UFR S.T.M.I.A.
École Doctorale IAE + M
Université Henri Poincaré - Nancy I
D.F.D. Mathématiques

THÈSE

présentée pour l'obtention du titre de

Docteur de l'Université Henri Poincaré, Nancy-I

en Mathématiques

par

Bruno MARTIN

Contribution à la théorie des entiers friables

Soutenue publiquement le 11 Juillet 2005

Membres du Jury :

M. Étienne Fouvry	Président & Rapporteur	Professeur à l'Université de Paris XI
M. Régis de la Bretèche	Rapporteur	Maître de conférences à l'École Normale Supérieure
M. Marius Tucsnak	Examinateur	Professeur à l'Université Henri Poincaré
M. Francis Conrad	Examinateur	Professeur à l'Université Henri Poincaré
M. Jie Wu	Examinateur	Chargé de recherche CNRS, Université Henri Poincaré
M. Gérald Tenenbaum	Directeur de Thèse	Professeur à l'Université Henri Poincaré

Institut Élie Cartan Nancy CNRS UMR 9973
Faculté des Sciences - B.P. 239 - 54506 Vandœuvre-lès-Nancy CEDEX

UFR S.T.M.I.A.
École Doctorale IAE + M
Université Henri Poincaré - Nancy I
D.F.D. Mathématiques

THÈSE

présentée pour l'obtention du titre de

Docteur de l'Université Henri Poincaré, Nancy-I

en Mathématiques

par

Bruno MARTIN

Contribution à la théorie des entiers friables

Soutenue publiquement le 11 Juillet 2005

Membres du Jury :

M. Étienne Fouvry	Président & Rapporteur	Professeur à l'Université de Paris XI
M. Régis de la Bretèche	Rapporteur	Maître de conférences à l'École Normale Supérieure
M. Marius Tucsnak	Examinateur	Professeur à l'Université Henri Poincaré
M. Francis Conrad	Examinateur	Professeur à l'Université Henri Poincaré
M. Jie Wu	Examinateur	Chargé de recherche CNRS, Université Henri Poincaré
M. Gérald Tenenbaum	Directeur de Thèse	Professeur à l'Université Henri Poincaré

Institut Élie Cartan Nancy CNRS UMR 9973
Faculté des Sciences - B.P. 239 - 54506 Vandœuvre-lès-Nancy CEDEX

Remerciements

Je tiens à remercier chaleureusement mon directeur de thèse, Gérald Tenenbaum pour son investissement inestimable dans ce travail. Sa disponibilité, ses encouragements et surtout sa verve mathématique, ont permis l'aboutissement de ce projet, chose que je parviens encore difficilement à réaliser.

Étienne Fouvry m'a fait l'honneur d'être rapporteur de ce travail et président de mon jury, je lui en suis très reconnaissant.

Je tiens à remercier Régis de la Bretèche, mon rapporteur, pour ses nombreuses remarques et suggestions qui ont permis d'enrichir ce travail et de le rendre plus transparent.

Je remercie Marius Tucsnak et Francis Conrad de m'avoir aiguillé en analyse fonctionnelle et en analyse numérique. Je remercie également Jie Wu pour sa participation à ce jury.

Un grand merci également à Bruno Pinçon qui n'a pas épargné son temps pour m'aider dans la partie informatique de cette thèse.

Je profite de cet instant pour remercier tous les enseignants, qui, par la qualité de leurs cours et leur enthousiasme, m'ont appris à aimer les mathématiques. En particulier, j'ai une pensée émue pour deux professeurs qui ont tiré leur dernière révérence : M.Michel, mon professeur de quatrième, qui m'a initié aux plaisirs de la démonstration, à une période où les mathématiques ne présentaient aucun intérêt à mes yeux ; Jean Varouchas, dont je n'oublierai jamais le regard lorsqu'il parvenait à trouver une nouvelle démonstration d'une identité célèbre, au beau milieu d'une séance de travaux dirigés de Licence. Je remercie également Annick André et Charles Vix qui ont su me faire découvrir l'élégance de cette discipline, et m'inciter ainsi à y consacrer de plus en plus de temps.

Le soutien de mon entourage a été particulièrement important durant ces trois dernières années. Je pense tout d'abord à ma famille qui m'a toujours soutenu dans les moments de découragements. Je tiens à saluer tous mes amis qui, par leurs nombreuses sollicitations, m'ont empêché, si besoin était, de transformer ma vie en sacerdoce mathématique. Un remerciement tout particulier à mes colocataires : Mathou, Pablo, Jux, Aline et Greg... et à la bande des lunévillois : Jérôme, Manu, Pig, Scual, Jean-Yvounet, Pegg, Yoann, Flo, Willy, Nico. Un petit coucou également aux groupes des choristes, des randonneurs et aux allumés d'Improdisiaque. Et je n'oublie pas Manon et Anne, rayons de soleil du laboratoire, dont le soutien a été essentiel.

Table des matières générale

Notations

- La lettre p désigne un nombre premier. Dans la partie consacrée à l'inégalité de Turán-Kubilius, il en est de même pour la lettre q.
- $a|b$ signifie que a divise b et $p^\nu \| n$ signifie que $p^\nu | n$ et $p^{\nu+1} \nmid n$.
- (a, b) désigne le pgcd des entiers a et b.
- $\mathbf{1}(n) := 1\,(n \in \mathbb{N}^*)$.
- $\omega(n) := \sum_{p|n} 1$ et $\tau(n) := \sum_{d|n} 1$
- $\mu(n) := \begin{cases} (-1)^{\omega(n)} & \text{si } n \text{ est sans facteur carré,} \\ 0 & \text{dans le cas contraire,} \end{cases}$ (fonction de Möbius).
- $\Lambda(n) := \begin{cases} \log p & \text{si } n = p^\nu, \\ 0 & \text{dans le cas contraire,} \end{cases}$ (fonction de Von Mangoldt).
- $\varphi(n) := \sum_{1 \leqslant m \leqslant n,\, (m,n)=1} 1$ est la fonction indicatrice d'Euler.
- $P(n)$ désigne le plus grand facteur premier de n, avec la convention $P(1) = 1$.
- $S(x, y) := \{n \leqslant x : P(n) \leqslant y\}$ et $\Psi(x, y)$ est le cardinal de $S(x, y)$.
- La fonction de Dickman ϱ est définie comme l'unique solution continue de l'équation différentielle aux différences finies

$$v\varrho'(v) + \varrho(v-1) = 0 \quad (v > 1), \quad \varrho(v) = 1 \quad (0 \leqslant v \leqslant 1).$$

  Nous posons également $\varrho(v) = 0$ pour $v < 0$.
- Étant donné un nombre réel x, nous notons $[x]$ sa partie entière, $\langle x \rangle$ sa partie fractionnaire, et $\|x\| := d(x, \mathbb{Z}) = \min_{n \in \mathbb{Z}} |x - n|$ la distance de x à l'ensemble des entiers.
- $\xi(v)$ désigne, pour $v > 1$, l'unique solution strictement positive de l'équation

$$1 + v\xi(v) = \mathrm{e}^{\xi(v)}.$$

  On pose $\xi(1) = 0$.
- $\alpha = \alpha(x, y)$ désigne la solution de l'équation transcendante

$$\sum_{p \leqslant y} \frac{\log p}{p^\alpha - 1} = \log x \quad (x \geqslant y \geqslant 2).$$

- ζ désigne la fonction zêta de Riemann.
- $\log_k$ désigne la k-ième itérée de la fonction logarithme.
- Nous utilisons indifféremment la notation de Landau $f = O(g)$ et celle de Vinogradov $f \ll g$ pour signifier que $|f| \leqslant C|g|$ pour une constante positive C, qui peut être absolue ou dépendre de certains paramètres, auquel cas la dépendance pourra être indiquée en indice.
- La notation $f \asymp g$ signifie que $f \ll g$ et $g \ll f$ ont lieu simultanément.
- $\mathbb{A}$ désigne l'ensemble des fonctions arithmétiques additives à valeurs réelles, c'est-à-dire telles que

$$f(n) = \sum_{p^\nu \| n} f(p^\nu) \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Introduction

Cette thèse comporte deux parties indépendantes, toutes deux dédiées à l'étude des entiers friables, ou sans grand facteur premier, et à leur implication dans la théorie analytique et probabiliste des nombres. Nous désignons par $P(n)$ le plus grand facteur premier d'un entier $n \geqslant 2$ et nous posons $P(1) = 1$. L'ensemble

$$S(x,y) := \{n \leqslant x : P(n) \leqslant y\}$$

dont le cardinal est noté $\Psi(x,y)$, a fait l'objet d'une littérature considérable depuis le travail de Bruijn en 1951, et notamment lors des vingt dernières années. L'introduction des entiers friables s'est en effet révélée très utile dans de nombreux problèmes.

Dans la première partie, nous utilisons les entiers friables pour traiter un problème posé par Davenport en 1937 concernant des séries trigonométriques à coefficients arithmétiques. La première fonction de Bernoulli normalisée est définie par

$$B(\vartheta) = \begin{cases} \langle \vartheta \rangle - \frac{1}{2} & \text{si } \vartheta \notin \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{si } \vartheta \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

où $\langle \cdot \rangle$ désigne la partie fractionnaire. Elle est en tout point somme de son développement en série de Fourier : on a, pour tout $\vartheta \in \mathbb{R}$,

$$B(\vartheta) = -\sum_{k \geqslant 1} \frac{\sin(2\pi k \vartheta)}{\pi k}. \tag{1}$$

Étant donnée une fonction arithmétique $g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$, on déduit de (1) le calcul formel

$$\begin{aligned} \sum_{n \geqslant 1} \frac{g(n)}{n} B(n\vartheta) &= -\sum_{n,k \geqslant 1} \frac{g(n)}{\pi n k} \sin(2\pi n k \vartheta) \\ &= -\sum_{m \geqslant 1} \frac{(g * \mathbf{1})(m)}{\pi m} \sin(2\pi m \vartheta), \end{aligned} \tag{2}$$

où $*$ désigne le produit de convolution de Dirichlet, et $\mathbf{1}$ la fonction arithmétique définie par $\mathbf{1}(n) = 1$ pour tout $n \geqslant 1$. En posant

$$f = g * \mathbf{1}, \tag{3}$$

nous pouvons réécrire (2) sous la forme

$$\sum_{m \geqslant 1} \frac{f(m)}{\pi m} \sin(2\pi m \vartheta) + \sum_{n \geqslant 1} \frac{g(n)}{n} B(n\vartheta) = 0. \tag{D_ϑ}$$

Étant donné un couple de fonctions (f, g) liées par la relation (3), déterminer les nombres réels ϑ pour lesquels l'identité (D_ϑ) prend un sens analytique, est un problème difficile que l'on ne sait actuellement pas résoudre en toute généralité. Nous noterons désormais $(f, g) \in D_\vartheta$ pour signifier qu'un couple de fonctions (f, g), liées par la relation (3), satisfait l'identité (D_ϑ).

Désignons par $\boldsymbol{\delta}$ l'élément neutre pour la convolution et par μ la fonction de Möbius. Davenport a établi que $(\boldsymbol{\delta}, \mu) \in D_\vartheta$ pour tout $\vartheta \in \mathbb{R}$. Plus précisément, il obtient l'estimation effective

$$\Delta(\vartheta, y) := \frac{\sin(2\pi\vartheta)}{\pi} + \sum_{n \leqslant y} \frac{\mu(n)}{n} B(n\vartheta) \ll \frac{1}{(\log y)^A} \quad (y \geqslant 2), \tag{4}$$

où A est une constante positive arbitraire. La méthode de Davenport consiste à utiliser la décomposition

$$(\vartheta_2-\vartheta_1)\Delta(\vartheta_1,y)=I+J$$

avec

$$I=\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}\Delta(\vartheta,y)\,\mathrm{d}\vartheta \qquad \text{et} \qquad J=\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}\big\{\Delta(\vartheta_1,y)-\Delta(\vartheta,y)\big\}\,\mathrm{d}\vartheta.$$

L'intégrale I ramène le problème à un cas où la série double figurant dans (2) est sommable, et pour lequel l'interversion des sommations est donc licite. Estimer J consiste essentiellement à contrôler les discontinuités de

$$\vartheta\mapsto\sum_{n\leqslant y}\frac{\mu(n)}{n}B(n\vartheta). \tag{5}$$

Le saut de la fonction (5) en un point de Farey a/q, avec $1\leqslant a\leqslant q\leqslant y$ et $(a,q)=1$, vaut

$$-\sum_{\substack{n\leqslant y\\ n\equiv 0(\operatorname{mod} q)}}\frac{\mu(n)}{n}=-\frac{\mu(q)}{q}\sum_{\substack{n\leqslant y/q\\ (n,q)=1}}\frac{\mu(n)}{n}\ll\frac{1}{q+(\log y)^A},$$

pour tout $A>0$, où la dernière évaluation peut être établie par une méthode classique d'intégration complexe. Davenport obtient l'évaluation souhaitée en sommant sur tous les points de Farey d'ordre y appartenant à l'intervalle $[\vartheta_1,\vartheta]$ et obtient l'estimation

$$\Delta(\vartheta,y)-\Delta(\vartheta_1,y)\ll(\vartheta-\vartheta_1)y+O\Big(\frac{1}{(\log y)^A}\Big), \tag{6}$$

qui est suffisante pour conclure.

Cependant cette méthode échoue dans le cas de certaines fonctions arithmétiques de référence. Par exemple, lorsque $(f,g)=(\log,\Lambda)$, où Λ désigne la fonction de von Mangoldt, le contrôle des discontinuités ne semble plus envisageable, car le saut en un point de Farey a/q de la fonction $\vartheta\mapsto\sum_{n\leqslant y}\Lambda(n)B(n\vartheta)/n$ ne tend pas vers 0 lorsque $y\to\infty$, contrairement au cas de la fonction μ. Nous donnons dans l'appendice A de la première partie de ce travail, un exposé plus détaillé sur la méthode de Davenport et ses limites.

Il est par ailleurs à noter que l'extension du résultat de Davenport par convolution se heurte également à des obstacles sérieux. Ainsi, on a bien

$$\begin{aligned}\Delta_f(\vartheta,y):&=\sum_{m\leqslant y}\frac{f(m)}{\pi m}\sin(2\pi m\vartheta)+\sum_{n\leqslant y}\frac{g(n)}{n}B(n\vartheta)\\ &=\sum_{m\leqslant y}\frac{f(m)}{m}\Delta(m\vartheta,y/m),\end{aligned} \tag{7}$$

mais la contribution à (7), des entiers $m\geqslant y/2$, pour lesquels le résultat (4) de Davenport est sans intérêt, peut être substantielle, hors des circonstances où l'on dispose d'une forte condition de décroissance pour la fonction f.

Environ soixante années plus tard, La Bretèche et Tenenbaum ont exploité les récents développements effectués sur les entiers friables pour développer un cadre mieux adapté à ce problème. La P-sommation, introduite par Fouvry et Tenenbaum en 1991, constitue l'outil déterminant de cette nouvelle méthode. Ce procédé consiste à sommer non plus sur les entiers $n\leqslant y$ mais sur les entiers n tels que $P(n)\leqslant y$. L'emploi de la P-sommation pour traiter le problème de Davenport peut être justifié par l'énoncé suivant : le P-développement en série de Fourier de la fonction B converge ponctuellement vers B, c'est-à-dire

$$\nabla(\vartheta,y):=B(\vartheta)-B(\vartheta,y)=o(1)\quad(y\to\infty) \tag{8}$$

avec

$$B(\vartheta, y) := -\sum_{P(n)\leqslant y} \frac{\sin(2\pi n\vartheta)}{\pi n}.$$

De plus,

$$\sup_{\vartheta\in\mathbb{R}} B(\vartheta, y) = \sup_{\vartheta\in\mathbb{R}} B(\vartheta) + o(1) \quad (y \to \infty),$$

ce qui signifie que le phénomène de Gibbs est évité. Le procédé de P-sommation est donc plus régulier que la sommation usuelle.

La Bretèche et Tenenbaum parviennent à établir, grâce à cette méthode, que $(\log, \Lambda) \in D_\vartheta$ pour tout $\vartheta \in \mathbb{R}$, alors que la méthode de Davenport fournissait seulement le résultat pour presque tout ϑ. Désignons par $\tau(n)$ la fonction qui compte le nombre de diviseurs d'un entier n. La Bretèche et Tenenbaum traitent également le cas du couple $(\tau, \mathbf{1})$ qui s'avère être particulièrement intéressant dans la mesure où l'ensemble des nombres réels ϑ pour lequels la relation (D_ϑ) n'est pas satisfaite est non vide. Notant $\{q_m\}_{m=1}^\infty$ la suite des dénominateurs des réduites de ϑ, les auteurs de [3] obtiennent que pour $\vartheta \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$, le couple $(\tau, \mathbf{1})$ appartient à D_ϑ si, et seulement si, la série

$$\sum_{m\geqslant 1} (-1)^m \frac{(\log q_{m+1})}{q_m}$$

est convergente.

Qu'une condition de croissance sur la suite $\{q_m\}_{m=1}^\infty$ intervienne ici n'est pas surprenant en soi : heuristiquement, les nombre réels ϑ posant problème sont ceux pour lesquels les nombres $n\vartheta$ approchent trop bien les discontinuités de la fonction B, c'est-à-dire les nombres entiers. En effet, c'est en ces points que la convergence du développement en série de Fourier de B est la plus mauvaise. Or, de tels points sont précisément ceux pour lesquels la suite $\{q_m\}_{m=1}^\infty$ croît très vite.

Nous nous sommes penchés sur le cas du couple $(\tau_{\kappa+1}, \tau_\kappa)$ où τ_κ désigne, pour $\kappa > 0$, la puissance de convolution d'ordre κ de la fonction $\mathbf{1}$; autrement dit $\tau_\kappa(n)$ est le coefficient générique de la série de Dirichlet $\zeta(s)^\kappa$ où ζ désigne la fonction zêta de Riemann. Nous obtenons une caractérisation des nombres irrationnels pour lesquels $(\tau_\kappa, \tau_{\kappa+1}) \in D_\vartheta$. Pour énoncer notre résultat principal, nous introduisons la fonction multiplicative f_κ définie par

$$\begin{aligned} f_\kappa(p^\nu) :&= \Big(1 - \frac{1}{p}\Big)^\kappa \sum_{j\geqslant 0} \frac{\tau_\kappa(p^{j+\nu})}{p^j} \\ &= \tau_\kappa(p^\nu)\Big\{1 + O_\kappa\Big(\frac{1}{p}\Big)\Big\} \quad (\nu \geqslant 1), \end{aligned}$$

en convenant que la lettre p désigne un nombre premier. Nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 1. *Soient $\kappa > 0$ et $\vartheta \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$. On a*

$$\sum_{m\geqslant 1} \frac{\tau_{\kappa+1}(m)}{\pi m} \sin(2\pi m\vartheta) + \sum_{n\geqslant 1} \frac{\tau_\kappa(n)}{n} B(n\vartheta) = 0 \tag{9}$$

si, et seulement si, la série

$$\sum_{m\geqslant 1} (-1)^m \frac{(\log q_{m+1})^\kappa}{q_m} f_\kappa(q_m) \tag{10}$$

converge.

Compte-tenu des identités $\tau_1 = \mathbf{1}$, $\tau_2 = \tau$ et $f_1 = \mathbf{1}$, ce théorème correspond à une généralisation à $\kappa > 0$ du résultat obtenu par La Bretèche et Tenenbaum pour $\kappa = 1$.

La fonction f_κ satisfait la majoration

$$f_\kappa(q) \ll_\kappa q^\varepsilon \quad (q \geqslant 1, \kappa > 0).$$

Un théorème de Khinchine, dans [10], nous permet alors de montrer que l'ensemble des nombres irrationnels pour lesquels la série (10) n'est pas convergente, est de mesure de Hausdorff nulle. Il est cependant non vide : il est possible de construire un nombre irrationnel de sorte que ses réduites croissent suffisamment vite pour que la série (10) diverge.

La Bretèche et Tenenbaum ont établi indirectement dans [3], que l'identité (9) est valide pour tout $\vartheta \in \mathbb{Q}$. Nous retrouvons ce résultat en donnant de plus une estimation de la vitesse de convergence des deux séries impliquées dans (9).

Par ailleurs, il est aussi possible de considérer la fonction τ_z lorsque z est un nombre complexe. La Bretèche et Tenenbaum ont établi la validité de l'identité

$$\sum_{m\geqslant 1} \frac{\tau_{z+1}(m)}{\pi m} \sin(2\pi m\vartheta) + \sum_{n\geqslant 1} \frac{\tau_z(n)}{n} B(n\vartheta) = 0 \tag{11}$$

pour tout $\vartheta \in \mathbb{R}$ lorsque $z \in \mathbb{C}$ vérifie $|z-1| \leqslant 1$. Nous obtenons qu'une condition suffisante pour la validité de (11), lorsque z est un nombre complexe quelconque et ϑ un nombre irrationnel, est

$$\lim_{m\to\infty} \frac{(\log q_{m+1})^{|z|}}{q_m} f_{|z|}(q_m) = 0. \tag{12}$$

Pour établir de tels résultats lorsque $\vartheta \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$, nous suivons la méthode introduite par La Bretèche et Tenenbaum dans [3]. Nous commençons par établir que les deux séries, mises en jeu dans (11), et la série

$$\sum_{m\geqslant 1} (-1)^m \frac{(\log q_{m+1})^z}{q_m} f_z(q_m) \tag{13}$$

convergent ou divergent simultanément pour tous $z \in \mathbb{C}$ et $\vartheta \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$. L'étude de la convergence de la série

$$\sum_{m\geqslant 1} \frac{\tau_{z+1}(m)}{\pi m} \sin(2\pi m\vartheta) \quad (z \in \mathbb{C}, \vartheta \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}) \tag{14}$$

se déduit, *via* une sommation d'Abel, de l'estimation de la somme

$$\sum_{m\leqslant x} \tau_{z+1}(m) \sin(2\pi m\vartheta). \tag{15}$$

Une telle estimation est réalisée dans [3] et repose sur l'évaluation des sommes d'exponentielles

$$\sum_{m\leqslant x} \tau_z(m) \mathrm{e}^{2i\pi am/q} \quad (1 \leqslant a \leqslant q, (a,q) = 1),$$

par la méthode de Selberg-Delange. On en déduit une estimation de (15) faisant intervenir les dénominateurs des meilleures approximations rationnelles de ϑ, c'est-à-dire les éléments de l'ensemble

$$\mathfrak{D}(\vartheta) := \{q \geqslant 2 : \|q\vartheta\| < \min_{1\leqslant r<q} \|r\vartheta\|\},$$

où $\|\vartheta\|$ désigne la distance du nombre réel ϑ à l'entier le plus proche. On sait classiquement que $\mathfrak{D}(\vartheta)$ coïncide avec $\{q_m\}_{m=1}^{\infty}$, ce qui nous permet de relier la convergence de la somme (14) à la convergence de la série (10).

Pour étudier la convergence de la série

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\tau_z(n)}{n} B(n\vartheta) \tag{16}$$

nous employons le fait, établi dans [3], que la fonction τ_z est bien répartie dans les progressions arithmétiques de petit module.

