $f(\alpha_K, v_K) = \sum_{n\leqslant v_K} f_n(\alpha_K)$ ne contienne aucun terme. On aboutit à l'identité

$$f(x,v) = \sum_{0\leqslant j\leqslant K} \kappa_j \beta_{j-1} g(\alpha_j) + O\Big(v^{-c} \sum_{0\leqslant j\leqslant K} \kappa_j \alpha_j^{-b} \beta_{j-1}^{-ac}\Big)$$

avec $\kappa_j = \kappa(\alpha_{j-1}(x))\dots\kappa(\alpha(x))\kappa(x)$. L'ordre de grandeur de $f(x,v)$ est ainsi directement relié au développement en fraction continue de x. Lorsque $f(x,v)$ converge pour presque tout $x \in X$ lorsque $v \to +\infty$, on espère obtenir un énoncé du type : « pour tout $x \in X$, $f(x,v)$ admet une limite $f(x)$ quand $v \to \infty$ si et seulement la série $h(x) = \sum_{j\geqslant 0} \kappa_j\beta_{j-1}g(\alpha_j)$ est convergente, et dans ce cas on a $f(x) = h(x)$ ». Souvent la fonction g est de la forme $g = g_1 + g_2$ où $g_1 :]0,1[\to \mathbb{C}$ présente une singularité en 0 tandis que $g_2 : [0,1] \to \mathbb{C}$ est continue et l'on peut ainsi raffiner la conclusion, par exemple obtenir des propriétés de régularité de la fonction $f - \sum_{j\geqslant 0} \kappa_j\beta_{j-1}g_1(\alpha_j)$.

Cette méthode a été développée par Hardy et Littlewood en 1914 dans l'article [44] où sont traitées les sommes partielles de

$$\theta(x,v) = \sum_{1\leqslant n\leqslant v} \exp(i\pi n^2 x),$$

et certaines variantes. Ils établissent l'équation fonctionnelle approchée suivante : pour tous $0 < x < 1$, $v > 0$, on a

$$\theta(x,v) - \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{x}}\,\overline{\theta(\alpha(x),xv)} = O(\sqrt{1/x}). \tag{3.27}$$

La méthode de Hardy et Littlewood a été reprise dans les vingt années qui ont suivi par plusieurs de leurs contemporains (cf. [26, 74, 78, 88]) puis plus récemment par Rivoal et ses co-auteurs (cf. [80, 81, 82]).

En fait, le plus point le plus délicat dans la méthode de l'équation fonctionnelle approchée est en général l'obtention d'une telle équation. Certaines sont le reflet d'une équation fonctionnelle satisfaite par une fonction analytique et peuvent ainsi être obtenues par une méthode d'intégration complexe où les détails calculs sont souvent délicats. C'est le cas de l'équation fonctionnelle approchée de Hardy-Littlewood qui renvoie à l'équation fonctionnelle classique de la fonction Thêta de Jacobi

$$\theta(z) := \sum_{n\geqslant 1} e^{i\pi n^2 z} = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{z}}\,\theta(-1/z).$$

D'autres équations fonctionnelles approchées peuvent être obtenues plus simplement à partir d'identités élémentaires. On peut par exemple déduire d'une identité géométrique dûe à Sylvester en 1860 une équation fonctionnelle approchée pour $\varphi_1(x,v)$ (cf. [4, p. 223]) : il existe une fonction $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, telle que pour tout $v > 0$ et $x \in [0,1[$ tels que $xv \geqslant 1$, on a

$$\varphi_1(x,v) + x\varphi_1(\alpha(x),xv) = -\frac{1}{2}\log(1/x) + F(x) + O\big((xv)^{-1}\big). \tag{3.28}$$

Un autre exemple d'équation fonctionnelle approchée est dû à Wilton [89]. La fonction φ_1 appartient à $L^2([0,1])$ et sa série de Fourier est donnée par

$$\psi_1(x) = -\frac{1}{\pi}\sum_{n\geqslant 1}\frac{d(n)}{n}\sin(2\pi nx),$$

où $d(n)$ est le nombre de diviseurs de n. Ce dernier résultat s'obtient rapidement en insérant dans la définition de $\varphi_1(x)$ le développement en série de Fourier

$$B_1(x) = -\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin(2\pi nx)}{\pi n}$$

valable pour tout $x \in \mathbb{R}$ puis en réarrangeant les sommations (cf. [4, p. 222]). On peut montrer que la série $\psi_1(x)$ converge presque partout (c'est par exemple une conséquence du théorème de Carleson). En 1931, Walfisz [87] obtient que $\psi_1(x)$ converge pour tout nombre x algébrique. Deux ans plus tard, Wilton détermine l'ensemble des points de convergence irrationnels de $\psi_1(x)$ en établissant une équation fonctionnelle approchée pour

$$\psi_1(x,v) = \sum_{n\leqslant v}\frac{d(n)\sin(2\pi nx)}{n}.$$

Il obtient – cf. §3.4.3 – qu'il existe une fonction continue $\widetilde{F} : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $0 < x < 1$, $v > 0$ tel que $x^2v \geqslant 1$, on a

$$\psi_1(x,v) + x\psi_1(\alpha(x), x^2v) = -\tfrac{1}{2}\log(1/x) + \widetilde{F}(x) + O((x^2v)^{-1/5}). \tag{3.29}$$

Les deux équations (3.28) et (3.29) sont comme on le voit très similaires. La méthode d'itération décrite plus haut permet de déterminer les points de convergence irrationnels de $\varphi_1(x)$ (donc de retrouver la proposition 3.1) et $\psi_1(x)$ (c'est le résultat de Wilton, retrouvé en 2004 par La Bretèche et Tenenbaum par une toute autre méthode) : pour tout $x \in X$,

$$\begin{aligned}\text{la série } \varphi_1(x) \text{ est convergente} &\iff \text{la série } \psi_1(x) \text{ est convergente}\\ &\iff x \text{ est un nombre de Wilton.}\end{aligned}$$

On obtient de plus que pour tout nombre de Wilton x, on a

$$\varphi_1(x) = -\tfrac{1}{2}W(x) + G(x) \quad \text{et} \quad \psi_1(x) = -\tfrac{1}{2}W(x) + \widetilde{G}(x), \tag{3.30}$$

avec pour tout $x \in X$,

$$G(x) = \sum_{k\geqslant 0}(-1)^k\beta_{k-1}(x)F(\alpha_k(x)) \quad \text{et} \quad \widetilde{G}(x) = \sum_{k\geqslant 0}(-1)^k\beta_{k-1}(x)\widetilde{F}(\alpha_k(x)). \tag{3.31}$$

La continuité de F (resp. $\widetilde{F}$) permet de montrer que la fonction G (resp. $\widetilde{G}$) est bien définie et admet un prolongement à $[0,1]$ qui est borné, continu en tout nombre irrationnel, et admet une limite à gauche et à droite en tout nombre rationnel que l'on peut exprimer en fonction de $F(0)$ et $F(1)$ (resp. $\widetilde{F}(0)$ et $\widetilde{F}(1)$). Pour φ_1, cela correspond à la proposition 3.2.

3.4.2 Sur un théorème de La Bretèche-Tenenbaum

Un problème intéressant consiste à déterminer en quels points φ_1 est somme de sa série de Fourier, autrement dit à identifier les nombres x tels que $\varphi_1(x) = \psi_1(x)$. Chowla et Walfisz (Hilfsatz 14 de [24]) ont montré en 1935 que cette identité est valide pour tout nombre x algébrique.

Cette question s'inscrit dans une problématique plus générale formulée par Davenport en 1937 : étant données deux fonctions $f, g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ liées par la relation de convolution $f(n) = \sum_{d|n} g(d)$, quand l'identité formelle

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{g(n)}{n} B_1(nx) \tag{3.32}$$

$$\Big(= - \sum_{m,n\geqslant 1} \frac{\sin(2\pi mnx)}{\pi mn} \Big)$$

$$= -\frac{1}{\pi} \sum_{k\geqslant 1} \frac{f(k)}{k} \sin(2\pi kx) \tag{3.33}$$

prend-elle un sens analytique, autrement dit pour quelles valeurs de x, les séries (3.32) et (3.33) sont-elles convergentes et de même somme ? Ce problème d'analyse s'avère extrêmement ardu. En s'appuyant sur la méthode de Vinogradov [86] pour estimer des sommes d'exponentielles, Davenport [28] parvient à traiter le cas où $g = \mu$, la fonction de Möbius. Près de 70 ans plus tard, La Bretèche et Tenenbaum [15] ont développé un cadre général, fondé sur l'emploi des nombres entiers friables, qui permet de traiter le cas de plusieurs couples (f, g) pour lesquels la méthode de Davenport était inopérante, notamment le couple $(f, g) = (d, \mathbb{1})$ [4] dont les séries correspondantes ne sont autres que $\varphi_1(x)$ et $\psi_1(x)$.

Théorème 3.3 (La Bretèche-Tenenbaum, 2004)**.** *Pour tout nombre x de Wilton, on a l'identité*

$$\varphi_1(x) = \psi_1(x).$$

Oskolkov [79] obtint peu après une nouvelle démonstration de ce résultat. Voyons comment les résultats obtenus plus haut permettent d'en déduire une troisième. Compte tenu des identités (3.30) et (3.31), il suffit de démontrer que les

4. $\mathbb{1}(n) = 1$ pour tout $n \geqslant 1$.

fonctions F et $\widetilde{F}$ coïncident. Or c'est chose relativement facile : comme les séries $\varphi_1(x)$ et $\psi_1(x)$ convergent et ont même somme presque partout, il suffit de faire tendre v vers l'infini dans (3.28) et (3.29) pour obtenir que pour presque tout x,

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{2}\log(1/x) + F(x) &= \varphi_1(x) + x\varphi_1(1/x) \\ &= \psi_1(x) + x\psi_1(1/x) = -\tfrac{1}{2}\log(1/x) + \widetilde{F}(x). \end{aligned}$$

Donc $F = \widetilde{F}$ presque partout, et comme F et $\widetilde{F}$ sont continues, on aboutit bien à l'identité $F = \widetilde{F}$. Finalement dans cette nouvelle démonstration de l'identité $\psi_1 = \varphi_1$, le seul point non élémentaire est, comme nous le verrons, l'obtention de l'équation fonctionnelle (3.29).

Plus généralement, il serait intéressant de déterminer si d'autres identités de Davenport peuvent être obtenues par ce procédé, dont la portée semble toutefois moindre que le cadre développé par La Bretèche et Tenenbaum dans [15]. Toute la difficulté réside dans l'obtention d'équations fonctionnelles approchées pour les sommes partielles

$$\sum_{n\leqslant v} \frac{g(n)B_1(nx)}{n} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{\pi}\sum_{n\leqslant v} \frac{f(n)\sin(2\pi nx)}{n}.$$

Aucune méthode générale ne semble se dégager. Il serait par exemple intéressant d'obtenir une équation fonctionnelle approchée pour $\sum_{n\leqslant v} \frac{d(n)B_1(nx)}{n}$.