Nous faisons intervenir les entiers friables pour établir, qu'en cas de convergence, les séries (14) et (16) ont des sommes opposées, c'est-à-dire que

$$\Delta_{\tau_{z+1}}(\vartheta; y) := \sum_{m\leqslant y} \frac{\tau_{z+1}(m)}{\pi m}\sin(2\pi m\vartheta) + \sum_{n\leqslant y}\frac{\tau_z(n)}{n}B(n\vartheta) = o(1) \quad (y\to\infty). \tag{17}$$

La P-sommation étant plus régulière que la sommation usuelle, La Bretèche et Tenenbaum préconisent d'établir en premier lieu la validité du P-analogue de (17), c'est-à-dire

$$\nabla_{\tau_{z+1}}(\vartheta, y) := \sum_{P(m)\leqslant y} \frac{\tau_{z+1}(m)}{\pi m}\sin(2\pi m\vartheta) + \sum_{P(n)\leqslant y}\frac{\tau_z(n)}{n}B(n\vartheta) = o(1) \quad (y\to\infty), \tag{18}$$

puis d'en déduire (17), *via* la formule

$$\Delta_{\tau_{z+1}}(\vartheta; y) = \nabla_{\tau_{z+1}}(\vartheta, y) - U_{\tau_{z+1}}(\vartheta; y) - V_{\tau_z}(\vartheta; y) \quad (y\geqslant 2),$$

où l'on a posé

$$U_{\tau_{z+1}}(\vartheta; y) := \sum_{\substack{P(m)\leqslant y\\ m>y}} \frac{\tau_{z+1}(m)}{\pi m}\sin(2\pi m\vartheta),$$

et

$$V_{\tau_z}(\vartheta; y) := \sum_{\substack{P(n)\leqslant y\\ n>y}} \frac{\tau_z(n)}{n}B(n\vartheta).$$

L'étude des « défauts de P-régularité », $U_{\tau_{z+1}}(\vartheta; y)$ et $V_{\tau_z}(\vartheta; y)$, est effectuée dans [3]. En approchant B par une fonction dont le développement en série de Fourier est absolument convergent, et en procédant à une interversion de sommation devenue licite, La Bretèche et Tenenbaum montrent que l'étude de $V_{\tau_z}(\vartheta)$, et à l'évidence celle de $U_{\tau_{z+1}}(\vartheta, y)$, peut se ramener à celle des sommes d'exponentielles

$$\sum_{n\in S(x,y)} \tau_z(n)\mathrm{e}^{2i\pi n\vartheta} \quad (z\in\mathbb{C}). \tag{19}$$

La Bretèche a établi dans [1] des résultats permettant d'évaluer des sommes du type (19). Cela repose essentiellement sur la méthode classique de Vinogradov pour évaluer des sommes d'exponentielles sur des arcs mineurs. En choisissant y de manière à ce que ϑ appartienne à un arc mineur, La Bretèche et Tenenbaum obtiennent la formule

$$\liminf_{y\to\infty} |U_{\tau_{z+1}}(\vartheta, y)| + |V_{\tau_z}(\vartheta, y)| = 0.$$

Pour établir (18), nous exploitons un autre aspect capital de la P-sommation, à savoir le respect de la structure multiplicative du produit de convolution de Dirichlet : la formule, dite des convolutions complètes, affirme que pour deux fonctions arithmétiques f, g, nous avons

$$\sum_{P(n)\leqslant y} f(n) \sum_{P(m)\leqslant y} g(m) = \sum_{P(k)\leqslant y} (f*g)(k),$$

sous réserve de convergence des trois séries. Rappelant la définition de $\nabla(\vartheta, y)$ en (8), nous obtenons en particulier

$$\nabla_{\tau_{z+1}}(\vartheta, y) = \sum_{P(m)\leqslant y} \frac{\tau_z(m)}{m}\nabla(m\vartheta, y), \tag{20}$$

formule que l'on peut avantageusement comparer à (7) : les entiers y/m ont disparu.

Nous utilisons alors une estimation effective de la formule (8), établie au Théorème 2.2 de [3]. Nous obtenons que la somme intervenant dans (20) est essentiellement dominée par

$$\sum_{\substack{P(n)\leqslant y\\ \|n\vartheta\|\leqslant 1/y}} \frac{\tau_z(n)}{n}. \tag{21}$$

En localisant les entiers n, dont la contribution à (21) est non négligeable, à l'aide des approximations diophantiennes de ϑ, nous obtenons que (18) est satisfaite dès que la condition (12) est remplie. Cette dernière étape nécessite également une estimation de la moyenne de τ_z sur les entiers friables, fournie par Smida, dans [11].

La deuxième partie de cette thèse se place dans le cadre de la théorie probabiliste des nombres et de l'étude de la répartition des fonctions additives *via* l'inégalité de Turán-Kubilius.

Convenons que la lettre p désignera toujours un nombre premier. Si f est une fonction additive, nous pouvons écrire

$$f(n) = \sum_{p^\nu \| n} f(p^\nu) = \sum_{p \leqslant x} f_p(n) \quad (n \leqslant x),$$

où les f_p sont définies par

$$f_p(n) = \begin{cases} f(p^\nu) & \text{si } p^\nu \| n \\ 0 & \text{si } p \nmid n. \end{cases} \tag{22}$$

Si ν_x désigne la mesure uniforme sur $\Omega_x := \{n \leqslant x\}$, on a

$$\begin{aligned} \nu_x\{f_p(n) = f(p^\nu)\} = \omega_x(p^\nu) : &= \frac{1}{x}\left\{ \left[\frac{x}{p^\nu}\right] - \left[\frac{x}{p^{\nu+1}}\right] \right\} \\ &= \frac{1}{p^\nu}\Big(1 - \frac{1}{p}\Big) + O\Big(\frac{1}{x}\Big). \end{aligned}$$

La répartition de la fonction f peut donc être modélisée par celle d'une variable aléatoire $Z_{f,x}$ définie par

$$Z_{f,x} = \sum_{p \leqslant x} \xi_p,$$

où les ξ_p sont des variables aléatoires indépendantes géométriques de paramètre $(1 - 1/p)$. Les approximations naturelles de l'espérance et de la variance d'une fonction additive f définie sur Ω_x sont donc

$$A_f(x) := \mathbb{E}(Z_{f,x}) = \sum_{p^\nu \leqslant x} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu}\Big(1 - \frac{1}{p}\Big),$$

$$\mathbb{V}(Z_{f,x}) = B_f(x)^2 - \sum_{p \leqslant x} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big)^2 \Big\{ \sum_{1 \leqslant \nu \leqslant \log x/\log p} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu} \Big\}^2,$$

où l'on a posé

$$B_f(x)^2 := \mathbb{E}(Z_{f,x}^2) = \sum_{p^\nu \leqslant x} \frac{f(p^\nu)^2}{p^\nu}\Big(1 - \frac{1}{p}\Big),$$

et où $\mathbb{E}$ et $\mathbb{V}$ désignent respectivement l'espérance et la variance relatives à la loi de probabilité des variables aléatoires ξ_p. Avec ces notations, l'inégalité classique de Turán-Kubilius s'énonce sous la forme

$$V_f(x) := \frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} \{f(n) - A_f(x)\}^2 \ll B_f(x)^2, \tag{23}$$

où la constante implicite ne dépend pas de la fonction additive f.

La quantité $V_f(x)$ ne représente pas exactement la variance de f sous la mesure ν_x, qui s'écrit

$$V_f^{\#}(x) = \frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} \big\{f(n) - E_f(x)\big\}^2,$$

avec

$$E_f(x) = \frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} f(n).$$

Cependant, l'écart entre $V_f(x)$ et $V_f^{\#}(x)$ reste négligeable devant $B_f(x)^2$.

La constante C peut donc être vue comme une mesure de l'écart séparant la théorie probabiliste des nombres et la théorie des probabilités. Plus précisément, on peut considérer la constante

$$C = \limsup_{x\to\infty} \sup_{f\in\mathbb{A}} \frac{V_f(x)}{B_f(x)^2},$$

où la lettre $\mathbb{A}$ désigne l'ensemble des fonctions additives à valeurs réelles. Dans [2], La Bretèche et Tenenbaum déduisent d'une formule asymptotique pour la variance $V_f(x)$, établie par Hildebrand dans [11], l'égalité $C = 2$.

On peut espérer approfondir notre compréhension de la nature probabiliste de l'ensemble Ω_x, en remplaçant la mesure ν_x par la mesure uniforme sur $S(x,y)$, que nous désignons par $\nu_{x,y}$. En conservant la définition (22) des fonctions f_p, nous avons, pour une fonction additive f dont le support est inclus dans $S(x,y)$,

$$f = \sum_{p\leqslant y} f_p.$$

Notant

$$\Psi_m(x,y) := \{n \in S(x,y) : (n,m) = 1\},$$

nous observons que la loi des f_p est désormais donnée par

$$\begin{aligned}\nu_{x,y}\{f_p(n) = f(p^\nu)\} &= \frac{\Psi(x/p^\nu, y) - \Psi(x/p^{\nu+1}, y)}{\Psi(x,y)} \\ &= \frac{\Psi_p(x/p^\nu, y)}{\Psi(x,y)} \quad (\nu \geqslant 1).\end{aligned} \tag{24}$$

Pour construire un modèle probabiliste de f dans ce cadre, il nous suffit donc de disposer d'une approximation simple du rapport $\Psi_p(x/p^\nu, y)/\Psi(x,y)$. L'estimation de $\Psi(x,y)$, obtenue dans [14] par la méthode du col, suggère que ce rapport est proche de la quantité

$$\frac{1}{p^{\nu\alpha}}\Big(1 - \frac{1}{p^\alpha}\Big),$$

où α désigne la solution de l'équation transcendante

$$\sum_{p\leqslant y} \frac{\log p}{p^\alpha - 1} = \log x.$$

Cela nous amène à approcher la répartition de f par celle de la variable aléatoire

$$Z_{f,x,y} := \sum_{p\leqslant y} \xi_p,$$

où les ξ_p sont des variables aléatoires indépendantes dont la loi est définie par

$$\mathbb{P}(\xi_p = f(p^\nu)) = \frac{1}{p^{\nu\alpha}}\Big(1 - \frac{1}{p^\alpha}\Big) \quad (\nu \geqslant 1).$$

Tout comme dans le cas $x = y$, nous sommes conduits à considérer les approximations naturelles de l'espérance et du moment d'ordre 2 de f,

$$A_f(x,y) := \mathbb{E}(Z_{f,x,y}) = \sum_{p^\nu\in S(x,y)} \frac{f(p^\nu)}{p^{\nu\alpha}}\Big(1 - \frac{1}{p^\alpha}\Big),$$

$$B_f(x,y)^2 := \mathbb{E}(Z_{f,x,y}^2) = \sum_{p^\nu\in S(x,y)} \frac{f(p^\nu)^2}{p^{\nu\alpha}}\Big(1 - \frac{1}{p^\alpha}\Big).$$

Avec ces notations, La Bretèche et Tenenbaum établissent dans [2] que la majoration

$$V_f(x,y) := \frac{1}{\Psi(x,y)} \sum_{n\in S(x,y)} \big\{f(n) - A_f(x,y)\big\}^2 \ll B_f(x,y)^2 \tag{25}$$

est uniforme pour $f \in \mathbb{A}$ et $2 \leqslant y \leqslant x$.

Là encore, se pose le problème d'élucider le comportement asymptotique de la constante optimale impliquée dans (25), c'est-à-dire,

$$C(x,y) := \sup_{f\in\mathbb{A}} \frac{V_f(x,y)}{B_f(x,y)^2}.$$

Lorsque $x = y$, les inégalités (23) et (25) coïncident à un terme négligeable près, aussi peut-on affirmer que

$$C(x,x) = 2 + o(1) \quad (x \to \infty).$$

La Bretèche et Tenenbaum établissent par ailleurs que

$$C(x,y) = 1 + o(1) \tag{26}$$

dans le domaine

$$y \leqslant x^{o(1)} \quad \text{et} \quad \frac{y}{\log x} \to \infty.$$

L'objet de notre étude consiste à déterminer le comportement asymptotique de $C(x,y)$ lorsque le paramètre $u := \log x/\log y \geqslant 1$ est fixé. Plus précisément, nous étudions la valeur de

$$C(u) := \limsup_{x\to\infty} C(x, x^{1/u}) \quad (u \geqslant 1).$$

Tout comme dans le cas $x = y$, nous remarquons que la quantité $V_f(x,y)$ ne représente pas la variance empirique relative à la mesure $\nu_{x,y}$ d'une fonction additive mais la moyenne de l'écart quadratique entre f et l'espérance de son modèle. Il serait donc plus juste, dans la perspective de jauger l'écart entre la théorie probabiliste des nombres et la théorie des probabilités, d'étudier les quantités,

$$V_f^{\#}(x,y) := \frac{1}{\Psi(x,y)} \sum_{n\in S(x,y)} \big\{f(n) - E_f(x,y)\big\}^2,$$

avec

$$E_f(x,y) := \frac{1}{\Psi(x,y)} \sum_{n\in S(x,y)} f(n),$$

et

$$C^{\#}(u) := \limsup_{u\to\infty} \sup_{f\in\mathbb{A}} \frac{V_f^{\#}(x,y)}{B_f(x,y)^2},$$

d'autant que ces quantités n'ont pas, *a priori*, le même comportement que $V_f(x,y)$ et $C(u)$ dès que $u > 1$. Cependant la quantité $V_f(x,y)$ est plus maniable que $V_f^{\#}(x,y)$ et donc plus susceptible d'applications : La Bretèche et Tenenbaum déduisent par exemple de l'inégalité (25) un théorème portant sur la structure multiplicative des entiers friables. Les deux approches présentent donc un intérêt. Dans un souci de clarté, nous nous contentons d'exposer dans cette introduction des résultats concernant la variance semi-empirique $V_f(x,y)$ et la constante $C(u)$. À chacun de ces résultats correspond un analogue pour la variance empirique $V_f^{\#}(x,y)$ et la constante $C^{\#}(u)$ dont nous donnerons le détail dans le développement de ce travail.

L'étude précise de l'approximation du rapport

$$\frac{\Psi_p(x/p^\nu, y)}{\Psi(x,y)}$$

par la quantité

$$\frac{1}{p^{\nu\alpha}}\Big(1-\frac{1}{p^{\alpha}}\Big),$$

est évidemment fondamental pour notre étude. On sait classiquement que l'expression de la densité naturelle des entiers friables fait intervenir la fonction ϱ de Dickman, définie comme étant l'unique solution continue de l'équation différentielle aux différences finies

$$v\varrho'(v)+\varrho(v-1)=0$$

avec la condition initiale

$$\varrho(v)=1 \quad (0\leqslant v\leqslant 1).$$

C'est notamment l'objet de la formule de Hildebrand ([12]). Par ailleurs, une estimation de α dans notre domaine étude est indispensable et s'exprime en fonction de $\xi(u)$, qui est l'unique solution strictement positive de l'équation $1+u\xi(u)=\mathrm{e}^{\xi(u)}$, lorsque $u>1$. Nous posons $\xi(1)=0$. Ces considérations nous amènent à constater que la fonction h définie par

$$h(u,v):=\frac{\varrho(u-v)}{\varrho(u)}\mathrm{e}^{-v\xi(u)} \quad (u\geqslant 1, 0\leqslant v\leqslant u),$$

joue un rôle capital dans ce travail.

A l'instar de Hildebrand pour le cas $u=1$, nous établissons une formule asymptotique pour $V_f(x,y)$ afin d'en déduire des estimations de $C(u)$. Nous employons les notations

$$g_m(\alpha):=\prod_{p\mid m}\Big(1-\frac{1}{p^{\alpha}}\Big) \quad (m\in\mathbb{N}^*) \text{ et } \quad u_d:=\frac{\log d}{\log y} \quad (d\geqslant 1).$$

Cette formule fait également intervenir une fonction $\vartheta_{x,y}(p^{\nu})$, précisément définie au chapitre suivant. Dans le cadre de cette introduction, nous nous contentons de préciser que $\vartheta_{x,y}(p^{\nu})=h(u,u_{p^{\nu}})$ lorsque $p^{\nu}\in S(x/y,y)$ et que nous disposons d'un encadrement optimal de $\vartheta_{x,y}(p^{\nu})$ dans le domaine $p^{\nu}\in S(x,y)\smallsetminus S(x/y,y)$.

Théorème 2. *Soit $A>1$ et $z:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ une fonction telle que $z(t)\leqslant t$ pour $t\geqslant 0$, et $\lim_{t\to\infty} z(t)=+\infty$. Il existe une suite $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^{\infty}$ ne dépendant que de A, et convergeant vers 0, telle que l'on ait, uniformément pour $f\in\mathbb{A}$, $x\geqslant 2$, $y=x^{1/u}$, $1\leqslant u\leqslant A$,*

$$V_f(x,y)=P_f^*(x,y)+\langle\varphi_n,S_u\varphi_n\rangle_u-R_f^*(x,y)+\big\{\varepsilon_n+o_n(1)\big\}B_f(x,y)^2 \quad (x\to\infty), \tag{27}$$

avec

$$P_f^*(x,y):=\sum_{p^{\nu}\in S(x,y)} g_p(\alpha)\vartheta_{x,y}(p^{\nu})\frac{f(p^{\nu})^2}{p^{\nu\alpha}},$$

et

$$R_f^*(x,y):=\sum_{p\leqslant z(y)}\Big(\sum_{\nu\geqslant 1} g_p(\alpha)h(u,u_{p^{\nu}})\frac{f(p^{\nu})}{p^{\nu\alpha}}\Big)^2.$$

Dans ce théorème, S_u désigne un opérateur, exprimé en fonction de $h(u,v)$, défini sur l'espace de Hilbert $H_u=L^2([0,1],m_u)$ où m_u est une mesure adaptée au problème. φ_n est une fonction de H_u qui est une approximation quadratique de f suffisamment précise pour que

$$\|\varphi\|_u^2\leqslant\big\{(1+o(1)\big\}\sum_{p\leqslant y}\frac{f(p)^2}{p}g_p(\alpha) \quad (x\to\infty).$$

L'un des aspects cruciaux de la formule (27), est que l'opérateur S_u est autoadjoint et compact. Il existe donc une base hilbertienne de vecteurs propres diagonalisant S_u. En notant $\kappa(u)$ la plus grande valeur propre de l'opérateur S_u, nous avons donc immédiatemment,

$$\langle\varphi_n,S_u\varphi_n\rangle\leqslant\big(\kappa(u)+o(1)\big)\,\|\varphi_n\|_u^2\leqslant\big(\kappa(u)+o(1)\big)\sum_{p\leqslant y}\frac{f(p)^2}{p}g_p(\alpha). \tag{28}$$

Nous introduisons les quantités

$$h_1(u):=\max_{0\leqslant v\leqslant u-1}h(u,v) \quad \text{ et } \quad h_1^-(u):=\min_{0\leqslant v\leqslant 1}h(u,v).$$

En distinguant bien la contribution des nombres premiers $p\leqslant y$, de celle des nombres entiers $p^{\nu}\in S(x,y)$ avec $\nu\geqslant 2$, nous déduisons de la formule asymptotique (27) et de la majoration (28), l'encadrement suivant pour $C(u)$.

Corollaire 3. *Soit $u \geqslant 1$. On a*

$$\max\left\{2h(u,u), h_1^-(u)+\kappa(u)\right\} \leqslant C(u) \leqslant \max\left\{2h(u,u), h_1(u)+\kappa(u)\right\}. \tag{29}$$

Hildebrand a démontré que $\kappa(1) = 1/2$. Pour $u > 1$, nous ne pouvons pas déterminer explicitement $\kappa(u)$. Cependant, nous pouvons employer une méthode classique d'analyse numérique pour obtenir une approximation de $\kappa(u)$ avec une précision arbitraire.

De plus, en établissant la continuité de l'application $u \mapsto \kappa(u)$, nous déduisons de (29) qu'il existe un voisinage de $u = 1$ pour lequel $C(u) = 2h(u,u)$.

Par ailleurs, en étudiant la répartition des valeurs propres de l'opérateur S_u, nous obtenons une version effective de (26), soit

$$C(u) = 1 + O\Big(\frac{1}{u}\Big).$$

Nous améliorons ainsi le terme d'erreur en $1/\sqrt{u}$ qui découle des calculs menés par La Bretèche et Tenenbaum dans [2].

La forme quadratique $\langle\varphi_n, S_u\varphi_n\rangle$ figurant dans la formule (27), provient d'une certaine forme quadratique $Q_f(x,y)$ apparaissant naturellement en développant $V_f(x,y)$ en utilisant l'additivité de f. Une partie importante du travail consiste ainsi à établir que l'on peut approcher certaines sommes discrètes sur $S(x,y)$, par des intégrales ne dépendant plus de x et y. Cela nécessite d'obtenir des propriétés concernant les vecteurs propres de S_u.

Bibliographie

[1] R. de la Bretèche, Sommes d'exponentielles et entiers sans grand facteur premier, *Proc. London Math. Soc. (3)* **77** (1998), 39-78.
[2] R. de la Bretèche et G. Tenenbaum, Entiers friables : inégalité de Turán-Kubilius et applications, *Invent. Math.* **159** (2005), 531–588.
[3] R. de la Bretèche & G. Tenenbaum, Séries trigonométriques à coefficients arithmétiques, *J. Anal. Math.*, **19** (2004), 1–79
[4] H. Davenport, On some infinite series involving arithmetical functions, *Quart. J. Math. Oxford* **8** (1937), 8–13.
[5] H. Davenport, On some infinite series involving arithmetical functions (II), *Quart. J. Math. Oxford,* **8** (1937), 313–320.
[6] E. Fouvry & G. Tenenbaum, Entiers sans grand facteur premier en progressions arithmétiques, *Proc. London Math. Soc.* (3) **63** (1991), 449–494.
[11] A. Hildebrand, An asymptotic formula for the variance of an additive fonction, *Math. Z.* **183** (1983), 145-170.
[12] A. Hildebrand, On the numbers of positive integers $\leqslant x$ and free of prime factors $> y$, *J. Number Theory* **22** (1986), 289-307.
[14] A. Hildebrand et G. Tenenbaum : On integers free of large primes factors, Trans. Am. Math. Soc. **296**, 265-290 (1986).
[10] A. Khintchine, *Continued fractions*, Noordhoff, Groningen, 1963.
[11] H. Smida, Valeur moyenne des fonctions de Piltz sur les entiers sans grand facteur premier, *Acta Arith.* **63**, 1 (1993), 21–50.

Nouvelles identités de Davenport

Sommaire

1. Introduction

Considérons la fonction B définie par :

$$B(\vartheta) = \begin{cases} \langle \vartheta \rangle - \frac{1}{2} & \text{si } \vartheta \notin \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{si } \vartheta \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Son développement en série de Fourier s'écrit :

$$B(\vartheta) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi k\vartheta)}{\pi k}. \tag{1·1}$$

Soit à présent une fonction arithmétique g. En effectuant une interversion formelle de sommations, on obtient l'identité

$$\begin{aligned} \sum_{n\geqslant 1} \frac{g(n)}{n} B(n\vartheta) &= -\sum_{n,k\geqslant 1} \frac{g(n)}{\pi nk} \sin(2\pi kn\vartheta) \\ &= -\sum_{m\geqslant 1} \frac{(\mathbf{1} * g)(m)}{\pi m} \sin(2\pi m\vartheta), \end{aligned} \tag{1·2}$$

où $*$ désigne l'opérateur de convolution entre deux fonctions arithmétiques et $\mathbf{1}$ dénote la fonction définie par $\mathbf{1}(n) = 1$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. Le problème de décider si ce calcul formel est ou non licite a été introduit par Davenport dans [6] et [7]. En posant $f = \mathbf{1} * g$, l'identité (1·2) s'écrit,

$$U(f; \vartheta) + V(g; \vartheta) = 0, \tag{D_ϑ}$$

avec

$$U(f; \vartheta) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f(m)}{\pi m} \sin(2\pi m\vartheta),$$

et

$$V(g; \vartheta) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n} B(n\vartheta).$$

Étant donné un couple de fonctions arithmétiques (f, g) vérifiant

$$f = \mathbf{1} * g, \tag{1·3}$$

nous écrirons $(f,g) \in D_\vartheta$ pour signifier que les séries $U(f;\vartheta)$ et $V(g;\vartheta)$ convergent et que la relation (D_ϑ) est satisfaite, soit

$$\Delta_f(\vartheta;y) := \sum_{m\leqslant y} \frac{f(m)}{\pi m}\sin(2\pi m\vartheta) + \sum_{n\leqslant y}\frac{g(n)}{n}B(n\vartheta) = o(1) \quad (y\to\infty). \tag{1·4}$$

Conformément à l'usage, nous désignons la fonction de Möbius par la lettre μ. Dans [7], Davenport établit que $(\delta,\mu) \in D_\vartheta$ pour tout $\vartheta \in \mathbb{R}$. Cependant sa méthode échoue dans le cas de fonctions arithmétiques de référence tels que $(\log,\Lambda)$, $(\Lambda,-\mu\log)$ ou $(\tau,\mathbf{1})$, où Λ désigne la fonction de von Mangoldt et τ la fonction qui dénombre les diviseurs d'un entier. Nous décrivons les mécanismes et les limites de la méthode de Davenport dans l'Appendice A.