Terminons ce paragraphe en donnant une dernière application de la formule $\varphi_1 = -\frac{1}{2}W + G$ assorties des propriétés de G (cf. proposition 3.2). Les techniques développées dans l'article [53] (cf. §3.3) permettent également de montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h_W^1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{\tau(x)} & \text{si } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$$

La formule $\varphi_1 = -\frac{1}{2}W + G$ permet de montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h_{\varphi_1}^1(x) = h_W^1(x)$. On doit certainement pouvoir retrouver ce résultat plus directement à partir des estimations obtenues par La Bretèche et Tenenbaum dans [18].

Remarque. *La formule $\varphi_1 = -\frac{1}{2}W + G$ a aussi été récemment exploitée par Maier et Rassias (cf. [59, 60, 61]) afin d'estimer pour tout nombre réel $k > 0$ le moment*

$$\int_0^1 |\varphi_1(t)|^k dt,$$

ce dans la perspective d'étudier la répartition des sommes de Vassiounine

$$c_0(a/q) = -\sum_{m1}^{q-1} \frac{m}{q}\cot\left(\frac{\pi m a}{q}\right) \quad (1 \leqslant a \leqslant q, (a,q) = 1)$$

(voir également à ce sujet le travail de Bettin [10]).

3.4.3 Sur l'équation fonctionnelle approchée de Wilton

Dans [89], Wilton obtient une équation fonctionnelle approchée pour les sommes partielles de la série

$$\psi(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{d(n)}{n} \exp(2i\pi nx)$$

dont il déduit (3.29) et le critère de convergence pour $\psi_1(x)$ énoncé au §3.4. Posons pour $v > 0$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$\psi(x,v) = \sum_{n\leqslant v} \frac{d(n)}{n} \exp(2i\pi nx).$$

Théorème 3.4 (Wilton, 1933). *Il existe une fonction $\mathfrak{F} : [0,1] \to \mathbb{C}$ continue telle que pour tout $C \geqslant 2$, on a uniformément pour tout $0 < x \leqslant 1$, $v > 0$ tel que $x^2 v \geqslant C$,*

(3.34)

$$\psi(x,v) + x\overline{\psi(1/x, x^2 v)} = \tfrac{1}{2}\log^2(1/x) + (\gamma - \log(2\pi) + \tfrac{i\pi}{2})\log(1/x) + \mathfrak{F}(x) + R(x,v),$$

avec $R(x,v) \ll_C (x^2 v)^{-1/5}$.

Le point de départ de Wilton pour établir (3.34) est la formule sommatoire de Voronoï : pour tout $v \geqslant 1$, $v \notin \mathbb{N}$, $f : [1,v] \to \mathbb{C}$ de classe C^2, on a

$$\text{(3.35)}\quad \sum_{1\leqslant n\leqslant v} d(n)f(n) = \frac{f(1)}{2} + \int_1^v (\log t + 2\gamma) f(t)dt + \sum_{n=1}^{\infty} d(n)\int_1^v f(t)w(nt)dt,$$

où w, dont nous omettons ici la définition précise, s'exprime en termes de fonctions de Bessel. Wilton obtient ensuite la formule uniforme pour $x > 0$ et $n \geqslant 1$,

$$\int_0^\infty w(nt)\frac{1-e^{2i\pi xt}}{t}dt = -\frac{x}{n}e^{-2i\pi n/x} + O\Big(\frac{x^2}{n^2}\Big).$$

Les détails de ce calcul nécessitent des interversions d'intégrales assez délicates à justifier. La conclusion de la démonstration de (3.34) fait intervenir le comportement en 0 et en l'infini de certaines fonctions de Bessel.

Avec la perspective d'obtenir une nouvelle démonstration du théorème 3.3, nous souhaitions avec M. Balazard déterminer une expression explicite pour la fonction $\mathfrak{F}$ en particulier pour sa partie imaginaire – on peut finalement se passer d'une telle expression, cf. §3.4.2. Après avoir dans un premier temps repris et explicité certains calculs de Wilton, nous nous sommes finalement orientés vers l'élaboration d'une nouvelle démonstration du théorème 3.4. Notre méthode, exposée dans [8], conduit à l'amélioration

$$R(x,v) \ll_C \frac{\log^2(2+x^2v)}{\sqrt{x^2v}}.$$

Nous parvenons également à exprimer $\mathfrak{F}$ en fonction de la fonction d'autocorrélation A définie en (3.2).

Contrairement à Wilton, nous n'utilisons pas la formule de Voronoï. Nous faisons intervenir la transformée de Mellin-Plancherel pour des fonctions de l'espace $L^2(0,\infty)$ de manière à exprimer $\psi(x,v)$ en fonction d'une intégrale sur la droite critique $\Re(s)=1/2$. Cette intégrale fait assez naturellement intervenir ζ^2 (qui n'est autre que la série de Dirichlet associée à d). Ainsi, comparer $\psi(x,v)$ et $x\psi(1/x,x^2v)$ revient en quelque sorte à comparer $\zeta(s)^2$ et $\zeta(1-s)^2$: ce renseignement est fourni par l'équation fonctionnelle de ζ. Les détails techniques font intervenir des majorations d'intégrales trigonométriques. Finalement l'amélioration du terme d'erreur $R(x,v)$ découle de l'emploi d'une estimation due à Ingham du comportement en moyenne quadratique de ζ sur la droite critique.

Le calcul de $\mathfrak{F}$ est réalisé dans un second temps, à partir de la relation

$$\psi(x) + x\overline{\psi(1/x)} = \mathfrak{F}(x) + \tfrac{1}{2}\log^2(1/x) + (\gamma - \log(2\pi) + \tfrac{i\pi}{2})\log(1/x)$$

valable presque partout, et qui se déduit de (3.34) en faisant tendre v vers l'infini. Si le calcul de $\Im(\mathfrak{F})$ découle rapidement de résultats obtenus dans [4], celui de $\Re(\mathfrak{F})$ est particulièrement délicat et repose sur des calculs faisant intervenir conjointement les transformées de Mellin-Plancherel et de Hilbert.