Nous profitons également de l'occasion pour fournir les détails permettant de confirmer l'assertion de Davenport [6] selon laquelle la théorie des fonctions L de Dirichlet implique directement la relation $(\delta,\mu) \in D_\vartheta$ pour $\vartheta \in \mathbb{Q}$. Nous donnons en appendice B, deux arguments, l'un élémentaire, l'autre analytique, auxquels Davenport pouvait vraisemblablement songer, au vu des connaissances disponibles en 1937.

Dans [3], La Bretèche et Tenenbaum ont employé une nouvelle méthode, reposant sur l'utilisation des entiers friables, pour aborder la question. Ils ont pu ainsi établir de nombreux résultats validité pour la relation (D_ϑ), parmi lesquels plusieurs critères généraux. En particulier le cas des trois couples de fonctions suscités, pour lesquels l'approche de Davenport est inefficace, a pu ainsi être complètement élucidé.

Décrivons succintement, à présent, les fondements de cette approche nouvelle.

Désignons par $P(n)$ le plus grand facteur premier d'un entier $n \geqslant 2$ et convenons que $P(1) = 1$. La méthode de [3] repose sur la P-sommation, qui consiste à sommer non plus sur les entiers $n \leqslant y$ mais sur les entiers n tels que $P(n) \leqslant y$. Ce procédé initialement introduit par Fouvry et Tenenbaum dans [9] est plus régulier que la sommation usuelle, dans la mesure où il permet d'éviter le phénomène de Gibbs (cf. le théorème 5.1 de [3]), ce qui justifie l'emploi de la P-sommation pour traiter ce problème.

La méthode de La Bretèche et Tenenbaum consiste à établir en premier lieu le P-analogue de (1·4), soit

$$\nabla_f(\vartheta;y) := \sum_{P(m)\leqslant y} \frac{f(m)}{\pi m}\sin(2\pi m\vartheta) + \sum_{P(n)\leqslant y}\frac{g(n)}{n}B(n\vartheta) = o(1) \qquad (y\to\infty). \tag{1·5}$$

Ils désignent ensuite un couple (f,g) de fonctions arithmétiques liées par (1·3) et vérifiant (1·5) comme ϑ-adapté.

Introduisant, comme dans [3], les « défauts de P-régularité » des P-sommes correspondant aux séries $U(f;\vartheta)$ et $V(g;\vartheta)$, soit

$$U_f(\vartheta;y) := \sum_{\substack{P(m)\leqslant y\\ m>y}} \frac{f(m)}{\pi m}\sin(2\pi m\vartheta), \qquad V_g(\vartheta;y) := \sum_{\substack{P(n)\leqslant y\\ n>y}}\frac{g(n)}{n}B(n\vartheta).$$

Nous obtenons alors l'identité

$$\Delta_f(\vartheta;y) = \nabla_f(\vartheta;y) - U_f(\vartheta;y) - V_g(\vartheta;y) \qquad (y\geqslant 2). \tag{1·6}$$

La Bretèche et Tenenbaum déduisent de cette formule plusieurs conditions suffisantes usuelles de validité de (D_ϑ) pour un couple ϑ-adapté, dont celle qui suit.

Proposition 1.1. *Soit (f,g) un couple ϑ-adapté. Si les deux séries $U(f;\vartheta)$ et $V(g;\vartheta)$ sont convergentes et si l'on a*

$$\liminf_{y\to\infty} |V_g(\vartheta;y)| + |U_f(\vartheta;y)| = 0, \tag{1·7}$$

alors $(f,g) \in D_\vartheta$.

Décrivons plus avant la technique employée dans [3] pour établir la ϑ-adaptation d'un couple (f,g) de fonctions liées par (1·3). Elle trouve son origine dans la formule des convolutions complètes :

étant données quatre fonctions arithmétiques A, f, g et h telles que $f = g * h$, nous avons, sous réserve de convergence absolue des séries impliquées, l'identité

$$\sum_{P(n)\leqslant y} f(n)A(n) = \sum_{P(n)\leqslant y} g(n) \sum_{P(m)\leqslant y} h(n)A(mn) \qquad (y \geqslant 1). \tag{1·8}$$

Posons maintenant

$$B(\vartheta; y) := -\sum_{P(n)\leqslant y} \frac{\sin(2\pi n\vartheta)}{\pi n}. \tag{1·9}$$

En appliquant la formule (1·8) avec $h = \mathbf{1}$ et $A : n \mapsto \sin(2\pi n\vartheta)/\pi n$, nous obtenons pour un couple (f, g) lié par (1·3) (toujours sous réserve de convergence absolue),

$$\sum_{P(m)\leqslant y} \frac{f(m)}{\pi m} \sin(2\pi m\vartheta) + \sum_{P(n)\leqslant y} \frac{g(n)}{n} B(n\vartheta; y) = 0 \quad (y \geqslant 2). \tag{1·10}$$

Nous déduisons donc des relations

$$B(\vartheta; y) = B(\vartheta) - \nabla_{\mathbf{1}}(\vartheta; y),$$

$$\nabla_\delta(\vartheta; y) = \frac{\sin(2\pi\vartheta)}{\pi} + \sum_{P(n)\leqslant y} \frac{\mu(n)}{n} B(n\vartheta),$$

les identités

$$\nabla_f(\vartheta; y) = \sum_{P(n)\leqslant y} \frac{g(n)}{n} \nabla_{\mathbf{1}}(n\vartheta; y) = \sum_{P(m)\leqslant y} \frac{f(m)}{m} \nabla_\delta(m\vartheta; y). \tag{1·11}$$

Établir la ϑ-adaptation d'un couple (f, g), lié par (1·3), consiste donc à montrer une forme en moyenne d'une des relations $\nabla_{\mathbf{1}}(\vartheta; y) = o(1)$, $\nabla_\delta(\vartheta; y) = o(1)$ que, d'après respectivement le théorème 11 de [9] et le théorème 2.2 de [3], l'on sait être valable pour tout $\vartheta \in \mathbb{R}$ lorsque $y \to \infty$.

Dans cette étude, nous emploierons la méthode de La Bretèche et Tenenbaum afin d'étudier les identités de Davenport vérifiées par les couples (τ_{z+1}, τ_z), où τ_z désigne la puissance de convolution d'ordre z de la fonction $\mathbf{1}$. Nous énoncerons donc des conditions sur ϑ et z telles que l'identité

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\tau_{z+1}(m)}{\pi m} \sin(2\pi m\vartheta) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_z(n)}{\pi n} B(n\vartheta) = 0 \tag{1·12}$$

soit valide. Le cas $z = 0$ correspond au développement en série de Fourier de la fonction B. Le cas $z = 1$ correspond au couple (δ, μ), traité par Davenport : la relation D_ϑ est alors valide pour tout $\vartheta \in \mathbb{R}$. Enfin, La Bretèche et Tenenbaum caractérisent les nombres réels ϑ pour lesquels le couple $(\tau, \mathbf{1})$ appartient à D_ϑ, élucidant ainsi le cas $z = 1$ (théorème 4.4 de [3]). Ils démontrent également que le couple (τ_{z+1}, τ_z) appartient à (D_ϑ) pour tout nombre réel ϑ dès que $|z + 1| \leqslant 1$ (théorème 4.8 de [3]).

2. Rappels, notations et préliminaires techniques

2.1. Les fonctions de Piltz

Nous commençons par rappeler quelques propriétés des fonctions de Piltz, $n \mapsto \tau_z(n)$, lorsque $z \in \mathbb{C}$.

Par définition, $\tau_z(n)$ est le coefficient générique de la série de Dirichlet de $\zeta(s)^z$ (on choisira dans toute cette étude la détermination principale du logarithme complexe) soit :

$$\zeta(s)^z = \sum_{n \geqslant 1} \frac{\tau_z(n)}{n^s}.$$

En effectuant le développement en produit eulérien de $\zeta(s)^z$, on constate que $\tau_z(p^\nu)$ s'écrit sous la forme d'un coefficient binômial généralisé, à savoir :

$$\tau_z(p^\nu) = \binom{z+\nu-1}{\nu}. \tag{2·1}$$

Pour plus de détails, nous renvoyons au chapitre II.5 de [14].

Dans [11], Selberg a évalué le comportement en moyenne de τ_z : pour tout $A > 0$, on a uniformément pour $|z| \leqslant A$, $x \geqslant 2$,

$$\sum_{n \leqslant x} \tau_z(n) = \frac{x}{\Gamma(z)}(\log z)^{z-1} + O\big(x(\log x)^{z-2}\big). \tag{2·2}$$

Nous employons la notation

$$S(x,y) := \{n \leqslant x \,:\, P(n) \leqslant y\}.$$

Nos calculs nécessitent une estimation, fournie par le théorème 1 de [13], du comportement en moyenne de τ_κ sur les entiers friables lorsque κ est un nombre réel positif. Nous posons

$$H_\varepsilon := \left\{(x,y) : x \geqslant 2, 1 \leqslant \frac{\log x}{\log y} \leqslant \exp\Big((\log y)^{3/5-\varepsilon}\Big)\right\}.$$

On a alors, uniformément pour $(x,y) \in H_\varepsilon$,

$$\sum_{n \in S(x,y)} \tau_\kappa(n) \ll x \varrho_\kappa\left(\frac{\log x}{\log y}\right)(\log y)^{\kappa-1}, \tag{2·3}$$

où ϱ_κ désigne la puissance de convolution d'ordre κ de la fonction ϱ de Dickman. Signalons que cette estimation résulte également du corollaire 2.3 de [17].

Nous aurons aussi recours à l'inégalité

$$|\tau_z(m)| \leqslant \tau_\lambda(m) \qquad (|z| \leqslant \lambda, m \geqslant 1). \tag{2·4}$$

Enfin lorsque κ est un nombre réel positif, nous disposons de la majoration

$$\tau_\kappa(n) \ll (\kappa+\varepsilon)^{\log n/\log_2 n}, \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0. \tag{2·5}$$

En particulier,

$$\tau_\kappa(n) \ll n^\varepsilon, \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0. \tag{2·6}$$

2.2. La fonction f_z

Nos résultats font intervenir une fonction arithmétique qui apparaîtra naturellement à plusieurs reprises lors de calculs ultérieurs. Lorsque z est un nombre complexe, nous posons pour $q \in \mathbb{N}$,

$$f_z(q) := \left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^z \prod_{p^\nu \| q} \left(\sum_{\ell \geqslant 0} \frac{\tau_z(p^{\ell+\nu})}{p^\ell}\right). \tag{2·7}$$

La fonction f_z est multiplicative. Il sera utile de disposer d'une autre expression de f_z. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $h_z : x \mapsto (1-x)^{-z}$ à l'ordre ν entre les points 0 et $1/p$, nous obtenons

$$\begin{aligned} f_z(p^\nu) &= \Big(1-\frac{1}{p}\Big)p^\nu \int_0^{1/p} \frac{(1/p-t)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} h_z^{(\nu)}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \nu\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^z p^\nu \tau_z(p^\nu) \int_0^{1/p} (1/p-t)^{\nu-1}(1-t)^{-t-\nu}\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{2·8}$$

En effectuant le changement de variables $u = (1-tp)/(1-t)$, il vient

$$f_z(p^\nu) = \Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{z-1} \tau_z(p^\nu)\nu \int_0^1 u^{\nu-1}\Big(\frac{p-u}{p-1}\Big)^{z-1}\,\mathrm{d}u.$$

En intégrant par parties, nous obtenons finalement l'identité

$$f_z(p^\nu) = \tau_z(p^\nu)\left\{\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{z-1} - (z-1)p^{1-z}\int_0^1 u^\nu (p-u)^{z-2}\,\mathrm{d}u\right\}. \tag{2·9}$$

En particulier, nous constatons immédiatemment que $f_1(p^\nu) = 1$ pour $\nu \geqslant 1$.

Il sera utile de disposer d'une estimation basique pour $f_z(q)$, valable pour chaque $z \in \mathbb{C}$ fixé et uniformément pour $q \geqslant 1$. Soit $\kappa \geqslant 1$ tel que $|z| \leqslant \kappa$. Nous avons

$$f_z(q) = \tau_z(q)\left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^z \prod_{p^\nu \| q}\left(1 + \frac{\tau_z(p^{\nu+1})}{\tau_z(p^\nu)p} + \sum_{\ell \geqslant 2} \frac{\tau_z(p^{\nu+\ell})}{\tau_z(p^\nu)p^\ell}\right).$$

En utilisant (2·1), nous remarquons que, pour tout nombre premier p,

$$\left|\frac{\tau_z(p^{\nu+\ell})}{\tau_z(p^\nu)}\right| \leqslant \frac{\tau_\kappa(p^{\nu+\ell})}{\tau_\kappa(p^\nu)}.$$

Comme de plus, la fonction $n \mapsto \tau_\kappa(n)$ est sous-multiplicative lorsque $\kappa \geqslant 1$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} f_z(q) &= \tau_z(q)\left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^z \prod_{p^\nu \| q}\left(1 + \frac{z+\nu}{(\nu+1)p} + O\left(\sum_{\ell \geqslant 2}\frac{\tau_\kappa(p^\ell)}{p^\ell}\right)\right) \\ &= \tau_z(q)\left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^z \prod_{p^\nu \| q}\left(1 + \frac{z+\nu}{(\nu+1)p} + O_\kappa(p^{-2})\right). \end{aligned} \tag{2·10}$$

Nous en déduisons la majoration suivante,

$$f_z(q) \ll \tau_\kappa(q)\left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^{(2\sigma-\kappa-1)/2},$$

où nous avons employé la notation $\sigma := \Re e\,(z)$. En particulier, pour tous $\varepsilon > 0$ et $z \in \mathbb{C}$ fixés,

$$f_z(q) \ll q^\varepsilon. \tag{2·11}$$

Par ailleurs, nous pouvons déduire de (2·10) la minoration suivante, valable pour chaque z fixé et uniformément pour $q \geqslant 1$.

$$f_z(q) \gg \tau_\sigma(q)\left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^{(2\sigma+\kappa+1)/2}. \tag{2·12}$$

2.3. Approximations rationnelles des nombres réels

Plusieurs de nos résultats sont exprimés en fonction des bonnes approximations rationnelles d'un nombre réel ϑ. Nous posons, selon l'usage,

$$\|\vartheta\| := \min_{n\in\mathbb{Z}} |\vartheta - n| \qquad (\vartheta \in \mathbb{R}).$$

Pour $\vartheta \in \mathbb{R}$ et $Q \in \mathbb{N}^*$ on a, en vertu du théorème de Dirichlet,

$$\mu(\vartheta; Q) := \min_{1\leqslant m\leqslant Q} \|m\vartheta\| \leqslant 1/Q.$$

Nous utilisons systématiquement la notation

$$q(\vartheta; Q) := \min\big\{q : 1 \leqslant q \leqslant Q,\ \|q\vartheta\| = \mu(\vartheta; Q)\big\}. \tag{2·13}$$

Par commodité d'écriture, nous étendons la définition de $t \mapsto q(\vartheta; t)$ à $[1, \infty[$ en posant $q(\vartheta; t) := q(\vartheta; [t])$. Les $q(\vartheta; t)$ décrivent l'ensemble

$$\big\{q : \|q\vartheta\| < \min\nolimits_{1\leqslant r<q} \|r\vartheta\|\big\}. \tag{2·14}$$

Nous rappelons enfin certaines propriétés connues du développement en fraction continue des nombres irrationnels. Notant $\{q_m\}_{m=1}^{\infty} = \{q_m(\vartheta)\}_{m=1}^{\infty}$ la suite des dénominateurs des réduites de ϑ, on a $q_0 = 1$ et

$$q_m = \min\{q : \|q\vartheta\| < \|q_{m-1}\vartheta\|\} \qquad (m \geqslant 1).$$

La croissance de la suite des q_m est au moins exponentielle. Nous disposons par exemple de l'inégalité

$$q_m \geqslant \frac{\varphi^{m-1}}{\sqrt{5}} \quad (m \geqslant 1), \tag{2·15}$$

où nous avons posé $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$.

Désignant par a_m/q_m la m-ième réduite de $\vartheta \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$, nous posons

$$\varepsilon_m := \vartheta - a_m/q_m.$$

La quantité $(-1)^m\varepsilon_m$ est de signe constant. On a

$$\frac{1}{q_m(q_{m+1}+q_m)} < |\varepsilon_m| < \frac{1}{q_m q_{m+1}} \qquad (m \geqslant 1),$$

d'où

$$|\varepsilon_m| \asymp \frac{1}{q_m q_{m+1}} \qquad (m \geqslant 1). \tag{2·16}$$

Soient B une constante positive et $Q_x := x/(\log x)^B$ $(x \geqslant 2)$. L'ensemble des nombres réels x tels que $q(\vartheta, Q_x) = q_m$ est l'intervalle défini par les conditions $q_m \leqslant Q_x < q_{m+1}$; nous le notons $[\xi_m, \xi_{m+1}[$. Nous utiliserons les relations

$$\xi_m \asymp q_m(\log q_m)^B, \quad |\varepsilon_m|\,\xi_m \asymp \frac{(\log q_m)^B}{q_{m+1}}, \quad |\varepsilon_m|\,\xi_{m+1} \asymp \frac{(\log q_{m+1})^B}{q_m}. \tag{2·17}$$

3. Énoncé des résultats

Lorsque ϑ est un nombre rationnel, l'argument employé par de la Bretèche et Tenenbaum pour traiter le cas $|z-1| \leqslant 1$ est en fait valable pour tout $z \in \mathbb{C}$. Ainsi $(\tau_{z+1}, \tau_z) \in D_\vartheta$ pour tous $\vartheta \in \mathbb{Q}$ et $z \in \mathbb{C}$. Nous nous proposons d'établir ce résultat par une méthode différente, reposant également sur la ϑ-adaptation, qui fournira un renseignement qualitatif supplémentaire. Nous obtenons l'estimation suivante.

Théorème 3.1. *Soient $z \in \mathbb{C}$ et $\vartheta \in \mathbb{Q}$. Le couple (τ_{z+1}, τ_z) appartient à D_ϑ et de plus pour tout $A > 0$, on a uniformément pour $y \geqslant 2$,*

$$\sum_{m \leqslant y} \frac{\tau_{z+1}(m)}{\pi m} \sin(2\pi m\vartheta) + \sum_{n \leqslant y} \frac{\tau_z(n)}{n} B(n\vartheta) \ll \frac{1}{(\log y)^A}. \tag{3·1}$$

Le cas $\vartheta \in \mathbb{Q}$ est relativement aisé dans la mesure où un résultat spécifique de ϑ-adaptation pour les rationnels s'applique ici, à savoir le théorème 3.4 de [3]. En revanche, lorsque ϑ est irrationnel, les résultats généraux énoncés dans la troisième partie de [3] ne s'appliquent que lorsque $|z-1| \leqslant 1$ (théorème 3.2 de [3]). Nous prouvons cependant que l'identité (1·12) est valide pour une large classe de nombres réels ϑ.

Rappelant la définition de $f_z(q)$ en (2·7), nous introduisons l'ensemble $\Xi(z)$ des nombres irrationnels ϑ tels que

$$\lim_{m \to \infty} \frac{(\log q_{m+1})^{|z|}}{q_m} f_{|z|}(q_m) = 0. \tag{3·2}$$

Nous obtenons alors le résultat suivant.

Théorème 3.2. *Soient $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}_+^*$ et ϑ un nombre irrationnel. Si $\vartheta \in \Xi(z)$ alors le couple (τ_{z+1}, τ_z) appartient à (D_ϑ).*

Lorsque z est fixé, le complémentaire dans $\mathbb{R}$ de $\Xi(z)$ est de mesure de Lebesgue nulle, d'après l'estimation (2·11) de $f_{|z|}$ et le théorème 31 de [10]. En fait la démonstration de [10] fournit un résultat plus fort : la dimension de Hausdorff de $\mathbb{R} \smallsetminus \Xi(z)$ est nulle.

Nous pouvons également envisager la nature de $\Xi(z)$ en termes de mesure d'irrationnalité. On dit qu'un nombre réel ϑ admet le nombre positif μ pour mesure d'irrationnalité si, pour tous $\varepsilon > 0$, $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}$, on a $|x - p/q| \geqslant q^{-\mu-\varepsilon}$ pour q assez grand. D'après le théorème de Dirichlet, toute mesure d'irrationnalité μ vérifie $\mu \geqslant 2$. Nous pouvons alors affirmer que tout nombre réel ϑ possédant une mesure d'irrationnalité finie appartient à $\Xi(z)$. En effet, si μ est une mesure d'irrationnalité pour ϑ, alors, d'après (2·16), nous avons pour m assez grand,

$$\frac{1}{q_m^{\mu+\varepsilon}} \leqslant \left| \vartheta - \frac{a_m}{q_m} \right| \leqslant \frac{1}{q_m q_{m+1}},$$

ce qui entraîne

$$q_{m+1} \leqslant q_m^{\mu-1+\varepsilon},$$

et donc $\vartheta \in \Xi(z)$. Par exemple, les nombres $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$ appartiennent à l'ensemble $\Xi(z)$, d'après les résultats établis dans [1].

Cependant l'ensemble $\Xi(z)$ est inclus strictement dans $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$. Nous pouvons en effet construire une infinité de nombres réels ϑ pour lesquels la condition (3·2) n'est pas satisfaite, en déterminant leurs réduites par récurrence.

Lorsque $|z-1| \leqslant 1$, le théorème 4.8 de [3] affirme que $(\tau_{z+1}, \tau_z) \in (D_\vartheta)$ pour tout $\vartheta \in \mathbb{R}$. La condition (3·2) n'est donc pas nécessaire dans ce cas.

Étant donné $z \in \mathbb{R}_+^*$, nous construisons en appendice C un nombre réel ϑ, qui vérifie la condition (3·2), mais pour lequel la relation (D_ϑ) n'est pas satisfaite. Le théorème 3.2 est donc optimal dans la mesure où l'on ne peut pas l'étendre à $z \in \mathbb{R}_+^*$.

Le théorème suivant permet d'élucider complètement le cas $z \in \mathbb{R}_+^*$, exclu dans le Théorème 3.2 : nous caractérisons les nombres réels ϑ pour lesquels $(\tau_{z+1}, \tau_z) \in (D_\vartheta)$ et généralisons ainsi le théorème 4.4 de [3].

Théorème 3.3. *Soient $\kappa > 0$ et ϑ un nombre irrationnel. Le couple $(\tau_{\kappa+1}, \tau_\kappa)$ appartient à (D_ϑ) si, et seulement si, la série*

$$\sum_{m\geqslant 1} (-1)^m \frac{(\log q_{m+1})^\kappa}{q_m} f_\kappa(q_m) \tag{3·3}$$

converge.

Lorsque $z \in \mathbb{C}$, nous montrons (cf Proposition 6.1 *infra*) que la série

$$\sum_{m\geqslant 1} (-1)^m \frac{(\log q_{m+1})^z}{q_m} f_z(q_m) \tag{3·4}$$

converge si, et seulement si, les séries $U(\tau_{z+1}; \vartheta)$ et $V(\tau_z; \vartheta)$ convergent. De fait, nous démontrons dans la preuve du Théorème 3.2 que la condition (3·2) entraîne la convergence de la série (3·4), dès que $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}_+^*$. En revanche, lorsque $z \in \mathbb{R}_+^*$, la condition (3·2) n'est plus suffisante mais nécessaire à la convergence de la série (3·4). Cela explique pourquoi l'énoncé du Théorème 3.2 n'inclut pas le cas $z \in \mathbb{R}_+^*$. Nous remarquons enfin que l'ensemble des réels ϑ satisfaisant à l'identité (1·12) pour $z \in \mathbb{R}_+^*$ constitue un ensemble possédant les mêmes caractéristiques que les ensembles Ξ décrit précédemment, en terme de mesure de Lebesgue et de mesure d'irrationnalité.

D'après le Théorème 3.3, lorsque $\kappa > 0$, il suffit que la série

$$\sum_{m\geqslant 1} \frac{(\log q_{m+1})^\kappa}{q_m} f_\kappa(q_m)$$

converge pour que $(\tau_{\kappa+1}, \tau_\kappa) \in (D_\vartheta)$. Cette condition n'est cependant pas nécessaire. En effet, nous pouvons construire un nombre réel ϑ tel que la série

$$\sum_{m\geqslant 1} (-1)^m \frac{(\log q_{m+1})^\kappa}{q_m} f_\kappa(q_m) \tag{3·5}$$

converge, tandis que la série

$$\sum_{m\geqslant 1} \frac{(\log q_{m+1})^\kappa}{q_m} f_\kappa(q_m) \tag{3·6}$$

diverge. Le détail de cette construction, qui fournit également le contre-exemple annoncé après le Théorème 3.2, figure en appendice C.

4. Le cas ϑ rationnel : preuve du Théorème 3.1

La preuve du Théorème 3.1 nécessite quelques estimation préliminaires. Nous aurons tout d'abord besoin d'une estimation du comportement en moyenne de la fonction τ_z sur les entiers friables, moins précise que (2·3) mais valable sur un domaine plus large.

Proposition 4.1. *Soit $\kappa > 0$. Il existe une constante $b = b(\kappa)$ telle que l'on ait uniformément, pour $x, y \geqslant 2$, $z \in \mathbb{C}$, $|z| \leqslant \kappa$,*

$$\sum_{n\in S(x,y)} \tau_z(n) \ll x(\log x)^{\kappa-1} \mathrm{e}^{-b\log x/\log y}. \tag{4·1}$$

Démonstration. Lorsque $2 \leqslant x \leqslant y$, nous retrouvons l'estimation (2·2) de Selberg. Nous supposons désormais que $2 \leqslant y \leqslant x$. D'après l'inégalité (2·4), nous avons

$$\sum_{n\in S(x,y)} \tau_z(n) \ll \sum_{n\in S(x,y)} \tau_\kappa(n).$$

D'après l'estimation de Selberg (2·2), nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\sum_{n\in S(x,y)}\tau_\kappa(n) &= \sum_{n\in S(\sqrt{x},y)}\tau_\kappa(n)+\sum_{\substack{\sqrt{x}\leqslant n\leqslant x\\ P(n)\leqslant y}}\tau_\kappa(n)\\ &\ll \sqrt{x}(\log x)^{\kappa-1}+\sum_{\substack{\sqrt{x}\leqslant n\leqslant x\\ P(n)\leqslant y}}\tau_\kappa(n).\end{aligned}$$

Notons $n(y)$ le produit de tous les diviseurs d d'un nombre entier n tels que $P(d)\leqslant y$. Lorsque $P(n)\leqslant y$, $n(y)=n$. Ainsi,

$$\sum_{\substack{\sqrt{x}<n\leqslant x\\ P(n)\leqslant y}}\tau_\kappa(n)\ll\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n(y)\geqslant\sqrt{x}}}\tau_\kappa(n).$$

Nous pouvons alors appliquer le lemme 2 de [15] avec $f=\tau_\kappa$, $\zeta=\sqrt{x}$, $\xi=y$: il existe une constante $b=b(\kappa)$ telle que

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n(y)\geqslant\sqrt{x}}}\tau_\kappa(n)\ll x(\log x)^{\kappa-1}\mathrm{e}^{-b\log x/\log y}.$$

Nous obtenons donc la conclusion souhaitée. □

Donnons à présent une estimation du comportement en moyenne de la fonction $n\mapsto\tau_z(n)\chi(n)$ sur les entiers friables, où χ est un caractère non principal de Dirichlet.

Proposition 4.2. *Soit $A>0$ et $\kappa\geqslant 1$. Il existe une constante $d=d(\kappa,A)$ telle que l'on ait uniformément pour $z\in\mathbb{C}$, $|z|\leqslant\kappa$, $2\leqslant y\leqslant x$, $1\leqslant q\leqslant(\log x)^A$, χ un caractère non principal de module q,*

$$\sum_{n\in S(x,y)}\chi(n)\tau_z(n)\ll x\mathrm{e}^{-c(\log x)^{1/3}}.$$

L'uniformité en q ne nous est pas indispensable pour établir le Théorème 3.1 mais nous la mentionnons à fin de références ultérieures.

Démonstration. Dans un souci de lisibilité, nous employons la notation $X:=\mathrm{e}^{\sqrt{\log x}}$. Nous utilisons une technique développée par Tenenbaum dans [15]. Remarquons tout d'abord, en vertu de la Proposition 4.1, que

$$\sum_{n\in S(x,y)}\chi(n)\tau_z(n)=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ X<P(n)\leqslant y}}\chi(n)\tau_z(n)+O(x\mathrm{e}^{-(b/2)\sqrt{\log x}}).\tag{4·2}$$

Maintenant, nous effectuons la décomposition

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ X<P(n)\leqslant y}}\chi(n)\tau_z(n) &= \sum_{X<p\leqslant y}\chi(p)\sum_{\substack{m\leqslant x/p\\ P(m)\leqslant p}}\chi(m)\tau_z(mp)\\ &= S_1+S_2,\end{aligned}\tag{4·3}$$

où,

$$S_1:=\kappa\sum_{X<p\leqslant y}\chi(p)\sum_{\substack{m\leqslant x/p\\ P(m)\leqslant p}}\chi(m)\tau_z(m),$$

et

$$S_2:=\sum_{X<p\leqslant y}\chi(p)\sum_{\substack{m\leqslant x/p\\ P(m)\leqslant p\\ (m,p)>1}}\chi(m)\tau_z(mp)-\kappa\sum_{X<p\leqslant y}\chi(p)\sum_{\substack{m\leqslant x/p\\ P(m)\leqslant p\\ (m,p)>1}}\chi(m)\tau_z(m).$$

Comme $\kappa \geqslant 1$, la fonction τ_κ est sous-multiplicative, ce qui fournit

$$\begin{aligned} S_2 &\ll \sum_{X<p\leqslant y}\sum_{\nu\geqslant 1}\tau_\kappa(p^\nu)\sum_{k\leqslant x/p^{\nu+1}}\tau_\kappa(k) \\ &\ll x(\log x)^{\kappa-1}\sum_{X<p\leqslant y}\frac{1}{p}\sum_{\nu\geqslant 1}\frac{\tau_\kappa(p^\nu)}{p^\nu}\,. \\ &\ll x(\log x)^{\kappa-1}\sum_{X<p\leqslant y}\frac{1}{p^2} \end{aligned}$$

Finalement,

$$S_2 \ll x(\log x)^{\kappa-1}\mathrm{e}^{-\sqrt{\log x}}. \tag{4·4}$$

Pour estimer S_1, nous remarquons tout d'abord que

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ X<P(n)\leqslant y}}\chi(n)\tau_z(n) = \kappa\sum_{\substack{mP(m)\leqslant x\\ P(m)\leqslant y}}\chi(m)\tau_z(m)\sum_{\substack{P(m)\leqslant p\leqslant x/m\\ X<p\leqslant y}}\chi(p).$$

D'après le théorème des nombres premiers en progressions arithmétiques, pour tout $B > 0$, il existe une constante $c(B)$, pour laquelle on a uniformément, pour $t \geqslant 2$, $1 \leqslant q \leqslant (\log t)^B$ et χ un caractère non principal de module q,

$$\sum_{p\leqslant t}\chi(p) \leqslant t\mathrm{e}^{-c(B)\sqrt{\log t}}.$$

Nous en déduisons donc, en posant $c_1 := c(2A)$,

$$S_1 \ll x\sum_{\substack{mP(m)\leqslant x\\ P(m)\leqslant y}}\frac{\tau_\kappa(m)}{m}\mathrm{e}^{-c(2A)\sqrt{\log(x/m)}}.$$

Nous posons à présent, pour $0 \leqslant j \leqslant \log x$, $M_j := \frac{x}{e^j}$. Dès lors, nous avons

$$\begin{aligned} S_1 &\ll x\sum_{0\leqslant j\leqslant \log x}\frac{\mathrm{e}^{-c_1\sqrt{j}}}{M_j}\sum_{\substack{M_{j+1}<m\leqslant M_j\\ P(m)\leqslant \mathrm{e}^{j+1}}}\tau_\kappa(m) \\ &\ll x(\log x)^{\kappa-1}\sum_{0\leqslant j\leqslant \log x}\mathrm{e}^{-c_1\sqrt{j}-b(\log x)/(j+1)}. \end{aligned}$$

Or, pour tout $0 \leqslant j \leqslant \log x$, $c_1\sqrt{j} + b(\log x)/(j+1) \gg_{A,\kappa} (\log x)^{1/3}$. Par conséquent, il existe une constante $d = d(A,\kappa)$ telle que

$$S_1 \ll x\mathrm{e}^{-d(\log x)^{1/3}}. \tag{4·5}$$

Les estimations (4·2), (4·3), (4·4) et (4·5) fournissent la conclusion attendue. □

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le Théorème 3.1. Soit ϑ un nombre rationnel s'écrivant $\vartheta := a/q$ avec $(a,q) = 1$ et $z \in \mathbb{C}$. Étant donné $A > 0$, nous établissons l'estimation (3·1) par le biais de la formule (1·6) appliquée à $f = \tau_{z+1}$.

Le théorème 3.4 permet d'établir directement que le couple (τ_{z+1}, τ_z) est ϑ-adapté. En fait la démonstration de ce théorème permet d'obtenir une estimation effective de $\nabla_{\tau_{z+1}}(\vartheta; y)$. Nous redonnons les détails dans un souci de lisibilité. D'après la définition de la fonction τ_z, nous disposons de la majoration suivante, valable pour tout $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}\sum_{P(n)\leqslant y} \frac{|\tau_z(n)|}{n} &\leqslant \sum_{P(n)\leqslant y} \frac{\tau_{|z|}(n)}{n} \prod_{p\leqslant y}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{-|z|} \\ &\ll (\log y)^{|z|}.\end{aligned} \tag{4·6}$$

Nous pouvons donc appliquer la formule (1·11) puisque la majoration précédente garantit la convergence absolue des séries qui y sont impliquées. Nous obtenons ainsi, comme nous l'avons remarqué dans l'introduction,

$$\nabla_{\tau_{z+1}}(\vartheta; y) = \sum_{P(m)\leqslant y} \frac{\tau_{z+1}(m+1)}{m} \nabla_\delta(m\vartheta; y). \tag{4·7}$$

Or, d'après le théorème 2.2 de [3], nous avons uniformément pour $y \geqslant 2$, $a \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant q \leqslant y/(\log y)^{5(A+|z|+1)+20}$,

$$\nabla_\delta(\vartheta; y) \ll \frac{1}{(\log y)^{A+|z|+1}}.$$

Nous en déduisons, qu'uniformément pour $y \geqslant 2$,

$$\nabla_{\tau_{z+1}}(\vartheta; y) \ll \frac{1}{(\log y)^A}. \tag{4·8}$$

Estimons à présent le défaut de P-régularité $U_{\tau_{z+1}}(\vartheta; y)$. La famille des caractères impairs de Dirichlet de module divisant q constitue une base de l'espace vectoriel des fonctions impaires, q-périodiques, définies sur $\mathbb{N}$ et à valeurs complexes. Or la fonction $m \mapsto \sin(2\pi am/q)$ est une fonction impaire et q-périodique. Nous avons donc, d'après le Proposition 4.2, uniformément pour $2 \leqslant y \leqslant x$,

$$Z_{\tau_{z+1}}(x, y; a/q) := \sum_{\substack{m\leqslant x\\ P(m)\leqslant y}} \tau_{z+1}(m)\sin(2\pi am/q) \ll x\mathrm{e}^{-c(\log x)^{1/3}}.$$

Nous procédons alors à une sommation d'Abel : pour $y \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}U_{\tau_{z+1}}(a/q; y) &= \sum_{\substack{m>y\\ P(m)\leqslant y}} \frac{\tau_{z+1}(m)}{m}\sin(2\pi am/q) \\ &= \frac{Z_{\tau_{z+1}}(y, y; a/q)}{y} + \int_y^\infty \frac{Z_{\tau_{z+1}}(t, y; a/q)}{t^2}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Nous obtenons donc l'estimation

$$U_{\tau_{z+1}}(a/q; y) \ll \frac{1}{(\log y)^A} \quad (y \geqslant 2). \tag{4·9}$$

Comme la fonction $n \mapsto B(an/q)$ est également q-périodique, un argument identique fournit la majoration

$$V_{\tau_z}(a/q; y) \ll \frac{1}{(\log y)^A} \quad (y \geqslant 2). \tag{4·10}$$

En reportant les estimations (4·8), (4·9) et (4·10) dans la formule (1·6), nous obtenons bien (3·1).

Pour montrer que $(\tau_{z+1}, \tau_z) \in D_\vartheta$, il nous suffit de prouver que la série $U(\tau_{z+1}; a/q)$ est convergente. Le lemme 6.10 de [3] permet, en identifiant les parties imaginaires de l'égalité fournie, d'obtenir l'évaluation suivante, valable pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$Z_{\tau_{z+1}}\Big(x, x; \frac{a}{q}\Big) := \sum_{n\leqslant x} \tau_{z+1}(n)\sin\Big(\frac{2\pi an}{q}\Big) \ll \frac{x}{(\log x)^A}, \quad \text{pour tout } A > 0. \tag{4·11}$$

À présent, en effectuant une sommation d'Abel, il vient

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{\tau_{z+1}(n)}{n}\sin\Big(\frac{2\pi an}{q}\Big) = \frac{Z_{\tau_{z+1}}(x, x; a/q)}{x} + \int_1^x Z_{\tau_{z+1}}\Big(t, t; \frac{a}{q}\Big)\frac{\mathrm{d}t}{t^2}. \tag{4·12}$$

En appliquant (4·11) avec $A > 1$, nous constatons dans (4·12) que le premier terme du membre de droite tend vers 0 et que l'intégrale est convergente. La série $U(\tau_{z+1}, \vartheta)$ est donc convergente.

5. La ϑ-adaptation du couple (τ_{z+1}, τ_z) lorsque $\vartheta \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$

Nous énonçons avant tout un lemme permettant d'alléger la preuve des résultats clefs de cette section.

Lemme 5.1. *Soit $\kappa > 0$. On a uniformément pour $y \geqslant 2$, $q \in \mathbb{N}^*$, $q \leqslant y$,*

$$\sum_{P(n)\leqslant y} \frac{\tau_\kappa(nq)}{n} \ll (\log y)^\kappa f_\kappa(q).$$

Démonstration. Soit q un entier fixé. La fonction arithmétique $n \mapsto \tau_\kappa(nq)/\tau_\kappa(q)$ est multiplicative. On obtient donc pour $q \leqslant y$, en effectuant un développement eulérien :

$$\begin{aligned}\sum_{P(n)\leqslant y} \frac{\tau_\kappa(nq)}{n} &= \tau_\kappa(q) \prod_{p\leqslant y} \sum_{\nu\geqslant 0} \frac{\tau_\kappa(p^\nu q)}{p^\nu \tau_\kappa(q)} \\ &= \tau_\kappa(q) \prod_{\substack{p\leqslant y\\ p\nmid q}} \sum_{\nu\geqslant 0} \frac{\tau_\kappa(p^\nu)}{p^\nu} \quad \prod_{\substack{p\leqslant y\\ p^j \| q}} \sum_{\nu\geqslant 0} \frac{\tau_\kappa(p^{\nu+j})}{p^\nu \tau_\kappa(p^j)} \\ &= \prod_{p\leqslant y} (1-1/p)^{-\kappa} \quad \prod_{p\mid q} (1-1/p)^\kappa \quad \prod_{p^j\| q} \sum_{\nu\geqslant 0} \frac{\tau_\kappa(p^{\nu+j})}{p^\nu},\end{aligned}$$

ce qui fournit le résultat annoncé. □

Lorsque $0 < |z| \leqslant 1$, la fonction τ_z est bornée et appartient donc clairement à l'ensemble $\mathcal{L}^2$ des fonctions arithmétiques h telles que

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\leqslant x} |h(n)|^2 < \infty.$$

D'après le lemme 9.5 de [3], le couple (τ_{z+1}, τ_z) est alors ϑ-adapté si, et seulement si,

$$\lim_{y\to\infty} \sum_{P(n)\leqslant y} \tau_z(n)\{1 - \varrho(u^*_{n\vartheta,y})\} \frac{B(n\vartheta)}{n} = 0,$$

où nous avons employé la notation $u^*_{\vartheta,y} := \log(1/\|\vartheta\|)/\log y$. La proposition suivante permet, lorsque $|z| > 1$, d'étendre ce résultat à une large classe de réels ϑ comprenant notamment l'ensemble $\Xi(z)$.

Proposition 5.2. *Soient z un nombre complexe et ϑ un nombre réel tels qu'il existe $\varepsilon > 0$ satisfaisant à*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{(\log q_{m+1})^{|z|-1+\varepsilon}}{q_m} = 0.$$

Le couple (τ_{z+1}, τ_z) est ϑ-adapté si, et seulement si,

$$\lim_{y\to\infty} \sum_{P(n)\leqslant y} \tau_z(n)\{1 - \varrho(u^*_{n\vartheta,y})\} \frac{B(n\vartheta)}{n} = 0.$$

Démonstration. Pour alléger les notations, nous poserons systématiquement $\kappa := |z|$ dans toute la suite de cette démonstration. D'après la remarque qui précède, nous pouvons supposer $\kappa > 1$. Soit A un nombre réel tel que $A > \kappa$. Nous posons $Q_y := y/(\log y)^{4A+20}$ et $q := q(\vartheta, Q_y)$. En appliquant la formule (1·10) avec $f = \tau_{z+1}$ et $g = \tau_z$, nous pouvons écrire que

$$\sum_{P(m)\leqslant y} \frac{\tau_{z+1}(m)}{\pi m} \sin(2\pi m\vartheta) + \sum_{P(n)\leqslant y} \frac{\tau_z(n)}{n} B(n\vartheta; y) = 0 \quad (y \geqslant 2).$$

Cette identité est licite car, d'après l'estimation (4·6), les séries impliquées sont absolument convergentes. Nous obtenons donc, comme nous l'avons remarqué dans l'introduction,

$$\nabla_{\tau_{z+1}}(\vartheta; y) = \sum_{P(n)\leqslant y} \frac{\tau_z(n)}{n} \nabla_{\mathbf{1}}(n\vartheta; y).$$

En appliquant le théorème 2.2 de [3] et en posant $q_n := q(n\vartheta; Q_y)$, il vient

$$\nabla_{\tau_{z+1}}(\vartheta; y) = \sum_{P(n)\leqslant y} \tau_z(n)\{1 - \varrho(u^*_{n\vartheta,y})\} \frac{B(n\vartheta)}{n} + R_1(y) + R_2(y), \tag{5·1}$$

où

$$R_1(y) \ll \frac{1}{\log y} \sum_{P(n)\leqslant y} \frac{2^{\omega(q_n)}(\log q_n)^2 \varrho(u^*_{n\vartheta,y}) \log(u^*_{\vartheta,y} + 2)}{\varphi(q_n)} \frac{\tau_\kappa(n)}{n}$$

et

$$R_2(y) \ll \frac{1}{(\log y)^A} \sum_{P(n)\leqslant y} \frac{\tau_\kappa(n)}{n}.$$

On a $R_2(y) \ll (\log y)^{\kappa - A}$ donc $R_2(y) = o(1)$ lorsque $y \to \infty$ puisque nous avons supposé $A > \kappa$. Il suffit donc de prouver que

$$R_1(y) = o(1) \quad (y \to \infty) \tag{5·2}$$

pour établir la conclusion annoncée.

La fonction ϱ de Dickman satisfait l'inégalité (cf Théorème 5 chapitre III.5 de [14]),

$$\varrho(v) \leqslant \frac{1}{\Gamma(v+1)} \quad (v \geqslant 0),$$

où Γ désigne la fonction Gamma d'Euler. La fonction $v \mapsto \varrho(v)\log(v+2)$ est donc bornée sur $\mathbb{R}_+$. De plus, d'après des estimations classiques (cf chapitre I.5 de [14]), nous avons, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé,

$$\frac{2^{\omega(q)}(\log q)^2}{\varphi(q)} \ll \frac{1}{q^{1-\varepsilon}} \quad (q \geqslant 1).$$

Nous obtenons ainsi que

$$R_1(y) \ll \frac{1}{\log y} \sum_{P(n)\leqslant y} \frac{\tau_\kappa(n)}{n q_n^{1-\varepsilon}}.$$

Posons $Y := y^{c\log_2 y}$ où c est une constante que nous fixerons par la suite. Majorons tout d'abord la contribution à $R_1(y)$ des entiers y-friables excédant Y. Pour cela, définissons $Z := Z(y) \in \mathbb{R}$ par

$$\frac{\log Z}{\log y} = \exp(\log y)^{1/2}.$$

Nous pouvons alors écrire

$$\sum_{\substack{n>Y\\ P(n)\leqslant y}} \frac{\tau_\kappa(n)}{n} = \sum_{\substack{Y<n\leqslant Z\\ P(n)\leqslant y}} \frac{\tau_\kappa(n)}{n} + \sum_{\substack{n>Z\\ P(n)\leqslant y}} \frac{\tau_\kappa(n)}{n}.$$

D'après (2·3), l'estimation

$$\sum_{n\in S(x,y)} \tau_\kappa(n) \ll x\varrho_\kappa(u)(\log y)^{\kappa-1} \tag{5·3}$$

est valable pour tous x, y tels que $2 \leqslant y \leqslant x \leqslant Z$ (nous rappelons la notation $u := \log x/\log y$). De plus, il résulte du théorème 1 de [12] que, pour tout $B > 0$,

$$\varrho_\kappa(v) \ll_B \mathrm{e}^{-Bv} \quad (v \geqslant 1). \tag{5·4}$$

En effectuant une sommation d'Abel, puis en utilisant les estimations (5·3) et (5·4), nous obtenons

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{Y<n\leqslant Z\\ P(n)\leqslant y}} \frac{\tau_\kappa(n)}{n} &\ll \left(\mathrm{e}^{-B\log Y/\log y} - \mathrm{e}^{-B\log Z/\log y}\right)(\log y)^{\kappa-1}\\ &\ll \mathrm{e}^{-B\log Y/\log y}(\log y)^{\kappa-1},\end{aligned}$$

pour tout nombre réel $B > 0$.