3.5 Autour d'une conjecture de Chowla

Revenons à la deuxième question posée par Báez-Duarte *et al.* concernant l'existence d'un nombre irrationnel en lequel la fonction A atteindrait un extremum local. La question se pose également pour φ_2. D'après ce qui précède, lorsque x est un nombre de Wilton, φ_2 est dérivable en x et $\varphi_2'(x) = 2\varphi_1(x)$. Donc si x est un nombre de Wilton et $\varphi_1(x) \neq 0$, alors x n'est pas un extremum local de φ_1. Cela soulève la difficile question de déterminer les points d'annulation de la fonction φ_1.

Voilà quel a été le point de départ d'une discussion avec S. Bettin. Nous nous sommes finalement écartés de la question de départ et nous sommes intéressés à un problème posé par Chowla dans les années 1950 qui a donné lieu à d'intéressants travaux. Nous obtenons dans [11] des résultats qui généralisent un théorème de Chowla-Siegel. Les techniques employées y sont bien différentes de ce qui a été exposé jusqu'à présent : l'analyse cède ici largement la place à l'algèbre linéaire et à quelques éléments de théorie de Galois et de théorie de la transcendance.

Dans les années 1950, Chowla émet la conjecture suivante.

Conjecture 1. *Soit p un nombre premier et $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ tel que*

1) f est p-périodique,

2) $f(0) = 0$,

3) $\sum_{n=1}^{p} f(n) = 0$.

Si $f \neq 0$ alors $L(1, f) := \sum_{n\geqslant 1} \dfrac{f(n)}{n} \neq 0.$

Remarque. *Cette conjecture est à rapprocher d'une autre, attribuée à Erdős et encore ouverte qui s'énonce ainsi. Soit $q \geqslant 2$ un nombre entier et $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tel que*

1) f est q-périodique,

2) $f(0) = 0$ et $f(1), \ldots, f(q-1) \in \{-1, 1\}$,

3) $\sum_{n=1}^{p} f(n) = 0$.

Si $f \neq 0$ alors $L(1, f) \neq 0$.

En 1964, Chowla reproduit dans [23] une démonstration due à Siegel de la conjecture 1 dans le cas particulier où f est *impaire* (condition qui entraîne automatiquement $f(0) = 0$ et $\sum_{n=1}^{p} f(n) = 0$). En 1970, Chowla [25] en obtient une nouvelle démonstration.

Proposition 3.4 (Chowla-Siegel)**.** *Soit p un nombre premier et $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ tel que f est p-périodique et impaire. Si $f \neq 0$ alors $L(1, f) \neq 0$.*

Appliqué à la fonction $f(n) = B(an/p)$, ce résultat entraîne que $\varphi_1(a/p)$ est non nul pour tout $p \geqslant 3$ et $1 \leqslant a < p$. Trois ans plus tard, Baker, Birch et Wirsing [5] obtiennent une démonstration complète de la conjecture de Chowla et traitent même une situation plus générale. Dans la suite, nous notons $\overline{\mathbb{Q}}$ le corps des nombres algébriques et posons

$$\xi_p = e^{2i\pi/p}.$$

Théorème 3.5 (Baker-Birch-Wirsing, 1973)**.** *Soit $f : \mathbb{Z} \to \overline{\mathbb{Q}}$ et p un nombre premier tels que*

1) f est p-périodique,

2) $\mathbb{Q}(f(0), f(1), \ldots, f(q-1)) \cap \mathbb{Q}(\xi_q) = \mathbb{Q}$,

3) $f(n) = 0$ pour tout n tel que $1 < (n, q) < q$,

4) $\sum_{n=1}^{p} f(n) = 0$.

Si $f \neq 0$ *alors* $L(1, f) \neq 0$.

L'hypothèse 2) revient à dire que le polynôme cyclotomique d'ordre q est irréductible sur $\mathbb{Q}(f(0), f(1), \ldots, f(q-1))$. Cette hypothèse intervient assez naturellement dans la démonstration et Baker *et al.* ont montré que si elle est omise, la conclusion du théorème est en défaut.

Une conséquence rapide et intéressante du théorème 3.5 est la suivante : si $(q, \varphi(q)) = 1$, alors les nombres $\{L(1, \chi)\}$ où χ parcourt l'ensemble des caractères non principaux modulo q sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Remarquons également que le théorème 3.5 établit la conjecture d'Erdős évoquée plus haut dans le cas particulier où q est premier. En revanche, il ne permet pas de conclure quant à la non-annulation de $\varphi_1(a/q)$ pour $q \geqslant 3$.

Par ailleurs, le théorème 3.5 contient l'assertion selon laquelle pour tout caractère de Dirichlet χ non principal de module q, on a $L(1, \chi) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{\chi(n)}{n} \neq 0$. En fait cette assertion est requise dans la démonstration de ce théorème. De même, la démonstration de la proposition 3.4 repose sur la non-annulation des $L(1, \chi)$ pour tout χ impair.

Outre la non-annulation de $\prod_{\chi \text{ impair}} L(1, \chi)$, les démonstrations de Siegel et Chowla de la proposition 3.4 reposent sur des arguments relativement élémentaires. En revanche, celle du théorème 3.5 utilise le théorème de Baker sur les formes linéaires de logarithmes [5], qui énonce que si $x_1, \ldots, x_n$ sont des nombres algébriques non nuls tels que $\log x_1, \ldots, \log x_n$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, alors $\log x_1, \ldots, \log x_n$ sont linéairement indépendants sur $\overline{\mathbb{Q}}$, le corps des nombres algébriques. Le rôle du théorème de Baker dans la démonstration du théorème 3.5 peut être envisagé sous l'angle suivant : il permet de montrer que si $f : \mathbb{Z} \to \overline{\mathbb{Q}}$ satisfait aux hypothèses 1), 3) et 4) du théorème 3.5 et à $L(1, f) = 0$, alors f est impaire. En conséquence, on est essentiellement ramené à la situation déjà traitée par Siegel et Chowla. Je renvoie à [76] où cette stratégie est utilisée pour donner une autre démonstration du théorème 3.5.