D'après l'estimation (4·1), il existe une constante $b = b(\kappa)$ telle que

$$\begin{aligned}\sum_{n \in S(x,y)} \tau_\kappa(n) &\ll x\mathrm{e}^{-bu}(\log x)^{\kappa-1} \\ &\ll x\mathrm{e}^{-bu/2} \quad (x > Z).\end{aligned}$$

En effectuant une sommation d'Abel, nous obtenons

$$\sum_{\substack{n>Z \\ P(n)\leqslant y}} \frac{\tau_\kappa(n)}{n} \ll \mathrm{e}^{-b\log Z/(2\log y)} \log y.$$

Nous en déduisons que, pour tout $B > 0$ fixé, nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n>Y \\ P(n)\leqslant y}} \frac{\tau_\kappa(n)}{n} &\ll \sum_{\substack{Y<n\leqslant Z \\ P(n)\leqslant y}} \frac{\tau_\kappa(n)}{n} \\ &\ll \mathrm{e}^{-B\log Y/\log y}(\log y)^{\kappa-1} \ll (\log y)^{\kappa-1-Bc}.\end{aligned}$$

Il suffit de choisir $B > (\kappa-1)/c$ pour constater que cette contribution tend vers 0 lorsque $y \to \infty$.

Maintenant nous observons que :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\log y} \sum_{\substack{n\leqslant Y \\ q_n \geqslant (\log y)^{2\kappa}}} \frac{\tau_\kappa(n)}{nq_n^{1-\varepsilon}} &\ll \frac{(\log Y)^\kappa}{(\log y)^{1+2\kappa(1-\varepsilon)}} \\ &\ll \frac{(\log_2 y)^\kappa}{(\log y)^{1+\kappa(1-2\varepsilon)}} = o(1) \qquad (y \to \infty).\end{aligned}$$

Il nous reste donc à étudier la contribution de

$$S(y) := \frac{1}{\log y} \sum_{\substack{n\leqslant Y \\ q_n \leqslant (\log y)^{2\kappa}}} \frac{\tau_\kappa(n)}{nq_n^{1-\varepsilon}}.$$

Nous avons la majoration

$$S(y) \ll \frac{1}{(\log y)^{1-4\kappa\varepsilon}} \sum_{\substack{n\leqslant Y \\ q_n \leqslant (\log y)^{2\kappa}}} \frac{\tau_\kappa(n)}{nq_n^{1+\varepsilon}}$$

Soit $n \leqslant Y$ tel que $q_n \leqslant (\log y)^{2\kappa}$. Nous pouvons alors écrire $n = m/d$ avec $d := q_n$ et $m := nq_n \leqslant Y(\log y)^{2\kappa}$. De plus, par définition de $q_n = q(n\vartheta, y)$, nous avons

$$\|m\vartheta\| = \|q_n(n\vartheta)\| \leqslant \frac{1}{Q_y}.$$

Comme de plus $Y(\log)^{2\kappa} \leqslant Y^2$ pour y assez grand, cela implique la majoration

$$\begin{aligned}S(y) &\ll \frac{1}{(\log y)^{1-4\kappa\varepsilon}} \sum_{\substack{m\leqslant Y^2 \\ \|m\vartheta\|\leqslant 1/Q_y}} \frac{1}{m} \sum_{d|m} \frac{\tau_\kappa(m/d)}{d^\varepsilon} \\ &= \frac{1}{(\log y)^{1-4\kappa\varepsilon}} \sum_{\substack{m\leqslant Y^2 \\ \|m\vartheta\|\leqslant 1/Q_y}} \frac{\tau_\kappa(m)}{m} F_\kappa(m),\end{aligned}$$

où F_κ est la fonction multiplicative définie, pour tout nombre premier p et tout entier $\nu \geqslant 1$, par

$$F_\kappa(p^\nu) = \sum_{0 \leqslant j \leqslant \nu} \frac{\tau_\kappa(p^{\nu-j})}{\tau_\kappa(p^\nu)p^{j\varepsilon}}.$$

Comme $\kappa > 1$, la fonction $\nu \mapsto \tau_\kappa(p^\nu)$ est croissante, ce qui implique que l'on ait, uniformément pour tout nombre premier p et tout entier $\nu \geqslant 1$,

$$F_\kappa(p^\nu) = 1 + O_\varepsilon(1/p^\varepsilon). \tag{5·5}$$

Soient α et β deux exposants conjugués ; d'après l'inégalité de Hölder,

$$S(y) \ll \frac{1}{(\log y)^{1-4\kappa\varepsilon}} S_1(y)^{1/\alpha}\, S_2(y)^{1/\beta}, \tag{5·6}$$

où

$$S_1(y) := \sum_{\substack{n \leqslant Y^2 \\ \|n\vartheta\| \leqslant 1/Q_y}} \frac{\tau_\kappa(n)^\alpha}{n}$$

et

$$S_2(y) := \sum_{n \leqslant Y^2} \frac{F_\kappa(n)^\beta}{n}.$$

D'après (5·5), nous obtenons immédiatemment que

$$S_2(y) \ll \prod_{p \leqslant Y^2} \left(1 + \frac{1}{p} + O\left(\frac{1}{p^{1+\varepsilon}}\right)\right) \ll \log Y. \tag{5·7}$$

Pour étudier la contribution S_1, nous considérons l'unique entier $m = m(y)$ tel que

$$q_m \leqslant Q_y/2 < q_{m+1}.$$

Le nombre réel ϑ peut alors s'écrire :

$$\vartheta = \frac{a}{q_m} + \frac{\gamma}{q_m q_{m+1}} \quad , \quad |\gamma| \leqslant 1.$$

Si $n \leqslant \frac{1}{2} q_{m+1}$ et $n \not\equiv 0 \,(\operatorname{mod} q_m)$ alors

$$\|n\vartheta\| = \left\| \frac{na}{q_m} + \frac{n\gamma}{q_m q_{m+1}} \right\| \geqslant \frac{1}{2q_m} > \frac{1}{Q_y}.$$

Ainsi,

$$S_1(y) \ll G(y) + H(y) \tag{5·8}$$

où

$$G(y) := \sum_{\substack{n \leqslant Y^2 \\ n \equiv 0 \,(\operatorname{mod} q_m)}} \frac{\tau_\kappa(n)^\alpha}{n}$$

et

$$H(y) := \sum_{\substack{q_{m+1}/2 < n \leqslant Y^2 \\ \|n\vartheta\| \leqslant 1/Q_y}} \frac{\tau_\kappa(n)^\alpha}{n}.$$

Pour étudier la quantité $G(y)$, nous observons que l'on peut écrire, pour tout nombre entier m,

$$\tau_\kappa(m)^\alpha = \tau_{\kappa^\alpha} * g(m)$$

où g est une fonction multiplicative telle que pour tout nombre premier p et tout entier $\nu \geqslant 1$,

$$g(p) = 0 \text{ et } g(p^\nu) \ll p^{\delta\nu},$$

où δ est un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0 : 1/2[$. En utilisant le Lemme 5.1 et l'estimation (2·11), nous obtenons alors

$$\begin{aligned} G(y) &\ll \sum_{\substack{P(n)\leqslant Y^2 \\ n\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, q_m)}} \frac{\tau_\kappa(n)^\alpha}{n} \\ &\ll \frac{1}{q_m} \sum_{P(n)\leqslant Y^2} \frac{\tau_{\kappa^\alpha}(nq_m)}{n} \sum_{P(k)\leqslant Y^2} \frac{g(k)}{k} \\ &\ll \frac{(\log Y)^{\kappa^\alpha} f_{\kappa^\alpha}(q_m)}{q_m}. \end{aligned}$$

Donc, pour tout $\varepsilon' > 0$,

$$G(y) \ll \frac{(\log y)^{\kappa^\alpha+\varepsilon'}}{q_m}. \tag{5·9}$$

Étudions enfin la contribution $H(y)$. En utilisant la majoration (2·5), nous obtenons tout d'abord que

$$H(y) \ll (\kappa+1)^{2\alpha \log Y/\log_2 Y} \sum_{\substack{q_{m+1}/2<n\leqslant Y^2 \\ \|n\vartheta\|\leqslant 1/Q_y}} \frac{1}{n}.$$

À présent, nous observons que la condition $\|n\vartheta\| \leqslant 1/Q_y$ implique que $\|n\vartheta\|$ appartient à au plus q_{m+1}/Q_y intervalles de longueur $1/q_{m+1}$. Soit I l'un de ces intervalles et n un entier tel que $\|n\vartheta\| \in I$. D'après le lemme 6.3 de [3], n peut prendre au plus 6 valeurs dans un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ du type $[kq_{m+1}; (k+1)q_{m+1}[$ $(k \in \mathbb{N})$. Nous désignons par a_k la plus petite des valeurs modulo q_{m+1} que peut prendre l'entier n dans un tel sous-ensemble. Nous remarquons que $a_0 > q_{m+1}/2$ d'après les conditions posées sur n dans la somme étudiée. Ainsi

$$\begin{aligned} H(y) &\ll \frac{q_{m+1}}{Q_y}(\kappa+1)^{2\alpha c \log y} \sum_{0\leqslant k\leqslant Y^2} \frac{1}{a_k + kq_{m+1}} \\ &\ll \frac{(\kappa+1)^{2\alpha c\log y}}{Q_y} \log Y \\ &\ll \frac{(\log y)^{4A+22}}{y^{1-2\alpha c \log(\kappa+1)}}. \end{aligned}$$

En choisissant la constante $c = 1/4\alpha \log(\kappa+1)$, nous obtenons alors qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$H(y) \ll \frac{1}{y^C}. \tag{5·10}$$

Finalement, d'après (5·6), (5·7), (5·8), (5·9) et (5·10),

$$\begin{aligned} S(y) &\ll \left(\frac{(\log y)^{\kappa^\alpha+\varepsilon'}}{q_m} + \frac{1}{y^C} \right)^{1/\alpha} (\log y)^{-1+1/\beta+4\kappa\varepsilon} \\ &\ll \left(\frac{(\log q_{m+1})^{\kappa^\alpha-1+\varepsilon'+4\alpha\kappa\varepsilon}}{q_m} + \frac{(\log y)^{4\kappa\varepsilon-1/\alpha}}{y^C} \right)^{1/\alpha}. \end{aligned} \tag{5·11}$$

Ainsi, en choisissant α, ε et ε' suffisamment petit, nous obtenons (5·2), d'après la condition posée sur ϑ. □

Nous sommes à présent en mesure d'énoncer et de démontrer le résultat principal de cette section.

Proposition 5.3. *Soit un nombre complexe z quelconque. Si ϑ est un nombre irrationnel appartenant à l'ensemble $\Xi(z)$, alors le couple (τ_{z+1}, τ_z) est ϑ-adapté.*

Démonstration. Nous conservons la notations $\kappa := |z|$. D'après la définition de $\Xi(z)$ et la majoration (2·11), la condition de la Proposition 5.2 est vérifiée. Une condition suffisante de ϑ-adaptation est donc :

$$T(y) := \sum_{\substack{\|n\vartheta\| \leqslant 1/y \\ P(n) \leqslant y}} \frac{\tau_\kappa(n)}{n} = o(1) \qquad (y \to \infty).$$

Posons $Y = y^{c \log_2 y}$, avec $c = 1/2 \log(\kappa + 1)$. D'après la preuve de la Proposition 5.2, nous avons

$$\sum_{\substack{n > Y \\ \|n\vartheta\| \leqslant 1/y \\ P(n) \leqslant y}} \frac{\tau_\kappa(n)}{n} \leqslant \sum_{\substack{n > Y \\ P(n) \leqslant y}} \frac{\tau_\kappa(n)}{n} = o(1) \quad (y \to \infty).$$

Évaluons à présent la contribution

$$\sum_{\substack{n \leqslant Y \\ \|n\vartheta\| \leqslant 1/y \\ P(n) \leqslant y}} \frac{\tau_\kappa(n)}{n}.$$

Étant donné $y \geqslant 2$, nous considérons l'unique entier $m = m(y)$ tel que

$$q_m \leqslant y/2 < q_{m+1}.$$

Il suffit alors d'appliquer *mutatis mutandis* la méthode employée pour estimer $S_1(y)$ dans la démonstration de la Proposition 5.2. Nous obtenons finalement la majoration

$$\sum_{\substack{\|n\vartheta\| \leqslant 1/y \\ P(n) \leqslant y}} \frac{\tau_\kappa(n)}{n} \ll \frac{(\log q_{m+1})^\kappa}{q_m} f_\kappa(q_m) + o(1) \quad (y \to \infty). \tag{5·12}$$

D'après (3·2), cette quantité tend bien vers 0 lorsque y tend vers l'infini. □

6. Preuve des Théorèmes 3.2 et 3.3

6.1. Réduction du problème

Nous démontrons tout d'abord que les preuves des Théorèmes 3.2 et 3.3 peuvent être déduites de la proposition suivante.

Proposition 6.1. *Soient $z \in \mathbb{C}$, $\vartheta \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ et $\{q_m\}_{m \geqslant 1}$ la suite des dénominateurs des réduites de ϑ. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *La série $U(\tau_{z+1}; \vartheta)$ converge ;*
(ii) *la série $V(\tau_z; \vartheta)$ converge ;*
(iii) *la série*

$$\sum_{m \geqslant 1} (-1)^m \frac{(\log q_{m+1})^z}{q_m} f_z(q_m) \tag{6·1}$$

converge.

Déduction du Théorème 3.2 à partir de la Proposition 6.1.

Soit $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}_+^*$ et $\vartheta \in \Xi(z)$. Nous utilisons la 12. D'après la Proposition 5.3, le couple (τ_{z+1}, τ_z) est ϑ-adapté. Montrons à présent que la condition (3·2) implique la convergence absolue de la série (6·1) et, par conséquent, la convergence des séries $U(\tau_{z+1};\vartheta)$ et $V(\tau_z;\vartheta)$. Lorsque $\Re e\,(z) \leqslant 0$, cette série numérique est toujours absolument convergente en vertu de (2·15). Supposons désormais que $z \in \mathbb{C} \smallsetminus \mathbb{R}_+^*$ et $\Re e\,(z) > 0$ et posons

$$a_m = \frac{(\log q_{m+1})^{\Re e\,(z)}}{q_m} |f_z(q_m)|.$$

Comme $\vartheta \in \Xi(z)$, il existe $A > 0$ tel que

$$\frac{(\log q_{m+1})^{|z|}}{q_m} f_{|z|}(q_m) \leqslant A. \tag{6·2}$$

Nous déduisons de (6·2) et de l'estimation (2·11) que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $m_0(\varepsilon)$ tel que

$$a_m \leqslant A(\log q_{m+1})^{\Re e\,(z)-|z|} q_m^{\varepsilon} \quad \big(m \geqslant m_0(\varepsilon)\big). \tag{6·3}$$

Donc pour tous $\alpha, \beta > 0$ tels que $\alpha + \beta = 1$, et $m \geqslant m_0(\varepsilon)$,

$$\begin{aligned} a_m &\leqslant \left(\frac{(\log q_{m+1})^{\Re e\,(z)}}{q_m} q_m^{\varepsilon}\right)^{\alpha} \left(A(\log q_{m+1})^{\Re e\,(z)-|z|} q_m^{\varepsilon}\right)^{\beta} \\ &\leqslant A \frac{(\log q_{m+1})^{\Re e\,(z)-\beta|z|}}{q_m^{\alpha-\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Fixons β tel que $\beta > \Re e\,(z)/|z|$ puis ε tel que $\varepsilon < \alpha$. Nous obtenons ainsi qu'il existe $\eta > 0$, tel que, pour m assez grand,

$$a_m \leqslant \frac{A}{q_m^{\eta}}.$$

D'après (2·15), la série $\sum_{m\geqslant 1} a_m$ est donc convergente et il s'ensuit que la série (6·1) est bien absolument convergente.

Maintenant, le lemme 6.9 de [3] montre que $U_{\tau_{z+1}}(\vartheta; y) = o(1)$ lorsque $y \to \infty$ sous la condition $q(\vartheta; y/(\log y)^{4(\kappa^2+1)+21}) \geqslant (\log y)^{4(\kappa^2+1)+21}$. Par ailleurs, d'après le lemme 13.4 de [3], $V_{\tau_z}(\vartheta; y)$ tend vers 0 lorsque $y \to \infty$ de façon que $q(\vartheta; y/(\log y)^{5\kappa^2+26}) \geqslant (\log y)^{5\kappa^2+26}$. Comme $q(\vartheta; q_m) = q_m$, la condition (1·7) est bien vérifiée. □

Déduction du Théorème 3.3 à partir de la Proposition 6.1.

Soient $\kappa > 0$ et $\vartheta \in \mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses du Théorème 3.3. Le critère du Théorème 3.3 coïncide avec la condition (iii) de la Proposition 6.1. Cette condition est donc bien nécessaire à la validité de (D_ϑ) pour le couple $(\tau_{\kappa+1}, \tau_\kappa)$. Pour montrer qu'elle est suffisante nous utilisons la 12. Comme le terme général de la série (3·3) tend vers 0, $\vartheta \in \Xi(\kappa)$ et la Proposition 5.3 assure que le couple $(\tau_{\kappa+1}, \tau_\kappa)$ est ϑ-adapté. L'argument utilisé ci-dessus pour traiter les défauts de P-régularité reste valide et ainsi la condition (1·7) est vérifiée. □

Les deux paragraphes suivants ont pour objectif de démontrer la Proposition 6.1.

6.2. Convergence de $U(\tau_{z+1};\vartheta)$

Nous traitons d'abord le cas où $\Re e\,(z) > 1$. Désormais z désignera un nombre complexe tel que $\sigma := \Re e\,(z) > 1$. Nous noterons également $|z| := \kappa$.

Nous énonçons tout d'abord un lemme technique permettant de simplifier la preuve de la Proposition 6.1.

Lemme 6.2. *Soit ϑ un nombre réel, $\{q_m\}_{m\geqslant 1}$ la suite de ses réduites et g une fonction arithmétique pour laquelle il existe $b\in]0;1/\sigma[$ tel que l'on ait uniformément pour $q\in\mathbb{N}^*$*

$$g(q)\ll q^b. \tag{6·4}$$

Alors les séries

$$\sum_{m\geqslant 1}(-1)^m\frac{(\log q_{m+1})^z}{q_m}f_z(q_m) \tag{6·5}$$

et

$$\sum_{m\geqslant 1}(-1)^m\frac{(\log q_{m+1})^z}{q_m}f_z(q_m)\left(1+\frac{g(q_m)}{\log q_{m+1}}\right) \tag{6·6}$$

sont simultanément convergentes ou divergentes.

Démonstration. Posons

$$a_m=(-1)^m\frac{(\log q_{m+1})^z}{q_m}f_z(q_m)$$

et

$$b_m=a_m\left(1+\frac{g(q_m)}{\log q_{m+1}}\right).$$

Supposons que la série (6·6) converge et montrons que cela implique la convergence de la série (6·5). Pour cela nous introduisons les ensembles

$$M_1:=\{m\in\mathbb{N}^*,\log q_{m+1}>q_m^c\}\quad\text{et}\quad M_2:=\mathbb{N}^*\smallsetminus M_1,$$

où c est un nombre réel tel que $b<c<(1-b)/(\sigma-1)$ (un tel choix est possible au vu de la condition imposée sur b). Nous pouvons remarquer tout de suite qu'en vertu de (6·4), (2·11) et de la croissance exponentielle des q_m, les séries $\sum_{m\in M_2}a_m$ et $\sum_{m\in M_2}b_m$ sont absolument convergentes. On peut donc supposer que l'ensemble M_1 est infini. Cela implique également que la série $\sum_{m\in M_1}b_m$ est convergente. En particulier $b_m=o(1)$ pour $m\in M_1$. Par ailleurs, lorsque $m\in M_1$,

$$\frac{g(q_m)}{\log q_{m+1}}\ll\frac{1}{q_m^{c-b}}.$$

Nous en déduisons que $a_m=o(1)$ pour $m\in M_1$. La série $\sum_{m\in M_1}a_m\,g(q_m)/\log q_{m+1}$ est donc absolument convergente ce qui entraîne la convergence de la série $\sum_{m\in M_1}a_m$. Comme la série $\sum_{m\in M_2}a_m$ est absolument convergente, nous pouvons conclure que la série $\sum_{m\geqslant 1}a_m$ est convergente.

La démonstration de la réciproque étant similaire, nous omettons les détails. □

En vue d'intégration par parties ultérieures, nous rappellons le lemme 6.11 de [3] qui donne une évaluation de $Z_{\tau_z}(x,x;\vartheta):=\sum_{n\leqslant x}\tau_z(n)\sin(2\pi n\vartheta)$.

Lemme 6.3. *Soit $A>0$, $\varepsilon>0$, et $B=4A+4(\kappa+1)^2+12$. On a uniformément pour $x\geqslant 2$, $Q_x:=x/(\log x)^B$, $\vartheta\in\mathbb{R}$, $q=q(\vartheta;Q_x)$, $a\in\mathbb{Z}$, $(a,q)=1$, $|q\vartheta-a|\leqslant 1/Q_x$, $\vartheta_q=\vartheta-a/q$,*

$$\begin{aligned}&Z_{\tau_z}(x,x;\vartheta)\\&=\frac{x(\log x)^z}{q}\left\{\frac{f_z(q)}{\Gamma(z)}\frac{\sin^2(\pi\vartheta_q x)}{\pi\vartheta_q x}+O\left(\frac{q^\varepsilon\log(1+\vartheta_q^2x^2)}{|\vartheta_q|x\log x}\right)\right\}+O\left(\frac{x}{(\log x)^A}\right).\end{aligned} \tag{6·7}$$

En fait, le coefficient du terme principal figurant dans le lemme 6.11 de [3] s'écrit sous la forme

$$g_z(q) = \left(\frac{\varphi(q)}{q}\right)^{z+1} \prod_{p^\nu \| q} \left(\sum_{\ell \geqslant 0} \frac{\tau_{z+1}(p^{\ell+\nu})}{p^\ell} - \frac{\tau_{z+1}(p^{\nu-1})}{1-1/p} \right).$$

Mais le calcul qui suit montre que les deux fonctions multiplicatives f_z et g_z sont identiques.

Soient p un nombre premier et $\nu \in \mathbb{N}^*$. En utilisant l'identité de convolution $\tau_{z+1} = \mathbf{1} * \tau_z$, on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell \geqslant 0} \frac{\tau_{z+1}(p^{\ell+\nu})}{p^\ell} - \frac{\tau_{z+1}(p^{\nu-1})}{1-1/p} &= \sum_{\ell \geqslant 0} \frac{1}{p^\ell} \sum_{j \leqslant \ell+\nu} \tau_z(p^j) - \frac{\tau_{z+1}(p^{\nu-1})}{1-1/p} \\
&= \sum_{j \geqslant 0} \tau_z(p^j) \sum_{\substack{\ell \geqslant 0 \\ \ell \geqslant j-\nu}} \frac{1}{p^\ell} - \frac{\tau_{z+1}(p^{\nu-1})}{1-1/p} \\
&= \frac{1}{1-1/p} \sum_{0 \leqslant j \leqslant \nu} \tau_z(p^j) + \sum_{j \geqslant \nu+1} \frac{\tau_z(p^j)}{p^{j-\nu}(1-1/p)} - \frac{\tau_{z+1}(p^{\nu-1})}{1-1/p} \\
&= \frac{1}{1-1/p} \tau_z(p^\nu) + \sum_{j \geqslant \nu+1} \frac{\tau_z(p^j)}{p^{j-\nu}(1-1/p)}.
\end{aligned}$$

Comme $1-1/p = \varphi(p)/p$, ce calcul implique que $g_z(p^\nu) = f_z(p^\nu)$. Nous obtenons bien la conclusion annoncée.

Nous sommes maintenant en mesure d'étudier la convergence de $U(\tau_{z+1};\vartheta)$. On applique le Lemme 6.3 avec $\varepsilon = 1/2B$ pour évaluer l'intégrale

$$\int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} Z_{\tau_{z+1}}(t,t;\vartheta) \frac{\mathrm{d}t}{t^2}.$$

Lors de ce calcul, nous ferons un usage fréquent des relations (2·16) et (2·17).