Pour tout nombre rationnel r, on a l'identité (cf. § 3.4.2)

$$\varphi_1(r) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{d(n)}{n} \sin(2\pi n r). \tag{3.36}$$

5. Une manière de déceler l'intervention de logarithmes dans ce problème consiste à remarquer qu'avec $\widehat{f}(n) = q^{-1} \sum_{h=0}^{p-1} f(h) \xi_p^{-hn}$, et sous la condition $\sum_{n=0}^{p-1} f(n) = 0$, on a

$$L(1, f) = \sum_{r=1}^{q-1} \widehat{f}(r) \sum_{n \geqslant 1} \frac{\xi_q^{rn}}{n} = \sum_{r=1}^{q-1} \widehat{f}(r) \log(1 - \xi_q^r).$$

Cela nous a amenés avec S. Bettin à poser la question suivante : étant donnée une fonction $f : \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{Q}}$ périodique de période $q \geqslant 2$, quand a-t-on $\sum_{n\geqslant 1} \frac{d(n)f(n)}{n} = 0$? Peut-on retrouver ainsi le fait que $\varphi_1(a/p) \neq 0$ pour $p \geqslant 3$ et $1 \leqslant a < p$?

Plus généralement, nous avons étudié l'annulation de

$$D_k(1, f) := \sum_{n\geqslant 1} \frac{d_k(n)f(n)}{n} \tag{3.37}$$

avec pour $k \in \mathbb{N}^*$, $d_k(n) = \operatorname{card}\{(n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^k \,:\, n_1 \cdots n_k = n\}$. Nous nous sommes cantonnés à l'étude du cas où q est un nombre premier impair. On peut montrer que sous les hypothèses

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{p} f(n) = 0, \tag{3.38}$$

la série (3.37) est bien convergente. Pour $k \geqslant 2$, le théorème de Baker n'est plus suffisant ici pour démontrer que si $f : \mathbb{Z} \to \overline{\mathbb{Q}}$ est p-périodique, vérifie (3.38) et $D_k(1, f) = 0$, alors f est impaire. Néanmoins un argument emprunté à [76] montre que si l'on suppose vérifiée la conjecture de Schanuel [6] alors $D_k(1, f) = 0$ entraîne que f est impaire.

Finalement, étant donné un corps de nombres K tel que $K \cap \mathbb{Q}(\xi_p) = \mathbb{Q}$, nous considérons le K-espace vectoriel

$$V = \{f : \mathbb{Z} \to K \mid f \text{ est } p\text{-périodique, impaire}\}$$

de dimension $(p-1)/2$, et le sous-espace

$$V_0 = \{f \in V \mid D_k(1, f) = 0\}.$$

Le résultat suivant généralise la proposition 3.4.

Théorème 3.6 (Bettin-Martin, 2017)**.**

$$\dim_K(V_0) = 0 \iff (k, p-1) = 1 \ \textit{ou} \ \Big((k, p-1) = 2 \ \textit{et} \ \ p \equiv 3 \bmod 4\Big).$$

De plus si $((k, p-1) = 2$ *et* $p \equiv 1 \bmod 4)$ *ou* $((k, p-1) = 4$ *et* $p \equiv 5 \bmod 8)$*, alors* $\dim_K(V_0) = \frac{p-1}{4}$.

6. La conjecture de Schanuel stipule que si $x_1, \ldots, x_n$ sont des nombres linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, alors le degré de transcendance de $\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_n, e^{x_1}, \ldots, e^{x_n})$ est $\geqslant n$. Elle entraîne notamment que les nombres $\pi, L(1, \chi_1), \ldots, L(1, \chi_s)$, où χ_j parcourt l'ensembles des caractères pairs modulo p, sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Q}$, c'est ce que l'on utilise ici.

Remarque. *L'hypothèse sur K fait que ce résultat ne permet pas de retrouver la non-annulation de φ_1 aux points a/p à partir de l'identité* (3.36) *: l'intersection entre les extensions $\mathbb{Q}(\sin(2\pi/p),\ldots,\sin(2\pi(p-1)/p)$ et $\mathbb{Q}(\xi_p)$ n'est pas triviale.*

Comme pour le cas $k=1$, la dimension de V_0 est intimement liée aux relations de dépendance linéaire entre les nombres $L(1,\chi)^k$ où χ décrit l'ensemble des caractères de Dirichlet impairs modulo p.

Théorème 3.7 (Bettin-Martin, 2017)**.** *Si $(k,p-1)\leqslant 2$ ou $((k,p-1)=4$ et $p\equiv 5 \bmod 8)$ alors les nombres $\{L(1,\chi)^k\}_{\chi \text{ impair}}$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$.*

Pour déterminer la dimension de V_0, nous généralisons la méthode algébrique développée par Chowla dans [25] pour traiter le cas $k=1$. Cela consiste en premier lieu à remarquer que pour $f\in V_0$, $D_k(1,f)$ peut s'écrire comme une somme finie : on a

$$D_k(1,f)=\sum_{1\leqslant r<p} f(r)x_k(r,p)$$

avec pour tout r tel que $(r,p)=1$,

$$x_k(r;p):=\frac{1}{p^k}\sum_{\substack{m_1,\ldots,m_k \bmod p\\ m_1\ldots m_k\equiv r \bmod p}} \cot\left(\tfrac{\pi m_1}{p}\right)\cdots\cot\left(\tfrac{\pi m_k}{p}\right).$$

L'ensemble $\{i^k x_k(r,p)\}_{1\leqslant r<p}$ est stable sous l'action du groupe de Galois G de l'extension $\mathbb{Q}(\xi_p)/\mathbb{Q}$ et on sait même précisément comment G permute ces nombres : cela constitue la clef de la méthode de Chowla. En effet, grâce à l'hypothèse $K\cap\mathbb{Q}(\xi_p)=\mathbb{Q}$, les éléments de G peuvent être prolongés à des automorphismes de $K(\xi_p)$ sur K. En faisant agir G sur l'équation $\sum_{1\leqslant r<p} f(r)x_k(r,p)=0$, on obtient de nouvelles équations en les inconnues $f(r)$, donc un système dont on peut étudier le rang par des calculs de déterminants. Ces déterminants s'expriment comme des produits de combinaisons linéaires des $L(1,\chi)^{k'}$ avec $k'\mid k$, dont on peut dans certains cas garantir qu'elles sont non nulles.

La question se pose de savoir dans quelle mesure le théorème 3.6 peut être étendu à des fonctions q-périodiques impaires avec q non premier (et le théorème 3.7 à des caractères de module q). Des hypothèses supplémentaires telles que $(q,\varphi(q))=1$ devront sans doute être posées.

Bibliographie

[1] K. Alladi – « The Turán-Kubilius inequality for integers without large prime factors », *J. Reine Angew. Math.* **335** (1982), p. 180–196.

[2] J.-P. Allouche & J. Shallit – « The ubiquitous Prouhet-Thue-Morse sequence », in *Sequences and their applications (Singapore, 1998)*, Springer Ser. Discrete Math. Theor. Comput. Sci., Springer, London, 1999, p. 1–16.

[3] — , *Automatic sequences*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003, Theory, applications, generalizations.

[4] L. Báez-Duarte, M. Balazard, B. Landreau & E. Saias – « Étude de l'autocorrélation multiplicative de la fonction 'partie fractionnaire' », *Ramanujan J.* **9** (2005), no. 1-2, p. 215–240.

[5] A. Baker, B. J. Birch & E. A. Wirsing – « On a problem of Chowla », *J. Number Theory* **5** (1973), p. 224–236.

[6] M. Balazard & B. Martin – « Comportement local moyen de la fonction de Brjuno », *Fund. Math.* **218** (2012), p. 193–224.

[7] — , « Sur l'autocorrélation multiplicative de la fonction « partie fractionnaire » et une fonction définie par J. R. Wilton », arXiv :1305.4395v1, 2013.

[8] M. Balazard & B. Martin – « Sur une équation fonctionnelle approchée due à J. R. Wilton », *Mosc. Math. J.* **15** (2015), no. 4, p. 629–652.

[9] N. L. Bassily & I. Kátai – « Distribution of the values of q-additive functions on polynomial sequences », *Acta Math. Hungar.* **68** (1995), no. 4, p. 353–361.

[10] S. Bettin – « On the distribution of a cotangent sum », *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2015), no. 21, p. 11419–11432.

[11] S. Bettin & B. Martin – « On the non-vanishing of certain Dirichlet series », *J. Number Theory* **180** (2017), p. 423–442.

[12] J. Bourgain – « Möbius-Walsh correlation bounds and an estimate of Mauduit and Rivat », *J. Anal. Math.* **119** (2013), p. 147–163.

[13] J. Bourgain – « Prescribing the binary digits of primes, II », *Israel J. Math.* **206** (2015), no. 1, p. 165–182.

[14] R. de la Bretèche, Y. Lamzouri & G. Tenenbaum – « Inégalité de Turán-Kubilius friable et indépendance asymptotique », *https://arxiv.org/abs/1708.04595* (2017).

[15] R. de la Bretèche & G. Tenenbaum – « Séries trigonométriques à coefficients arithmétiques », *J. Anal. Math.* **92** (2004), p. 1–79.

[16] — , « Entiers friables : inégalité de Turán-Kubilius et applications », *Invent. Math.* **159** (2005), no. 3, p. 531–588.

[17] — , « On the friable Turán-Kubilius inequality », in *Analytic and probabilistic methods in number theory*, TEV, Vilnius, 2012, p. 111–117.

[18] — , « Dérivabilité ponctuelle d'une intégrale liée aux fonctions de Bernoulli », *Proc. Amer. Math. Soc.* **143** (2015), p. 4791–4796.

[19] — , « Sur l'inégalité de Turán–Kubilius friable », *J. Lond. Math. Soc. (2)* **93** (2016), no. 1, p. 175–193.

[20] X. Buff & A. Cheritat – « The Brjuno function continuously estimates the size of quadratic Siegel disks », *Annals of Maths.* **164** (2006), p. 265–312.

[21] A.-P. Calderón & A. Zygmund – « Local properties of solutions of elliptic partial differential equations », *Studia Math.* **20** (1961), p. 171–225.

[22] D. Cheraghi & A. Chéritat – « A proof of the Marmi-Moussa-Yoccoz conjecture for rotation numbers of high type », *Invent. Math.* **202** (2015), no. 2, p. 677–742.

[23] S. Chowla – « A special infinite series », *Norske Vid. Selsk. Forh. (Trondheim)* **37** (1964), p. 85–87.

[24] S. D. Chowla & A. Walfisz – « Über eine Riemannsche identität », *Acta. Arithm.* **1** (1935), p. 87–112.

[25] S. Chowla – « The nonexistence of nontrivial linear relations between the roots of a certain irreducible equation », *J. Number Theory* **2** (1970), p. 120–123.