Avec le changement de variables $t = u|\varepsilon_m|$, il vient :

$$\begin{aligned}
&\int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} Z_{\tau_{z+1}}(t,t;\vartheta) \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \\
&\quad = \frac{\operatorname{sgn}(\varepsilon_m)}{\Gamma(z) q_m} f_z(q_m) \int_{|\varepsilon_m|\xi_m}^{|\varepsilon_m|\xi_{m+1}} (\log u - \log|\varepsilon_m|)^z \frac{\sin^2(\pi u)}{\pi u^2} \,\mathrm{d}u \\
&\quad\quad + O\left(\frac{1}{q_m^{1-1/2B}} \int_{|\varepsilon_m|\xi_m}^{|\varepsilon_m|\xi_{m+1}} \frac{\log(1+u^2)}{u^2} \log\left(\frac{u}{|\varepsilon_m|}\right)^{\sigma-1} \mathrm{d}u + \int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} \frac{\mathrm{d}t}{t(\log t)^A} \right). \\
&\quad = \frac{\operatorname{sgn}(\varepsilon_m)}{\Gamma(z) q_m} f_z(q_m) \int_{|\varepsilon_m|\xi_m}^{|\varepsilon_m|\xi_{m+1}} (\log u + \log q_m + \log q_{m+1})^z \frac{\sin^2(\pi u)}{\pi u^2} \,\mathrm{d}u \\
&\quad\quad + O\left(\frac{(\log \xi_{m+1})^{\sigma-1}}{q_m^{1-1/2B}} \int_{|\varepsilon_m|\xi_m}^{|\varepsilon_m|\xi_{m+1}} \frac{\log(1+u^2)}{u^2} \,\mathrm{d}u + \int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} \frac{\mathrm{d}t}{t(\log t)^A} \right) \\
&\quad = \frac{\operatorname{sgn}(\varepsilon_m)}{\Gamma(z) q_m} f_z(q_m) \int_{|\varepsilon_m|\xi_m}^{|\varepsilon_m|\xi_{m+1}} (\log u + \log q_m + \log q_{m+1})^z \frac{\sin^2(\pi u)}{\pi u^2} \,\mathrm{d}u \\
&\quad\quad + O\left(\frac{(\log q_{m+1})^{\sigma-1}}{q_m^{1-1/2B}} + \int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} \frac{\mathrm{d}t}{t(\log t)^A} \right),
\end{aligned}$$

la dernière évaluation provenant de l'intégrabilité sur $\mathbb{R}_+$ de $u \mapsto \log(1+u^2)/u^2$.

Lorsque $b \ll a$, on dispose de la majoration $(a+b)^z - a^z \ll ba^{\sigma-1}$. Dès lors,

$$\begin{aligned}\int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} Z_{\tau_{z+1}}(t,t;\vartheta)\frac{\mathrm{d}t}{t^2} &= \frac{\operatorname{sgn}(\varepsilon_m)}{\Gamma(z)q_m} f_z(q_m)(\log q_{m+1})^z \int_{\xi_m|\varepsilon_m|}^{\xi_{m+1}|\varepsilon_m|} \frac{\sin^2 \pi u}{\pi u}\,\mathrm{d}u \\ &\quad + O\left(\frac{f_z(q_m)}{q_m}(\log q_{m+1})^{\sigma-1}\int_{\xi_m|\varepsilon_m|}^{\xi_{m+1}|\varepsilon_m|}\frac{\sin^2 \pi u}{u^2}\log u\,\mathrm{d}u\right) \\ &\quad + O\left(\frac{f_z(q_m)\log q_m}{q_m}(\log q_{m+1})^{\sigma-1}\int_{\xi_m|\varepsilon_m|}^{\xi_{m+1}|\varepsilon_m|}\frac{\sin^2 \pi u}{u^2}\,\mathrm{d}u\right) \\ &\quad + O\left(\frac{(\log q_{m+1})^{\sigma-1}}{q_m^{1-1/2B}} + \int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}}\frac{\mathrm{d}t}{t(\log t)^A}\right),\end{aligned}$$

soit, en utilisant l'intégrabilité de $u \mapsto \sin^2 \pi u/\pi u^2 \log u$ et $u \mapsto \sin^2 \pi u/\pi u^2$ sur $\mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned}\int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} Z_{\tau_{z+1}}(t,t;\vartheta)\frac{\mathrm{d}t}{t^2} &= \frac{\operatorname{sgn}(\varepsilon_m)}{\Gamma(z)q_m} f_z(q_m)(\log q_{m+1})^z \int_{\xi_m|\varepsilon_m|}^{\xi_{m+1}|\varepsilon_m|} \frac{\sin^2 \pi u}{\pi u}\,\mathrm{d}u \\ &\quad + O\left(\frac{(\log q_{m+1})^{\sigma-1}}{q_m^{1-1/2B}} + \int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}}\frac{\mathrm{d}t}{t(\log t)^A}\right).\end{aligned}$$

Par ailleurs, le même calcul fournit

$$\begin{aligned}\int_{\xi_m}^{x} Z_{\tau_{z+1}}(t,t;\vartheta)\frac{\mathrm{d}t}{t^2} &\ll \frac{(\log q_{m+1})^{\sigma}}{q_m} f_z(q_m)\left(1+\frac{q_m^{1/2B}}{f_z(q_m)\log q_{m+1}}\right) \\ &\quad + \int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}}\frac{\mathrm{d}t}{t(\log t)^A} \qquad (\xi_m < x \leqslant \xi_{m+1}).\end{aligned} \tag{6·8}$$

Nous rappelons à présent le développement asymptotique effectué dans le paragraphe 11.2 de [3].

$$\int_{|\varepsilon_m|\xi_m}^{|\varepsilon_m|\xi_{m+1}} \frac{\sin^2 \pi u}{\pi u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{q_m^{1/B}}{\log q_{m+1}} + \frac{(\log q_m)^B}{q_{m+1}}\right).$$

Par ailleurs, comme $\sigma > 1$, $|\tau_z(q)| \geqslant \tau_\sigma(q) \geqslant 1$. Donc, d'après (2·12), nous avons

$$f_z(q_m) \gg \left(\frac{\varphi(q_m)}{q_m}\right)^{(2\sigma+\kappa+1)/2} \gg q_m^{-1/2B}. \tag{6·9}$$

Ainsi, il existe une fonction arithmétique h_z telle que

$$\begin{aligned}\int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} Z_{\tau_{\kappa+1}}(t,t;\vartheta)\frac{\mathrm{d}t}{t^2} &= \frac{\pi}{2}\frac{\operatorname{sgn}(\varepsilon_m)}{\Gamma(z)q_m} f_z(q_m)(\log q_{m+1})^z\left(1+\frac{h_z(q_m)}{\log q_{m+1}}\right) \\ &\quad + O\left(\int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}}\frac{\mathrm{d}t}{t(\log t)^A}\right),\end{aligned} \tag{6·10}$$

et

$$h_z(q_m) \ll q_m^{1/B}.$$

En choisissant $A > 1$, nous obtenons que le terme d'erreur de (6·10) est le terme général d'une série convergente. Comme $\operatorname{sgn} \varepsilon_m = (-1)^m \operatorname{sgn} \varepsilon_1$, nous obtenons que la convergence de la série

$$\sum_{m \geqslant 1} \int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} Z_{\tau_{z+1}}(t, t; \vartheta) \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \tag{6·11}$$

équivaut à celle de la série

$$\sum_{m \geqslant 1} (-1)^m \frac{(\log q_{m+1})^z}{q_m} f_z(q_m) \left(1 + \frac{h_z(q_m)}{\log q_{m+1}}\right).$$

Nous pouvons appliquer le Lemme 6.2 avec $g \equiv h_z$ et $b = 1/B$. En effet, nous avons bien $B > \sigma$ puisque $B = 4A + 4(\kappa + 1)^2 + 12$. Nous pouvons donc d'affirmer que la convergence de la série (6·11) équivaut à celle de la série (6·1).

Nous pouvons à présent établir l'équivalence (i)$\Leftrightarrow$(iii) de la Proposition 6.1. Considérons un nombre réel $x \geqslant 2$ et désignons par $M = M_x$ l'unique entier tel que $\xi_M \leqslant x < \xi_{M+1}$. On a, par (6·8) et (6·9)

$$\begin{aligned} \sum_{n \leqslant x} \frac{\tau_{z+1}(n)}{n} \sin(2\pi n\vartheta) &= \frac{Z_{\tau_{z+1}}(x, x; \vartheta)}{x} + \int_1^x Z_{\tau_{z+1}}(t, t; \vartheta) \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \\ &= \sum_{1 \leqslant m \leqslant M} \int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} Z_{\tau_{z+1}}(t, t; \vartheta) \frac{\mathrm{d}t}{t^2} + E(M) + o(1), \end{aligned} \tag{6·12}$$

où E est une fonction arithmétique satisfaisant la majoration uniforme pour $m \geqslant 1$,

$$E(m) \ll \frac{(\log q_{m+1})^z}{q_m} f_z(q_m) \left(1 + \frac{q_m^{1/B}}{\log q_{m+1}}\right). \tag{6·13}$$

Lorsque la série (6·1) converge, on a

$$\lim_{m \to \infty} E(m) = 0. \tag{6·14}$$

En effet, c'est une conséquence directe du Lemme 6.2, appliqué avec $g(q) := q^{1/B}$. Nous déduisons donc de ce qui précède l'implication (iii)$\Rightarrow$(i).

Établissons la réciproque. Au vu de (6·12), il suffit de prouver que la convergence de $U(\tau_{z+1}, \vartheta)$ implique (6·14). Or, on a

$$\sum_{\xi_m < n \leqslant \xi_{m+1}} \frac{\tau_{z+1}(n)}{n} \sin(2\pi n\vartheta) = \left[\frac{Z_{\tau_{z+1}}(x, x; \vartheta)}{x}\right]_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} + \int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} Z_{\tau_{z+1}}(t, t; \vartheta) \frac{\mathrm{d}t}{t^2}. \tag{6·15}$$

La formule (6·7) et les relations (2·17) permettent de montrer que le premier terme du membre de droite tend vers 0 lorsque $m \to \infty$. En effet,

$$\begin{aligned} \left[\frac{Z_{\tau_{z+1}}(x, x; \vartheta)}{x}\right]_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} &\ll (\log \xi_{m+1})^\sigma \, |f_z(q_{m+1})| \frac{(\varepsilon_{m+1}\xi_{m+1})^2}{q_{m+1}} \\ &\quad + (\log \xi_m)^\sigma \, |f_z(q_m)| \frac{(\varepsilon_m \xi_m)^2}{q_m} \\ &\ll \frac{|f_z(q_m)|}{\sqrt{q_{m+1}}}. \end{aligned} \tag{6·16}$$

Sous l'hypothèse (i), le membre de gauche de (6·15) tend vers 0 puisque c'est le terme général d'une série convergente. Donc le terme principal du membre de droite de (6·10) tend vers 0 lorsque m tend vers l'infini. Cela permet d'affirmer que $f_z(q_m)(\log q_{m+1})^z/q_m = o(1)$, lorsque $m \to \infty$ sous la condition $\log q_{m+1} > q_m^D$, avec $1/B < D < (1-1/B)/(\sigma-1)$ (un tel choix est possible puisque $B > \sigma$), ce qui implique (6·14) sous la même condition. La relation (6·14) est encore vérifiée sous la condition $\log q_{m+1} \leqslant q_m^D$ d'après (6·13). Cela achève la preuve de l'équivalence.

Lorsque $\Re e\,(z) \leqslant 1$, des calculs similaires, mais cependant plus simples car de nombreux termes d'erreurs disparaissent, fournissent les estimations

$$\int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} Z_{\tau_{z+1}}(t,t;\vartheta)\frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{(-1)^m(\log q_{m+1})^z}{\Gamma(z)q_m} f_z(q_m) + O\left(\frac{1}{\sqrt{q_m}} + \int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} \frac{\mathrm{d}t}{t(\log t)^A}\right) \tag{6·17}$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x} \frac{\tau_{z+1}(n)}{n}\sin(2\pi n\vartheta) = &\sum_{1\leqslant m\leqslant M} \int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} Z_{\tau_{z+1}}(t,t;\vartheta)\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\\ &+ O\left(\frac{(\log q_{M+1})^z}{q_M} f_z(q_M)\right) + o(1).\end{aligned} \tag{6·18}$$

D'après (6·17), la convergence de la série (6·1) équivaut à la convergence de la série

$$\sum_{m\geqslant 1} \int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} Z_{\tau_{z+1}}(t,t;\vartheta)\frac{\mathrm{d}t}{t^2}.$$

L'équivalence des points (i) et (iii) de la Proposition 6.1 s'établit alors en suivant la même démarche que précédemment. D'après (6·18), la convergence de la série (6·1) entraîne la convergence de $U(\tau_{z+1};\vartheta)$. Pour démontrer la réciproque, il suffit, au vu de (6·18) et (6·17), de prouver que la convergence de $U(\tau_{z+1};\vartheta)$ implique

$$\frac{(\log q_{m+1})^z}{q_m} f_z(q_m) = o(1) \quad (m\to\infty). \tag{6·19}$$

Or, les relations (6·15) et (6·16) montrent que

$$\int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} Z_{\tau_{z+1}}(t,t;\vartheta)\frac{\mathrm{d}t}{t^2} = o(1) \quad (m\to\infty),$$

ce qui permet, d'après (6·17), d'établir (6·19).

6.3. Convergence de $V(\tau_z\,;\vartheta)$

Nous commençons par estimer $W_{\tau_z}(x,x;\vartheta) := \sum_{n\leqslant x}\tau_z(n)B(n\vartheta)$, en vue d'intégration par parties ultérieures. Pour cela, nous rappelons la définition d'une fonction de type Siegel-Walfisz fort donnée dans [3].

Définition 6.4. *On dit qu'une fonction arithmétique f est de type Siegel–Walfisz fort, et l'on note $f \in SW^+$, si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est satisfaite :*

(i) pour tout $A > 0$ fixé, et uniformément pour $r \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}^*$, $c \in \mathbb{N}^*$, $(c,m) = 1$, on a

$$\sum_{\substack{n\leqslant x/r\\ n\equiv c \,(\mathrm{mod}\, m)}} f(rn) = \frac{1}{\varphi(m)}\sum_{\substack{n\leqslant x/r\\ (n,m)=1}} f(rn) + O\Big(\frac{x}{(\log x)^A}\Big); \tag{6·20}$$

(ii) pour tout $A > 0$ fixé, et uniformément pour $q \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{Z}$, on a

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv a \,(\mathrm{mod}\, q)}} f(n) = \frac{1}{\varphi(m)}\sum_{\substack{n\leqslant mx/q\\ (n,m)=1}} f(qn/m) + O\Big(\frac{x}{(\log x)^A}\Big), \tag{6·21}$$

où l'on a posé $m := q/(q,a)$.

Le lemme suivant de [3] permet d'évaluer $W_f(x,x;\vartheta)$ pour une fonction f de type Siegel-Walfisz fort. Son énoncé nécessite quelques notations. Lorsque $\vartheta \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ et $b \geqslant 0$, nous posons $x_b := \min(x, b/\|q\vartheta\|)$ et introduisons, étant donnée une fonction arithmétique f, les sommes

$$\begin{aligned} T_b^{(1)} &= T_b^{(1)}(x;\vartheta) := \sum_{x_b < n \leqslant x_{b+1}} f(n) B\Big(\frac{an+b}{q}\Big), \\ T_b^{(2)} &= T_b^{(2)}(x;\vartheta) := \sum_{x_b < n \leqslant x_{b+1}} f(n) \Big(n\vartheta_q - \frac{b}{q}\Big), \\ T_b^{(3)} &= T_b^{(3)}(x;\vartheta) := \sum_{\substack{x_b < n \leqslant x_{b+1} \\ an \equiv -b \,(\mathrm{mod}\, q)}} f(n). \end{aligned} \tag{6·22}$$

Enfin lorsque $(a,q) = 1$ et $m|q$, on introduit la quantité

$$\gamma(m; b/q) := \sum_{\substack{1 \leqslant d \leqslant m \\ (d,m)=1}} B\Big(\frac{ad}{m} + \frac{b}{q}\Big), \tag{6·23}$$

qui est indépendante de a.

Lemme 6.5. *Soient $A, B > 0$. On a uniformément pour $f \in SW^+$, $\vartheta \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$, $x \geqslant 2$, $Q_x := x/(\log x)^B$, $q = q(\vartheta; Q_x) \leqslant (\log x)^B$, $a \in \mathbb{Z}$, $(a,q) = 1$, $|q\vartheta - a| \leqslant 1/Q_x$, $\vartheta_q := \vartheta - a/q > 0$,*

$$W_f(x,x;\vartheta) = \sum_{0 \leqslant b \leqslant x\|q\vartheta\|} T_b + O\big((\log x)^B N_f(x)\big) \tag{6·24}$$

où $N_f(x) := \max_{n \leqslant x} |f(n)|$ et

$$T_b := T_b^{(1)} + T_b^{(2)} - \tfrac{1}{2} T_b^{(3)} \tag{6·25}$$

De plus, on a sous les mêmes conditions, et uniformément pour $0 \leqslant b \leqslant x\|q\vartheta\|$,

$$\begin{aligned} T_b^{(1)} &= \sum_{m|q} \frac{\gamma(m;b/q)}{\varphi(m)} \sum_{\substack{x_b m/q < \ell \leqslant x_{b+1} m/q \\ (\ell,m)=1}} f\Big(\frac{q\ell}{m}\Big) + O\Big(\frac{x}{(\log x)^{B+A}}\Big), \\ T_b^{(3)} &= \frac{1}{\varphi(d)} \sum_{\substack{d x_b/q < \ell \leqslant d x_{b+1}/q \\ (\ell,d)=1}} f\Big(\frac{q\ell}{d}\Big) + O\Big(\frac{x}{(\log x)^{B+A}}\Big), \end{aligned} \tag{6·26}$$

où l'on a noté $d = q/(b,q)$ et où les constantes implicites ne dépendent que de celles de (6·20) et (6·21).

Nous sommes maintenant en mesure d'évaluer $W_{\tau_z}(x,x;\vartheta)$. Nous conservons les notations $\kappa := |z|$ et $\sigma := \Re e\,(z)$.

Lemme 6.6. *Soit $A > 0$ et $B = 5(A + \kappa^2 + \kappa + 4)$, on a uniformément pour $x \geqslant 2$, $Q_x = x/(\log x)^B$, $\vartheta \in \mathbb{R}$, $q := q(\vartheta; Q_x)$, $a \in \mathbb{Z}$, $(a,q) = 1$, $|q\vartheta - a| \leqslant 1/Q_x$, $\vartheta_q := \vartheta - a/q$,*

$$W_{\tau_z}(x,x;\vartheta) \ll x\,(\log x)^{\sigma-1} \Big\{ \frac{\tau_{\kappa+2}(q)\log q}{q} + \frac{1}{(\log x)^A} \Big\} \qquad (x\|q\vartheta\| > 1), \tag{6·27}$$

et

$$W_{\tau_z}(x,x;\vartheta) = -\operatorname{sgn}(\vartheta_q) \frac{f_z(q)}{2\Gamma(z) q} x (\log x)^{z-1} + R(x,q) \qquad (x\|q\vartheta\| \leqslant 1), \tag{6·28}$$

où

$$R(x,q) \ll x(\log x)^{\sigma-1} \left(\frac{\tau_\kappa(q)(\log q)^2}{q \log x} + \frac{x\|q\vartheta\|}{q} \right) + \frac{x}{(\log x)^{A+B}}.$$

Démonstration. L'évaluation (6·27) coïncide avec celle du lemme 13.6 de [3]. Quant à (6·28), on peut remarquer que les deux membres sont des fonctions impaires de ϑ. On peut donc supposer par la suite que $\vartheta_q > 0$. On applique alors le Lemme 6.5 à la fonction τ_z, qui est de type Siegel-Walfisz fort comme l'affirme le lemme 13.5 de [3].

Ici, comme $x < 1/\|q\vartheta\|$,

$$W_{\tau_z}(x, x, \vartheta) = T_0 + O((\log x)^B).$$

Si $m \in \mathbb{N}^*$, nous pouvons remarquer qu'en vertu de la symétrie des entiers premiers à m par rapport à $m/2$, $\gamma(m; 0) = 0$. Nous pouvons donc écrire, d'après (6·26),

$$T_0^{(1)} = O\left(\frac{x}{(\log x)^{A+B}}\right).$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} T_0^{(2)} &= \sum_{n \leqslant x} \tau_z(n) n \vartheta_q = \vartheta_q \sum_{n \leqslant x} \tau_z(n) n \\ &\ll \vartheta_q x^2 (\log x)^{\sigma - 1} = \frac{\|q\vartheta\|}{q} x^2 (\log x)^{\sigma - 1}, \end{aligned}$$

Enfin,

$$T_0^{(3)} = \sum_{\ell \leqslant x/q} \tau_z(q\,\ell) + O\left(\frac{x}{(\log x)^{A+B}}\right).$$

Afin d'évaluer le terme principal, nous allons appliquer la méthode de Selberg-Delange. Posons

$$H_{z,q}(x) := \sum_{\ell \leqslant x} \tau_z(q\ell).$$

La série de Dirichlet associée à $H_{z,q}$ s'écrit, suite à un calcul similaire à celui réalisé dans le paragraphe 2.1, pour $s \in \mathbb{C}$ avec $\Re e\,(s) > 1$,

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{\tau_z(nq)}{n^s} = \zeta(s)^z\, G_z(s, q),$$

où G_z est défini par :

$$G_z(s, q) = \prod_{p | q} (1 - p^{-s})^z \prod_{p^j \| q} \sum_{\nu \geqslant 0} \frac{\tau_z(p^{\nu + j})}{p^{\nu s}}.$$

On a la majoration suivante, pour $|s - 1| \ll 1/\log(2q)$:

$$G_z(s, q) \ll \tau_\kappa(q)\, \log(2q).$$

Une application du théorème 3 du chapitre II.5 de [14] fournit alors l'estimation suivante :

$$\sum_{\ell \leqslant x/q} \tau_z(\ell q) = \frac{f_z(q)}{\Gamma(z) q} x\, (\log x)^{z-1} + O\left(\frac{(\log q)^2}{q} x\, (\log x)^{\sigma - 2} + \frac{x}{(\log x)^{A+B}}\right),$$

ce qui achève la preuve du lemme. □

Nous sommes maintenant en mesure d'évaluer l'intégrale suivante

$$\int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} W_{\tau_z}(t, t; \vartheta) \frac{\mathrm{d}t}{t^2}.$$

Nous supposons tout d'abord que $\sigma > 1$. Nous omettons les détails qui sont similaires à ceux du paragraphe précédent. Nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{\xi_m}^{1/\|q_m\vartheta\|} W_{\tau_z}(t, t; \vartheta) \frac{\mathrm{d}t}{t^2} &= -\operatorname{sgn}(\varepsilon_m) \frac{(\log q_{m+1})^z}{2\Gamma(z) q_m} f_z(q_m) \left(1 + O\left(\frac{\tau_\kappa(q_m)(\log q_m)^2}{f_z(q_m) \log q_{m+1}}\right)\right) \\ &\quad + O\left(\int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} \frac{\mathrm{d}t}{t(\log t)^A}\right), \end{aligned}$$

et

$$\int_{1/\|q_m\vartheta\|}^{\xi_{m+1}} W_{\tau_z}(t,t;\vartheta)\frac{\mathrm{d}t}{t^2} \ll \tau_{\kappa+2}(q_m)\log_2(q_m)\frac{(\log q_{m+1})^{\sigma-1}}{q_m} + O\left(\int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} \frac{\mathrm{d}t}{t(\log t)^A}\right).$$

Nous en déduisons les estimations

$$(6\cdot29)\qquad \begin{aligned}\int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} W_{\tau_z}(t,t;\vartheta)\frac{\mathrm{d}t}{t^2} &= -\operatorname{sgn}(\varepsilon_m)\frac{(\log q_{m+1})^z}{2\Gamma(z)q_m} f_z(q_m)\left(1+O\left(\frac{q_m^{1/B}}{\log q_{m+1}}\right)\right)\\ &\quad + O\left(\int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} \frac{\mathrm{d}t}{t(\log t)^A}\right),\end{aligned}$$

et

$$(6\cdot30)\qquad \begin{aligned}\int_{\xi_m}^{x} W_{\tau_{z+1}}(t,t;\vartheta)\frac{\mathrm{d}t}{t^2} &\ll \frac{(\log q_{m+1})^\sigma}{q_m} f_z(q_m)\left(1+\frac{q_m^{1/B}}{\log q_{m+1}}\right)\\ &\quad + \int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} \frac{\mathrm{d}t}{t(\log t)^A} \qquad (\xi_m < x \leqslant \xi_{m+1}).\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant établir l'équivalence (ii)⇔(iii). La preuve étant similaire à celle de l'équivalence (i)⇔(iii) effectuée dans le paragraphe précédent, nous n'en donnons que les étapes essentielles.