[26] J. G. van der Corput – « Über Summen, die mit den elliptischen ϑ-Funktionen zusammenhängen », *Math. Ann.* **87** (1922), no. 1-2, p. 66–77.

[27] C. Dartyge & G. Tenenbaum – « Sommes des chiffres de multiples d'entiers », *Ann. Inst. Fourier* **55** (2005), no. 7, p. 2423–2474.

[28] H. Davenport – « On some infinite series involving arithmetical functions (II) », *Quart. J . Math. Oxford* **8** (1937), p. 313–320.

[29] — , *Multiplicative number theory*, third éd., Graduate Texts in Mathematics, vol. 74, Springer-Verlag, New York, 2000, revised and with a preface by Hugh L. Montgomery.

[30] J.-M. Deshouillers, M. Drmota & C. Müllner – « Automatic sequences generated by synchronizing automata fulfill the Sarnak conjecture », *Studia Math.* **231** (2015), no. 1, p. 83–95.

[31] M. Drmota – « Subsequences of automatic sequences and uniform distribution », in *Uniform distribution and quasi-Monte Carlo methods*, Radon Ser. Comput. Appl. Math., vol. 15, De Gruyter, Berlin, 2014, p. 87–104.

[32] M. Drmota & P. J. Grabner – « Analysis of digital functions and applications », in *Combinatorics, automata and number theory*, Encyclopedia Math. Appl., vol. 135, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010, p. 452–504.

[33] M. Drmota, C. Mauduit & J. Rivat – « Primes with an Average Sum of Digits », *Compositio* **145** (2009), no. 2, p. 271–292.

[34] M. Drmota, J. Rivat & T. Stoll – « The sum of digits of primes in $\mathbb{Z}[i]$ », *Monatshefte für Mathematik* **155** (2008), p. 317–347.

[35] S. Ferenczi, J. Kułaga-Przymus & M. Lemańczyk – « Sarnak's Conjecture – what's new », *https://arxiv.org/abs/1710.04039* (2017).

[36] E. Fouvry & C. Mauduit – « Sur les entiers dont la somme des chiffres est moyenne », *J. Number Theory* **114** (2005), no. 1, p. 135–152.

[37] E. Fouvry & C. Mauduit – « Méthodes de crible et fonctions sommes des chiffres », *Acta Arithmetica* **77** (1996), no. 4, p. 339–351.

[38] — , « Sommes des chiffres et nombres presques premiers », *Mathematische Annalen* **305** (1996), p. 571–599.

[39] A. O. Gelfond – « Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données », *Acta Arith.* **13** (1967/1968), p. 259–265.

[40] A. Granville – « Smooth numbers : computational number theory and beyond », in *Algorithmic number theory : lattices, number fields, curves and cryptography*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 44, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008, p. 267–323.

[41] G. Hanna – « Sur les occurrences des mots dans les nombres premiers », *Acta Arith.* **178** (2017), no. 1, p. 15–42.

[42] G. Hanrot, B. Martin & G. Tenenbaum – « Constantes de Turán-Kubilius friables : une étude numérique », *Experiment. Math.* **19** (2010), no. 3, p. 345–361.

[43] G. H. Hardy – « Weierstrass's non-differentiable function », *Trans. Amer. Math. Soc.* **17** (1916), no. 3, p. 301–325.

[44] G. H. Hardy & J. E. Littlewood – « Some problems of diophantine approximation », *Acta Math.* **37** (1914), no. 1, p. 193–239.

[45] G. Harman – « Primes with preassigned digits », *Acta Arith.* **125** (2006), no. 2, p. 179–185.

[46] G. Harman & I. Kátai – « Primes with preassigned digits. II », *Acta Arith.* **133** (2008), no. 2, p. 171–184.

[47] A. Hildebrand & G. Tenenbaum – « On integers free of large prime factors », *Trans. Amer. Math. Soc.* (1986), no. 196, p. 265–290.

[48] A. Hildebrand – « An asymptotic formula for the variance of an additive function », *Math. Z.* **183** (1983), no. 2, p. 145–170.

[49] — , « On the number of positive integers $\leqslant x$ and free of prime factors $> y$ », *J. Number Theory* **22** (1986), no. 3, p. 289–307.

[50] A. Hildebrand & G. Tenenbaum – « Integers without large prime factors », *J. Théor. Nombres Bordeaux* **5** (1993), no. 2, p. 411–484.

[51] S. Jaffard – « Exposants de Hölder en des points donnés et coefficients d'ondelettes », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **308** (1989), no. 4, p. 79–81.

[52] S. Jaffard – « The spectrum of singularities of Riemann's function », *Rev. Mat. Iberoamericana* **12** (1996), no. 2, p. 441–460.

[53] S. Jaffard & B. Martin – « Multifractal analysis of the Brjuno function », *Invent. Math.* (à paraître).

[54] S. Jaffard, Y. Meyer & R. D. Ryan – *Wavelets*, revised éd., Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2001, Tools for science & technology.

[55] G. Kalai – « The AC0 Prime Number Conjecture », *http://gilkalai.wordpress.com/2011/02/21* (2011).

[56] I. Kátai – « A remark on a theorem of H. Daboussi », *Acta Math. Hungar.* **47** (1986), no. 1-2, p. 223–225.

[57] I. Kubilius – « Estimate of the second central moment for any additive arithmetic functions », *Litovsk. Mat. Sb.* **23** (1983), no. 2, p. 110–117.

[58] — , « Estimation of the second central moment for strongly additive arithmetic functions », *Litovsk. Mat. Sb.* **23** (1983), no. 1, p. 122–133.

[59] H. Maier & M. T. Rassias – « The order of magnitude for moments for certain cotangent sums », *J. Math. Anal. Appl.* **429** (2015), p. 576–590.

[60] — , « Asymptotics for moments of certain cotangent sums », *Houston J. Math.* **43** (2017), no. 1, p. 207–222.

[61] — , « Asymptotics for moments of certain cotangent sums for abitrary exponents », *https://arxiv.org/abs/1612.01391* (2017).

[62] S. Marmi, P. Moussa & J.-C. Yoccoz – « The Brjuno functions and their regularity properties », *Comm. Math. Phys.* **186** (1997), no. 2, p. 265–293.

[63] S. Marmi, P. Moussa & J.-C. Yoccoz – « Complex Brjuno functions », *J. Amer. Math. Soc.* **14** (2001), no. 4, p. 783–841.

[64] B. Martin & G. Tenenbaum – « Sur l'inégalité de Turán-Kubilius friable », *J. Reine Angew. Math.* **647** (2010), p. 175–234.

[65] B. Martin, C. Mauduit & J. Rivat – « Nombres premiers avec contraintes digitales multiples », soumis.

[66] — , « Théorème des nombres premiers pour les fonctions digitales », *Acta Arith.* **165** (2014), no. 1, p. 11–45.

[67] — , « Fonctions digitales le long des nombres premiers », *Acta. Arith.* **170** (2015), no. 2, p. 175–197.

[68] — , « Propriétés locales des chiffres des nombres premiers », à paraître dans J. Instit. Math. Jussieu, 2017.

[69] C. Mauduit – « Propriétés arithmétiques des substitutions et automates infinis », *Ann. Inst. Fourier* **56** (2006), no. 7, p. 2525–2549.

[70] C. Mauduit & J. Rivat – « Sur un problème de Gelfond : la somme des chiffres des nombres premiers », *Ann. of Math. (2)* **171** (2010), no. 3, p. 1591–1646.

[71] — , « Prime numbers along Rudin-Shapiro sequences », *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **17** (2015), no. 10, p. 2595–2642.

[72] C. Mauduit & A. Sárközy – « On finite pseudorandom binary sequences. I. Measure of pseudorandomness, the Legendre symbol », *Acta Arith.* **82** (1997), no. 4, p. 365–377.

[73] J. Maynard – « Primes with restricted digits », *https://arxiv.org/abs/1604.01041* (2016).

[74] L. J. Mordell – « The Approximate Functional Formula for the Theta Function », *J. London Math. Soc.* **S1-1** (1926), no. 2, p. 68.

[75] C. Müllner – « Automatic sequences fulfill the Sarnak conjecture », *Duke. Math. J.* (à paraître).

[76] M. R. Murty & V. K. Murty – « A problem of Chowla revisited », *J. Number Theory* **131** (2011), no. 9, p. 1723–1733.

[77] B. Nyman – *On the One-Dimensional Translation Group and Semi-Group in Certain Function Spaces*, Thesis, University of Uppsala, 1950.

[78] A. Oppenheim – « The Approximate Functional Equation for the Multiple Theta-Function and the Trigonometric Sums Associated Therewith », *Proc. London Math. Soc.* **S2-28** (1928), no. 1, p. 476.

[79] K. I. Oskolkov – « The series $\Sigma\Sigma\frac{e^{2\pi imnx}}{mn}$ and Chowla's problem », *Tr. Mat. Inst. Steklova* **248** (2005), no. Issled. po Teor. Funkts. i Differ. Uravn., p. 204–222.

[80] T. Rivoal – « On the convergence of Diophantine Dirichlet series », *Proc. Edinb. Math. Soc. (2)* **55** (2012), no. 2, p. 513–541.

[81] T. Rivoal & J. Roques – « Convergence and modular type properties of a twisted Riemann series », *Unif. Distrib. Theory* **8** (2013), no. 1, p. 97–119.

[82] T. Rivoal & S. Seuret – « Hardy-Littlewood series and even continued fractions », *J. Anal. Math.* **125** (2015), p. 175–225.

[83] C. Ryll-Nardzewski – « On the ergodic theorems. II. Ergodic theory of continued fractions », *Studia Math.* **12** (1951), p. 74–79.

[84] C. Stein – « On the Turán-Kubilius inequality », Tech. Report 220, Stanford : Stanford University, 1984.

[85] G. Tenenbaum – *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, 3e éd., Belin, Paris, 2008.

[86] I. M. Vinogradov – *The method of trigonometrical sums in the theory of numbers*, Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2004, Translated from the Russian, revised and annotated by K. F. Roth and Anne Davenport, Reprint of the 1954 translation.

[87] A. Walfisz – « Über einige trigonometrische Summen », *Math. Z.* **33** (1931), no. 1, p. 564–601.

[88] J. R. Wilton – « The Approximate Functional Formula for the Theta Function », *J. London Math. Soc.* **S1-2** (1927), no. 3, p. 177–a.

[89] J. Wilton – « An approximate functional equation with applications to a problem of diophantine approximation », *J. Reine Angew. Math* **169** (1933), p. 219–237.

[90] T. Z. Xuan – « The Turán-Kubilius inequality for integers free of large prime factors », *J. Number Theory* **43** (1993), no. 1, p. 82–87.

[91] — , « The Turán-Kubilius inequality for integers free of large prime factors. II », *Acta Arith.* **65** (1993), no. 4, p. 329–352.

[92] J.-C. Yoccoz – « Théorème de Siegel, nombres de Bruno et polynômes quadratiques », *Astérisque* **231** (1995), p. 3–88, Petits diviseurs en dimension 1.

[93] Y. Zhang – « Bounded gaps between primes », *Ann. of Math. (2)* **179** (2014), no. 3, p. 1121–1174.