Nous déduisons de la formule (6·29), et des estimations (2·6) et (6·9), qu'il existe une fonction arithmétique $\widetilde{h}_z$ telle que

$$(6\cdot31)\qquad \begin{aligned}\int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} W_{\tau_z}(t,t;\vartheta)\frac{\mathrm{d}t}{t^2} &= -\operatorname{sgn}(\varepsilon_m)\frac{(\log q_{m+1})^z}{2\Gamma(z)q_m} f_z(q_m)\left(1+\frac{\widetilde{h}_z(q_m)}{\log q_{m+1}}\right)\\ &\quad + \int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} \frac{\mathrm{d}t}{t(\log t)^A}\end{aligned}$$

et

$$\widetilde{h}_z(q_m) \ll q_m^{1/B}.$$

Cela permet d'établir, en appliquant le Lemme 6.2 avec $g = \widetilde{h}_z$ et $b = 1/B$, que la convergence de la série

$$\sum_{m\leqslant 1}\int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} W_{\tau_z}(t,t;\vartheta)\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

équivaut à celle de la série (6·1). Pour $x \geqslant 2$, nous désignons par $M = M_x$ l'unique entier tel que $\xi_M \leqslant x < \xi_{M+1}$. Une sommation d'Abel fournit alors l'identité

$$(6\cdot32)\qquad \sum_{n\leqslant x}\frac{\tau_z(n)}{n}B(n\vartheta) = \sum_{1\leqslant m\leqslant M}\int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}} W_{\tau_z}(t,t;\vartheta)\frac{\mathrm{d}t}{t^2} + F(M) + o(1),$$

où F est une fonction arithmétique satisfaisant à la majoration, uniforme pour $m \geqslant 1$,

$$F(m) \ll \frac{(\log q_{m+1})^z}{q_m} f_z(q_m)\left(1+\frac{q_m^{1/B}}{\log q_{m+1}}\right).$$

Supposons que la série (6·1) converge. Le Lemme 6.2 appliqué avec $g(q) := q^{1/B}$ prouve que $F(m) = o(1)$ lorsque $m \to \infty$. Cela fournit l'implication (iii)⇒(ii).

Supposons réciproquement que la série $V(\tau_z;\vartheta)$ converge. De l'identité

$$\sum_{\xi_m<n\leqslant\xi_{m+1}}\frac{\tau_z(n)}{n}B(n\vartheta)=\Big[\frac{W_{\tau_z}(x,x;\vartheta)}{x}\Big]_{\xi_m}^{\xi_{m+1}}+\int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}}W_{\tau_z}(t,t;\vartheta)\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

nous déduisons que

$$\int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}}W_{\tau_z}(t,t;\vartheta)\frac{\mathrm{d}t}{t^2}=o(1)\quad(m\to\infty).$$

La relation (6·31) permet alors d'établir que $F(m)=o(1)$ lorsque $m\to\infty$ sous la condition $\log q_{m+1}>q_m^D$ avec $1/B<D<(1-1/B)/\sigma$. Comme $F(m)$ tend également vers 0 lorsque $m\to\infty$ sous la condition $\log q_{m+1}\leqslant q_m^D$, nous pouvons finalement écrire que

$$F(m)=o(1)\quad(m\to\infty).$$

Cela fournit l'implication (ii)⇒(iii), au vu de (6·32).

Lorsque $\sigma\leqslant 1$, nous obtenons les estimations suivantes, qui permettent de conclure.

$$\int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}}W_{\tau_z}(t,t;\vartheta)\frac{\mathrm{d}t}{t^2}=-\operatorname{sgn}(\varepsilon_m)\frac{(\log q_{m+1})^z}{2\Gamma(z)q_m}f_z(q_m)+O\left(\frac{1}{\sqrt{q_m}}+\int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}}\frac{\mathrm{d}t}{t(\log t)^A}\right)$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\frac{\tau_z(n)}{n}B(n\vartheta)=&\sum_{1\leqslant m\leqslant M}\int_{\xi_m}^{\xi_{m+1}}W_{\tau_z}(t,t;\vartheta)\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\\&+O\left(\frac{(\log q_{M+1})^z}{q_M}f_z(q_M)\right)+o(1).\end{aligned}$$

Nous omettons les détails qui sont identiques à ceux du paragraphe précédent pour le cas $\sigma\leqslant 1$.

7. Appendice A

Dans [7], Davenport établit que (δ,μ) appartient à D_ϑ pour tout $\vartheta\in\mathbb{R}$. Il obtient même l'estimation effective

$$\Delta(\vartheta;y):=\Delta_\delta(\vartheta;y)=\frac{\sin(2\pi\vartheta)}{\pi}+\sum_{n\leqslant y}\frac{\mu(n)}{n}B(n\vartheta)\ll\frac{1}{(\log y)^A}\tag{7·1}$$

valable pour tout $A>0$, uniformément pour $y\geqslant 2$ et $\vartheta\in\mathbb{R}$.

Nous décrivons ici les étapes essentielles du raisonnement de Davenport afin d'en examiner les possibilités de généralisation.

Pour obtenir l'estimation (7·1), Davenport applique un principe classique d'analyse selon lequel le contrôle d'une fonction numérique sur un intervalle I, peut être obtenu par le contrôle de sa moyenne et de ses accroissements sur I. Davenport effectue ainsi la décomposition

$$(\vartheta_2-\vartheta_1)\Delta(\vartheta_1;y)=I+J\tag{7·2}$$

avec

$$I:=\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}\Delta(\vartheta;y)\,\mathrm{d}\vartheta,$$

et

$$J:=\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}\big\{\Delta(\vartheta_1;y)-\Delta(\vartheta;y)\big\}\,\mathrm{d}\vartheta.$$

Intégrer $\Delta(\vartheta;y)$ permet de ramener le problème d'interversion des sommations au cas trivial d'une série double sommable. Plus précisément, Davenport obtient

$$I = T(\vartheta_2,y) - T(\vartheta_1,y)$$

avec

$$T(\vartheta,y) = \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n>y}\frac{\mu(n)}{n^2}\sum_{m\geqslant 1}\frac{\cos(2\pi mn\vartheta)}{m^2}. \tag{7·3}$$

On a donc trivialement

$$I \ll 1/y,$$

mais cette première évaluation est cependant insuffisante pour conclure car les valeurs critiques de $\vartheta_2-\vartheta_1$ dans (7·2) sont $o(1/y)$. Davenport établit alors que l'estimation

$$\sum_{n\leqslant y}\mu(n)\mathrm{e}^{2i\pi n\vartheta} \ll \frac{y}{(\log y)^A} \tag{7·4}$$

est valable, pour tout $A>0$, uniformément pour $y\geqslant 2$, $\vartheta\in\mathbb{R}$. En intervertissant les sommations dans (7·3) puis en effectuant une sommation d'Abel, il obtient ainsi, pour tout $A>0$,

$$I \ll \frac{1}{y(\log y)^A}, \tag{7·5}$$

où la constante implicite ne dépend que de A.

Ensuite, en vue d'estimer l'intégrale J, Davenport établit la validité de l'estimation

$$\Delta(\vartheta_2;y) - \Delta(\vartheta_1;y) \ll y(\vartheta_2-\vartheta_1) + \frac{1}{(\log y)^A}, \tag{7·6}$$

pour tout $A>0$ et uniformément pour $y\geqslant 2$, $\vartheta_1<\vartheta_2$. La fonction sinus étant continue, ce problème est immédiatement réduit à l'étude des accroissements de la fonction

$$R_y(\vartheta) := \sum_{n\leqslant y}\frac{\mu(n)}{n}B(n\vartheta),$$

à y fixé. Sur tout intervalle sur lequel R_y est dérivable, sa dérivée R_y' est uniformément majorée par

$$\sum_{n\leqslant y}\mu(n)\ll y.$$

Il reste donc à étudier la contribution des discontinuités de R_y sur l'intervalle $[\vartheta_1,\vartheta_2]$. Ces discontinuités se situent aux points de Farey a/q, avec $1\leqslant a\leqslant q\leqslant y$, $(a,q)=1$, et $a/q\in[\vartheta_1,\vartheta_2]$. En un tel point a/q le saut de la fonction R_y vaut

$$S_y(a/q;\mu) := -\sum_{\substack{n\leqslant y\\ q\mid n}}\frac{\mu(n)}{n} = -\frac{\mu(q)}{q}\sum_{\substack{k\leqslant y/q\\ (k,q)=1}}\frac{\mu(k)}{k}.$$

Par une technique classique d'intégration complexe, Davenport établit, pour tout $A>0$, la majoration uniforme

$$S_q(q;\mu) \ll \frac{1}{q+(\log y)^A}.$$

Notons $a_1/q_1,\dots,a_r/q_r$ les points de Farey de l'intervalle $[\vartheta_1,\vartheta_2]$, rangés dans l'ordre croissant. Il est classique que $a_{j+1}/q_{j+1}-a_j/q_j = 1/q_jq_{j+1}$. Davenport en déduit que la somme de tous les sauts de l'intervalle $[\vartheta_1,\vartheta]$ vaut

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^r S_y(a_j/q_j;\mu) &\ll \sum_{j=1}^r\frac{1}{q_j+(\log y)^A} \ll y\sum_{j=1}^{r-1}\frac{1}{q_jq_{j+1}} + \frac{1}{(\log y)^A}\\ &\ll y\sum_{j=1}^{r-1}\Big\{\frac{a_{j+1}}{q_{j+1}}-\frac{a_j}{q_j}\Big\} + \frac{1}{(\log y)^A} \ll (\vartheta-\vartheta_1)y + \frac{1}{(\log y)^A}.\end{aligned}$$

Finalement, nous obtenons bien (7·6). En choisissant $\vartheta_2=\vartheta_1+1/y(\log y)^A$, Davenport déduit (7·1) de la décomposition (7·2) et des estimations (7·5) et (7·6).

Pour reproduire un tel raisonnement pour un couple de fonctions (f, g) lié par (1·3), nous devons donc être en mesure d'établir :

($C1$) une borne uniforme en ϑ pour la somme d'exponentielles

$$\sum_{n\leqslant y} g(n)\mathrm{e}^{2i\pi n\vartheta};$$

($C2$) la continuité de la fonction $\vartheta \mapsto U(f;\vartheta)$ ou, ce qui est plus faible, la convergence de la série $U(f,\vartheta)$ et une estimation du type

$$\sum_{m\leqslant y} f(m) \ll y(\log y)^h,$$

où h est une constante fixée dépendante de de f ;

($C3$) l'estimation

$$\sum_{\vartheta_1<a/q<\vartheta_2} S_y(a/q,g) = o(1) \quad (y\to\infty),$$

où $S_y(a/q,g)$ désigne le saut de la fonction $\vartheta \mapsto \sum_{n\leqslant y} g(n)B(n\vartheta)/n$ en un point a/q, et où la somme porte sur tous les points de Farey $a/q \in [\vartheta_1,\vartheta_2]$ dont le dénominateur n'excède pas y.

Notons d'emblée qu'une évaluation uniforme des sommes d'exponentielles, analogue à (7·4) n'est pas disponible, pour la fonction $g = \Lambda$: la méthode de Vinogradov permet d'obtenir pour tout $A > 0$, l'estimation

$$\sum_{n\leqslant y} \Lambda(n)\mathrm{e}^{2i\pi n\vartheta} \ll \frac{y}{\varphi(q)} + O\Big(\frac{y}{(\log y)^A}\Big),$$

où q est le dénominateur d'une bonne approximation rationelle de ϑ.(1) Cette estimation, optimale lorsque ϑ est rationnel d'après le théorème des nombres premiers en progressions arithmétiques, est insuffisante dès que q est petit.

La condition ($C3$) semble actuellement hors d'atteinte pour une grande classe de couples (f, g). Étudions par exemple le cas du couple $(\Lambda, -\mu\log)$ et considérons les accroissements de la fonction

$$\vartheta \mapsto -\sum_{n\leqslant y} \frac{\mu(n)\log(n)}{n} B(n\vartheta). \tag{7·7}$$

Le saut de cette fonction en un point de Farey a/q vaut

$$S_y(a/q;-\mu\log) := \frac{\mu(q)}{q}\sum_{\substack{n\leqslant y/q\\(n,q)=1}} \frac{\mu(n)\log(qn)}{n} = \frac{\mu(q)}{q}\sum_{p|q}\frac{\log p}{p-1} + O\Big(\frac{\log q}{q}\mathrm{e}^{-\sqrt{\log(y/q)}}\Big). \tag{7·8}$$

En conservant les notations employées pour traiter le cas de la fonction μ, nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant j<r} S_y(a_j/q_j;-\mu\log) &= S_y(a_r/q_r;-\mu\log) + O\Big(\log y\sum_{1\leqslant j<r}\frac{1}{q_j}\Big)\\ &= S_y(a_r/q_r;-\mu\log) + O\Big((\vartheta_2-\vartheta_1)y\log y\Big).\end{aligned} \tag{7·9}$$

Pour le choix $\vartheta_2 = \vartheta_1 + 1/y(\log y)^{A+1}$ avec $A > 0$, le terme d'erreur de (7·9) tend bien vers 0 lorsque $y \to \infty$. En revanche, en l'absence d'un renseignement sur la taille ou la factorisation de q_r, le terme principal de (7·9) ne tend pas vers 0. Une autre voie pourrait être d'estimer le nombre de points de Farey dans l'intervalle $[\vartheta_1,\vartheta_2]$ en utilisant une estimation de

$$N_q(t) := \sum_{\substack{n\leqslant t\\(n,q)=1}} 1 \quad (t>0).$$

1. Pour une estimation précise de cette somme d'exponentielles, nous renvoyons à (8).

Mais cette méthode échoue également. Définissons $R_q(t)$ par l'identité

$$N_q(t) = t\Big\{\frac{\varphi(q)}{q} + R_q(t)\Big\} \quad (t > 0). \tag{7·10}$$

Nous avons la majoration classique

$$|R_q(t)| \ll \frac{2^{\omega(q)}}{t} \quad (t > 0),$$

qui s'obtient par inversion de Möbius. Nous avons alors, uniformément pour $\vartheta_1 \leqslant \vartheta_2$,

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant j\leqslant r} S_y(a_j/q_j; -\mu\log) &= \sum_{q\leqslant y} S_y(a/q; -\mu\log)\big\{N_q(\vartheta_2 q) - N_q(\vartheta_1 q)\big\}\\ &= (\vartheta_2 - \vartheta_1)\sum_{q\leqslant y}\varphi(q)S_y(a/q; -\mu\log) + O\Big(\sum_{q\leqslant y}|S_y(a/q; -\mu\log)|2^{\omega(q)}\Big).\end{aligned} \tag{7·11}$$

Le terme d'erreur de (7·11) ne tend pas vers 0 lorsque $y \to \infty$. D'autres estimations plus fines de R_q sont établies au paragraphe 3 de [3] mais elles ne permettent pas plus de conclure.

Une dernière possibilité pour montrer que la somme des sauts tend vers 0 consisterait à étudier les éventuelles compensations induites par les facteurs $\mu(q_j)$ dans la somme

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant r} S_y(a_j/q_j, -\mu\log) = \sum_{1\leqslant j\leqslant r}\frac{\mu(q_j)}{q_j}\sum_{\substack{n\leqslant y/q_j\\ (n,q_j)=1}}\frac{\mu(n)\log(q_j n)}{n}.$$

Il faudrait, pour cela, être en mesure d'obtenir des renseignements sur la factorisation des dénominateurs des fractions de Farey situés dans un petit intervalle. Cela semble hors d'atteinte, au vu des techniques actuellement disponibles.

8. Appendice B

Dès l'introduction de [6], Davenport énonce que le couple (δ, μ), appartient à (D_ϑ) pour tout $\vartheta \in \mathbb{Q}$. Il donne comme justification : « *(...)the convergence of the series for rational ϑ is easily deduced from the theory of Dirichlet's series, and the identities are then valid.* » Nous proposons ici de justifier cette assertion en n'employant que des outils connus en 1937. Nous fournissons tout d'abord une preuve reposant sur deux estimations obtenues par la méthode classique d'intégration complexe. Nous établissons par la suite que le recours à l'analyse complexe n'est pas indispensable et que l'on peut déduire, de manière élémentaire, ce résultat du théorème des nombres premiers en progressions arithmétiques.

Considérons donc un nombre rationnel ϑ s'écrivant $\vartheta = a/q$ avec $(a, q) = 1$. Nous rappelons que la famille $\mathcal{D}^+(q)$ des caractères impairs de Dirichlet de module divisant q constitue une base de l'espace vectoriel des fonctions impaires, q-périodiques, définies sur $\mathbb{N}$ et à valeurs complexes.

Pour $s \geqslant 1$, nous introduisons la fonction arithmétique λ_s définie par

$$\lambda_s(n) := \sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d^{s-1}}. \tag{8·1}$$

Cette fonction apparaîtra naturellement dans la preuve de l'assertion de Davenport.

Lemme 8.1. *Il existe des constantes $c > 0$ et $d > 0$ dépendant au plus de q, tels que l'on ait, uniformément pour $x \geqslant 2$, $s \geqslant 1$, $\chi \in \mathcal{D}^+(q)$, χ non principal,*

$$A_s(x) := \sum_{m \leqslant x} \lambda_s(m)\chi(m) = O(x\mathrm{e}^{-c\sqrt{\log x}}) \tag{8·2}$$

et

$$C(x) := \sum_{n \leqslant x} \mu(n)\chi(n) = O(x\mathrm{e}^{-d\sqrt{\log x}}). \tag{8·3}$$

Démonstration. Établissons l'estimation (8·2). Notons G_s la série de Dirichlet associée à λ_s, soit

$$G_s(w) := \sum_{m \geqslant 1} \frac{\lambda_s(m)}{m^w}\chi(m).$$

Nous désignerons respectivement par σ et τ la partie réelle et la partie imaginaire de la variable complexe w. D'après (8·1), nous avons, pour $\sigma > 1$,

$$\begin{aligned} G_s(w) &= \sum_{n \geqslant 1} \frac{\chi(n)}{n^w} \sum_{m \geqslant 1} \frac{\mu(m)}{m^{w+s-1}}\chi(m) \\ &= \frac{L(w,\chi)}{L(w+s-1,\chi)}. \end{aligned}$$

Or, il existe $c_0 > 0$ tel que le domaine H du plan complexe défini par

$$\sigma \geqslant 1 - c_0/\log(|\tau| + 2), \tag{8·4}$$

soit une région sans zéro de la fonction $w \mapsto L(w,\chi)$. Par conséquent, G_s admet un prolongement analytique dans le domaine (8·4). Étant données les estimations classiques (voir par exemple le chapitre III de [2]) des fonctions L de Dirichlet dans le domaine H, il existe une constante $C \geqslant 0$ tel que l'on ait uniformément pour $w \in H$, $|\tau| \geqslant 3$ et $s \geqslant 1$,

$$G_s(w) \ll (\log|\tau|)^C. \tag{8·5}$$

Posons maintenant $\kappa := 1 + 1/\log x$. En appliquant la seconde formule de Perron à A_s, nous obtenons, pour $T \geqslant 2$,

$$A_s(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\kappa - iT}^{\kappa + iT} G_s(w)\frac{x^w}{w}\,\mathrm{d}w + O\left(x\frac{\log T}{T}\right).$$

D'après le théorème de Cauchy, nous avons

$$\int_{\kappa - iT}^{\kappa + iT} G_s(w)\frac{x^w}{w}\,\mathrm{d}w = \int_{\mathcal{G}} G_s(w)\frac{x^w}{w}\,\mathrm{d}w,$$

où $\mathcal{G}$ est la ligne brisée $\kappa - iT$, $1 - c_0/\log T - iT$, $1 - c_0/\log T + iT$, $\kappa + iT$. D'après la majoration (8·5), la contribution des segments horizontaux de $\mathcal{G}$ à l'intégrale est

$$\ll x\frac{(\log T)^C}{T},$$

tandis que celle du segment vertical est

$$\ll x(\log T)^C \mathrm{e}^{-c_0 \log x/\log T}.$$

En choisissant $T = \mathrm{e}^{\sqrt{\log x}}$, nous obtenons bien l'estimation (8·2).

L'estimation (8·3) s'obtient de manière identique. La série de Dirichlet associée à $\mu(n)\chi(n)$ vaut

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{\mu(n)}{n^w}\chi(n)=\frac{1}{L(w,\chi)}\quad(\sigma>1).$$

Elle admet donc un prolongement analytique dans le domaine H. Comme de plus, il existe une constante $D\geqslant 0$ telle que l'on ait uniformément pour $w\in H$, $|\tau|\geqslant 3$,

$$\frac{1}{L(w,\chi)}\ll(\log|\tau|)^C,$$

nous pouvons obtenir (8·3) de la même manière que (8·2). □

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer directement que (δ,μ) appartient à D_ϑ. Nous établissons tout d'abord la convergence de la série

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{\mu(n)}{n}B\left(\frac{an}{q}\right).$$

Par linéarité, il suffit de montrer la convergence de

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{\mu(n)}{n}\chi(n)\tag{8·6}$$

pour tout caractère χ non principal de module divisant q. Pour cela nous effectuons une sommation d'Abel, soit

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{\mu(n)}{n}\chi(n)=\frac{C(x)}{x}+\int_1^x\frac{C(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

La convergence de la série (8·6) est donc une conséquence directe de l'estimation (8·3).

Établissons à présent l'identité

$$\frac{\sin(2\pi a/q)}{-\pi}=\sum_{n\geqslant 1}\frac{\mu(n)}{n}B\left(\frac{an}{q}\right).\tag{8·7}$$

Rappelons tout d'abord le théorème d'Abel pour les séries de Dirichlet. Soit $F(w):=\sum_{n\geqslant 1}a_nn^{-w}$ une série de Dirichlet convergente pour $\sigma>1$. S'il existe $c\in\mathbb{C}$ tel que

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{a_n}{n}=c+o(1)\quad(x\to\infty),$$

alors on a

$$F(\sigma)=c+o(1)\quad(\sigma\to 1+).$$

La série $\sum_{n\geqslant 1}\mu(n)B(an/q)/n$ étant convergente, nous pouvons écrire, d'après le théorème d'Abel, que

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{\mu(n)}{n}B\left(\frac{an}{q}\right)=\lim_{s\to 1+}f(s),$$

avec

$$f(s)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{\mu(n)}{n^s}B\left(\frac{an}{q}\right).$$

En introduisant le développement en série de Fourier de la fonction B dans l'expression de f, nous obtenons

$$f(s)=-\sum_{n\geqslant 1}\frac{\mu(n)}{n^s}\sum_{k\geqslant 1}\frac{\sin(2\pi akn/q)}{k\pi}.$$

Or, pour $s > 1$ et $M \geqslant 1$, nous avons

$$\sum_{n \leqslant M} \frac{\mu(n)}{n^s} \sum_{k \leqslant M/n} \frac{\sin(2\pi akn/q)}{k} = \sum_{m \leqslant M} \frac{\lambda_s(m)}{m} \sin\left(\frac{2\pi am}{q}\right).$$

De plus, il est bien connu que

$$-\frac{1}{\pi} \sum_{k \leqslant t} \frac{\sin 2\pi k\vartheta}{k} = \langle \vartheta \rangle + O\Big(\frac{1}{1 + t\,\|\vartheta\|}\Big) \qquad (t \geqslant 1, \vartheta \in \mathbb{R}).$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} f(s) &= -\frac{1}{\pi} \sum_{n \leqslant M} \frac{\mu(n)}{n^s} \left\{ \sum_{k \leqslant M/n} \frac{\sin(2\pi akn/q)}{k} + O\Big(\frac{n}{M}\Big) \right\} + O\Big(\sum_{n > M} \frac{1}{n^s} \Big) \\ &= -\frac{1}{\pi} \sum_{m \leqslant M} \frac{\lambda_s(m)}{m} \sin(2\pi am/q) + o(1) \quad (M \to \infty). \end{aligned}$$

Cela implique l'identité

$$f(s) = -\frac{1}{\pi} \sum_{m \geqslant 1} \frac{\lambda_s(m)}{m} \sin\left(\frac{2\pi am}{q}\right) \qquad (s > 1).$$

Comme $\lim_{s \to 1^+} \lambda_s(m) = \delta(m)$, il nous suffit, pour prouver (8·7), de montrer que la série

$$\sum_{m \geqslant 1} \frac{\lambda_s(m)}{m} \sin\left(\frac{2\pi am}{q}\right)$$

converge uniformément en s sur tout intervalle $[1; b]$, avec $b > 1$. Nous pourrons alors effectuer une interversion de limites et obtenir

$$\begin{aligned} \sum_{n \geqslant 1} \frac{\mu(n)}{n} B\left(\frac{an}{q}\right) &= \lim_{s \to 1^+} -\frac{1}{\pi} \sum_{m \geqslant 1} \frac{\lambda_s(m)}{m} \sin\left(\frac{2\pi am}{q}\right) \\ &= -\frac{1}{\pi} \sum_{m \geqslant 1} \lim_{s \to 1^+} \frac{\lambda_s(m)}{m} \sin\left(\frac{2\pi am}{q}\right) \\ &= -\frac{\sin(2\pi a/q)}{\pi}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire la conclusion souhaitée.

Par linéarité, nous nous ramenons à étudier

$$\sum_{m \geqslant 1} \lambda_s(m)\chi(m)/m, \tag{8·8}$$

où χ est un caractère non principal de module divisant q. Or, par sommation d'Abel, nous obtenons

$$\sum_{m > x} \frac{\lambda_s(m)}{m} \chi(m) = -\frac{A_s(x)}{x} + \int_x^\infty \frac{A_s(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

D'après (8·2), la convergence de la série étudiée est bien uniforme pour $s \geqslant 1$, ce qui achève la preuve de (8·7).

Nous avons utilisé une méthode d'intégration complexe pour démontrer la convergence de la série (8·6) et la convergence uniforme de la série (8·8). Montrons maintenant que ces deux points peuvent être déduits de manière élémentaire du théorème des nombres premiers en progression arithmétique qui stipule que, si χ est un caractère non principal de module q, alors on a

$$\sum_{n \leqslant x} \Lambda(n)\chi(n) = o(x) \quad (x \to \infty). \tag{8·9}$$

Nous aurons besoin de deux résultats auxiliaires.

Lemme 8.2. *Soit $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite bornée de nombres complexes et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction admettant une limite finie $\ell \in \mathbb{C}$ en $+\infty$. Nous avons*

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{a_n}{n} f\left(\frac{x}{n}\right) = \ell \sum_{n \leqslant x} \frac{a_n}{n} + o(\log x) \qquad (x \to \infty).$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A \geqslant 0$ tel que

$$|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon \quad (x \geqslant A). \tag{8·10}$$

Comme $x \mapsto x^{1/\log_2 x}$ est une fonction croissante, il existe x_0 tel que, pour tout $x \geqslant x_0$, $x^{1/\log_2 x} \geqslant A$. Dès lors, en notant $X := x^{1-1/\log_2 x}$, nous avons, pour tout $x \geqslant x_0$,

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{a_n}{n} \left\{f\left(\frac{x}{n}\right) - \ell\right\} = \sum_{n \leqslant X} \frac{a_n}{n} \left\{f\left(\frac{x}{n}\right) - \ell\right\} + \sum_{X < n \leqslant x} \frac{a_n}{n} \left\{f\left(\frac{x}{n}\right) - \ell\right\}.$$

Pour $n \leqslant X$, nous avons $x/n \geqslant A$. Nous déduisons donc de (8·10)

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{a_n}{n} \left\{f\left(\frac{x}{n}\right) - \ell\right\} \leqslant \varepsilon \log_2 x + O\left(\frac{\log x}{\log_2 x}\right) \quad (x \geqslant x_0).$$

Nous obtenons finalement qu'il existe x_1 tel que, pour tout $x \geqslant x_1$,

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{a_n}{n} \left\{f\left(\frac{x}{n}\right) - \ell\right\} \leqslant \varepsilon \log x,$$

ce qui correspond à la conclusion attendue. □

Lemme 8.3. *Soit $q \in \mathbb{N}^*$. On a uniformément pour $x \geqslant 2$, $1 \leqslant s \leqslant 2$, χ un caractère de Dirichlet non principal dont le module divise q,*

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\chi(n)}{n^s} = L(s, \chi) + O(x^{-s}), \tag{8·11}$$

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \chi(n) = -\frac{L'}{L}(s, \chi) + o(1) \quad (x \to \infty), \tag{8·12}$$

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\mu(n)}{n^s} \chi(n) \ll 1, \tag{8·13}$$

Démonstration. Soit $K(x) := \sum_{n \leqslant x} \chi(n)$. De l'estimation classique

$$K(x) \leqslant \frac{q}{2},$$

nous déduisons, grâce à une sommation d'Abel,

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\chi(n)}{n^s} = L(s, \chi) + \frac{K(x)}{x^s} - \int_x^{\infty} \frac{K(t)}{t^{1+s}} \, \mathrm{d}t.$$

Cela implique immédiatemment l'estimation (8·11).

En effectuant une sommation d'Abel et en utilisant (8·9), nous obtenons, uniformément pour $1 < s \leqslant 2$,

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \chi(n) = -\frac{L'}{L}(s, \chi) + o(x^{1-s}) \quad (x \to \infty).$$

Comme $L(1, \chi) \neq 0$, la fonction $s \mapsto -L'/L(s, \chi)$ est continue au point $s = 1$; cela nous permet d'obtenir (8·12) en faisant tendre s vers 1.

De l'identité de convolution $\delta = \mu * \mathbf{1}$ et de (8·11), nous déduisons

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{d \leqslant x} \frac{\mu(d)}{d^s} \chi(d) \sum_{m \leqslant x/d} \frac{\chi(m)}{m^s} \\ &= L(s,\chi) \sum_{d \leqslant x} \frac{\mu(d)}{d^s} \chi(d) + O(1). \end{aligned}$$

Comme la fonction $L(s,\chi)$ est continue et ne s'annule pas pour $s \geqslant 1$, nous obtenons bien (8·13). □

Pour démontrer la convergence de la série (8·6), nous employons le théorème de Tauber pour les séries de Dirichlet dont nous rappelons l'énoncé. Soit $F(w) := \sum_{n \geqslant 1} a_n/n^w$ une série de Dirichlet. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que

$$F(\sigma) = \ell + o(1) \quad (\sigma \to 1+),$$

et que

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{a_n}{n} \log n = o(\log x) \quad (x \to \infty).$$

Le théorème de Tauber stipule alors que la série $\sum_{n \geqslant 1} a_n/n$ est convergente et que l'on a

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{a_n}{n} = \ell.$$

Montrons que nous pouvons appliquer ce théorème à la série (8·6). Pour $\sigma > 1$, nous avons, d'après la continuité de $1/L(s,\chi)$ au voisinage de 1,

$$\begin{aligned} \sum_{n \geqslant 1} \frac{\mu(n)}{n^\sigma} \chi(n) &= \frac{1}{L(\sigma,\chi)} \\ &= \frac{1}{L(1,\chi)} + o(1) \quad (\sigma \to 1+). \end{aligned}$$

Par ailleurs, de l'identité de convolution $\mu \log = -\Lambda * \mu$, nous déduisons

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\mu(n)}{n} \chi(n) \log n = - \sum_{m \leqslant x} \frac{\mu(m)}{m} \chi(m) \sum_{d \leqslant x/m} \frac{\Lambda(d)}{d} \chi(d).$$

En appliquant (8·12) puis le Lemme 8.2, nous obtenons

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\mu(n)}{n} \chi(n) \log n = \frac{L'}{L}(1,\chi) \sum_{m \leqslant x} \frac{\mu(m)}{m} \chi(m) + o(\log x) \quad (x \to \infty).$$

Finalement, la relation (8·13) fournit

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{\mu(n)}{n} \chi(n) \log n = o(\log x) \quad (x \to \infty).$$

Le théorème de Tauber fournit donc la conclusion requise.

Pour montrer la convergence uniforme de la série (8·8), nous nous ramenons tout d'abord à l'étude d'une fonction complètement multiplicative. Pour cela, nous introduisons la fonction complètement multiplicative λ_s^* définie, pour tout nombre premier p et tout entier $\nu \geqslant 1$, par

$$\lambda_s^*(p^\nu) = (1 - p^{1-s})^\nu.$$

On a
$$\lambda_s = \lambda_s^* * g_s,$$
où g_s est la fonction multiplicative définie, pour tout nombre premier p, par
$$g_s(p) = 0 \quad \text{et} \quad g_s(p^\nu) = \lambda_s(p)\big\{1 - \lambda_s(p)\big\} \quad (\nu \geqslant 2).$$
Comme $\lambda_s(p) = 1 - p^{1-s}$, nous avons $|g_s(p^\nu)| \leqslant 1$ pour tout $\nu \geqslant 2$. Il s'ensuit que la série
$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{g_s(n)}{n}\chi(n)$$
est absolument et normalement convergente.[2] Comme nous avons
$$\sum_{m\geqslant 1} \frac{\lambda_s(m)}{m}\chi(m) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{g_s(n)}{n}\chi(n) \sum_{d\geqslant 1} \frac{\lambda_s^*(d)}{d}\chi(d),$$
il nous suffit donc de démontrer que la série
$$\sum_{d\geqslant 1} \frac{\lambda_s^*(d)}{d}\chi(d) \tag{8·14}$$
converge uniformément pour $s \in [1; b]$ où b est une constante > 1 arbitraire.

Pour cela, nous employons un raffinement du théorème de Tauber, qui est une conséquence directe de la démonstration de ce théorème. Soit $F_s(w) := \sum_{n\geqslant 1} a_n(s)/n^w$, une série de Dirichlet, où s est un paramètre réel. On suppose qu'il existe $\ell(s) \in \mathbb{C}$ et $b > 1$ tels que
$$F_s(\sigma) = \ell(s) + o(1) \quad (\sigma \to 1+,\ 1 \leqslant s \leqslant b), \tag{8·15}$$
et que, uniformément pour $1 \leqslant s \leqslant b$,
$$\sum_{n\leqslant x} \frac{a_n(s)}{n} \log n = o(\log x) \quad (x \to \infty). \tag{8·16}$$
Alors la série
$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n(s)}{n}$$
converge uniformément vers $\ell(s)$ pour $1 \leqslant s \leqslant b$. Montrons que ce théorème s'applique à la série (8·14) avec $b = 4/3$.

Nous avons tout d'abord
$$\begin{aligned}\sum_{m\geqslant 1} \frac{\lambda_s^*(m)}{m^\sigma}\chi(m) &= \prod_p (1 - \lambda_s(p)\chi(p)p^{-\sigma})^{-1} \\ &= \prod_p (1 - \chi(p)p^{-\sigma} + \chi(p)p^{1-\sigma-s})^{-1} \\ &= \frac{L(\sigma,\chi)}{L(\sigma+s-1,\chi)} \prod_p \big(1 + O(p^{1-2\sigma-s})\big),\end{aligned}$$
ce qui fournit la condition (8·15), par continuité respective de $\sigma \mapsto L(\sigma,\chi)$ et $\sigma \mapsto 1/L(\sigma+s-1,\chi)$ en $\sigma = 1$ et $\sigma = s$ pour $s \geqslant 1$.

2. Cette conclusion reste valide lorsque $s \in \mathbb{C}$: nous avons $g_s(n) = 0$, sauf lorsque l'entier n est de la forme $n = u^2v^3$ auquel cas nous disposons de la majoration $|g_s(n)| \leqslant 2^{\omega(uv)}$; la propriété requise résulte alors de l'inégalité classique $2^{\omega(n)} \leqslant \tau(n)$ et de la majoration (2·6)

Pour établir la condition (8·16), il nous suffit de montrer que, uniformément pour $1 \leqslant s \leqslant 4/3$, nous avons

$$\sum_{m \geqslant x} \frac{\lambda_s^*(m)}{m} \chi(m) = o(\log x) \quad (x \to \infty). \tag{8·17}$$

Convenons désormais que toutes les relations asymptotiques et toutes les majorations seront établies uniformément pour $1 \leqslant s \leqslant 4/3$.

De l'identité de convolution $\log = \lambda * \mathbf{1}$, nous déduisons

$$\sum_{m \leqslant x} \frac{\lambda_s^*(m)}{m} \chi(m) \log m = \sum_{n \leqslant x} \frac{\lambda_s^*(n)}{n} \chi(n) \sum_{d \leqslant x/m} \frac{\lambda_s^*(d)}{d} \chi(d) \Lambda(d).$$

Nous allons établir les deux estimations

$$E_s(x) := \sum_{n \leqslant x} \frac{\lambda_s^*(n)}{n} \chi(n) \ll 1 \tag{8·18}$$

et

$$D_s(x) := \sum_{d \leqslant x} \frac{\lambda_s^*(d)}{d} \chi(d) \Lambda(d) = r(s) + o(1) \quad (x \to \infty), \tag{8·19}$$

avec

$$r(s) \ll 1.$$

D'après le Lemme 8.2, cela impliquera bien l'estimation (8·17).

Pour estimer E_s, nous introduisons la fonction multiplicative h_s définie par :

$$\lambda_s^* = \left(\frac{h_s * \mu}{f_s} \right) * \mathbf{1}, \tag{8·20}$$

où f_s est définie, pour $m \geqslant 1$, par $f_s(m) = m^{1-s}$. Nous avons alors, pour tout nombre premier p,

$$h_s(p) = 0, \qquad h_s(p^\nu) = \frac{1 - p^{s-1} + (p^{s-1} - 1)^\nu}{2 - p^{s-1}} \quad (\nu \geqslant 2).$$

En particulier, nous disposons de la majoration suivante, valable uniformément pour tout nombre premier p et tout $\nu \geqslant 2$.

$$|h_s(p^\nu)| \leqslant \frac{2(p^{s-1} - 1)^\nu}{p^{s-1} - 2} \ll p^{(s-1)(\nu-1)}.$$

Nous en déduisons que

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{|h_s(n)|}{n} < \infty. \tag{8·21}$$

En effet, comme la fonction h_s est multiplicative, il suffit de prouver que la série

$$\sum_p \sum_{\nu \geqslant 1} \frac{h_s(p^\nu)}{p^\nu}$$

est absolument convergente. Or, comme nous supposons que $1 \leqslant s \leqslant 4/3$, nous avons

$$\begin{aligned} \sum_p \sum_{\nu \geqslant 1} \frac{|h_s(p^\nu)|}{p^\nu} &\ll \sum_p \sum_{\nu \geqslant 2} \frac{p^{(s-1)(\nu-1)}}{p^\nu} \\ &\ll \sum_p \sum_{\nu \geqslant 2} \frac{1}{p^{2\nu/3}} \ll \sum_p \frac{1}{p^{4/3}} < \infty. \end{aligned} \tag{8·22}$$

Maintenant, d'après (8·20), nous pouvons écrire

$$E_s(x) = \sum_{n \leqslant x} \frac{h_s(n)}{n^s} \chi(n) \sum_{d \leqslant x/n} \frac{\mu(d)}{d^s} \chi(d) \sum_{m \leqslant x/(nd)} \frac{\chi(m)}{m} \quad (x \geqslant 2).$$

Nous déduisons donc de (8·11), (8·13) que

$$\begin{aligned} E_s(x) &= \sum_{n \leqslant x} \frac{h_s(n)}{n^s} \chi(n) \Big\{ L(1,\chi) \sum_{d \leqslant x/n} \frac{\mu(d)}{d^s} \chi(d) + O(1) \Big\} \\ &= \sum_{n \leqslant x} \frac{h_s(n)}{n^s} \chi(n) \Big\{ \frac{L(1,\chi)}{L(s,\chi)} \big(1 + O(1)\big) + O(1) \Big\} \quad (x \geqslant 2). \end{aligned}$$

Par analycité de $s \mapsto 1/L(s,\chi)$ sur $[1; +\infty[$, nous avons donc,

$$E_s(x) = O\left(\sum_{n \leqslant x} \frac{|h_s(n)|}{n^s} \right) \quad (x \geqslant 2).$$

Finalement, d'après (8·21), nous obtenons bien l'estimation (8·18).

Évaluons à présent D_s. Comme $\lambda_s(p) = 1 - p^{1-s}$, nous avons

$$\begin{aligned} D_s(x) &= \sum_{p \leqslant x} \frac{\lambda_s^*(p)}{p} \Lambda(p) \chi(p) + \sum_{\substack{p^\nu \leqslant x \\ \nu \geqslant 2}} \frac{\lambda_s^*(p^\nu)}{p^\nu} \Lambda(p) \chi(p)^\nu \\ &= \sum_{p \leqslant x} \frac{\Lambda(p)}{p} \chi(p) - \sum_{p \leqslant x} \frac{\Lambda(p)}{p^s} \chi(p) + \sum_{\substack{p^\nu \leqslant x \\ \nu \geqslant 2}} \frac{\lambda_s^*(p^\nu)}{p^\nu} \Lambda(p) \chi(p)^\nu \\ &= \sum_{n \leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n} \chi(n) - \sum_{n \leqslant x} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \chi(n) + \sum_{\substack{p^\nu \leqslant x \\ \nu \geqslant 2}} \frac{\Lambda(p) \chi(p)^\nu}{p^\nu} \Big\{ \lambda_s^*(p^\nu) - \big(1 - p^{\nu(1-s)}\big) \Big\}. \end{aligned}$$

La dernière série est absolument convergente, et sa somme est uniformément bornée puisque

$$\Big| \lambda_s^*(p^\nu) - \big(1 - p^{\nu(1-s)}\big) \Big| \ll 1.$$

Nous obtenons donc, d'après (8·12),

$$D_s(x) = \frac{L'}{L}(s,\chi) - \frac{L'}{L}(1,\chi) + t(s) + o(1) \quad (x \to \infty),$$

avec $t(s) \ll 1$. L'analycité de $s \mapsto L'/L(s,\chi)$ sur $[1; +\infty[$ implique alors immédiatemment l'estimation (8·19).

Nous avons ainsi établi la condition taubérienne (8·16). Le théorème de Tauber s'applique et fournit bien la conclusion souhaitée, à savoir la convergence uniforme de la série (8·8) pour $1 \leqslant s \leqslant 4/3$.

9. Appendice C

Nous fournissons ici le contre-exemple annnoncé dans la troisième partie concernant le Théorème 3.3. Pour cela nous construisons les réduites de ϑ par récurrence suivant la relation

$$q_{m+1} = a_{m+1}q_m + q_{m-1}.$$

Supposant les m premières réduites construites pour m assez grand, montrons que l'on peut trouver q_{m+1} tel que

$$q_{m+1} \text{ soit premier} \qquad \text{et} \qquad \Big(\frac{q_m}{m}\Big)^{1/\kappa} \leqslant \log q_{m+1} \leqslant \Big(\frac{q_m}{m}\Big)^{1/\kappa}\Big\{1+\frac{1}{m}\Big\}.$$

Nous employons la notation habituelle,

$$\pi(x,a,q) := \sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv a\ (\mathrm{mod}\ q)}} 1 \qquad (x\geqslant 1, q\in\mathbb{N}, 1\leqslant a\leqslant q).$$

Le théorème de Siegel-Walfisz stipule qu'étant donné $A>0$, il existe une constante $c>0$ ne dépendant que de A telle que l'on ait uniformément, pour $x\geqslant 2$, $1\leqslant q\leqslant (\log x)^A$, $a\in\mathbb{N}$, $(a,q)=1$,

$$\pi(x,a,q) = \frac{x}{\varphi(q)\log x} + O(x\mathrm{e}^{-c\sqrt{\log x}}).$$

Nous en déduisons, sous les mêmes hypothèses, que si $0<h\leqslant x$, alors

$$\pi(x+h,a,q)-\pi(x,a,q) = \frac{h}{\varphi(q)\log x} + O(x\mathrm{e}^{-c\sqrt{\log x}}).$$

Afin d'alléger la présentation des calculs, nous employons la notation

$$\lambda_m := (q_m/m)^{1/\kappa}.$$

Comme $(q_{m-1},q_m)=1$ et $q_m\leqslant \lambda_m^A$ dès que $A>\kappa$, nous pouvons employer le théorème de Siegel-Walfisz pour évaluer

$$\pi(x+h,q_{m-1},q_m)-\pi(x,q_{m-1},q_m),$$

avec $x=e^{\lambda_m}$ et $x+h=e^{\lambda_m(1+1/m)}$. Ainsi, il existe une constante $c>0$ telle que

$$\pi(x+h,q_{m-1},q_m)-\pi(x,q_{m-1},q_m) = \frac{\mathrm{e}^{\lambda_m}(\mathrm{e}^{\lambda_m/m}-1)}{\varphi(q_m)\,\lambda_m} + O(\mathrm{e}^{\lambda_m-c\sqrt{\lambda_m}}).$$

Comme $\varphi(q_m)\leqslant q_m$ et que $q_m = m\lambda_m^\kappa$, nous obtenons

$$\pi(x+h,q_{m-1},q_m)-\pi(x,q_{m-1},q_m) \geqslant \frac{\mathrm{e}^{\lambda_m}(e^{\lambda_m/m}-1)}{m\,\lambda_m^{\kappa+1}}\left\{1+O\left(\frac{m\,\lambda_m^{\kappa+1}\,\mathrm{e}^{-c\sqrt{\lambda_m}}}{e^{\lambda_m}-1}\right)\right\}.$$

Pour m assez grand, en vertu de la croissance exponentielle des q_m et donc de λ_m, nous constatons que cette dernière quantité est strictement positive, ce qui permet d'achever la construction de q_{m+1}. Remarquons que l'emploi du théorème de Dirichlet dans les progressions arithmétiques aurait été insuffisant pour conclure, dans la mesure où l'uniformité en q_m et m est indispensable.

Lorsque m est assez grand, q_m est premier ce qui fournit l'estimation

$$f_\kappa(q_m) = \kappa + O_\kappa\left(\frac{1}{q_m}\right).$$

Nous savons d'autre part que

$$(\log q_{m+1})^\kappa = \frac{q_m}{m}\left\{1+O\left(\frac{1}{m}\right)\right\}.$$

Cela nous permet d'énoncer que la série (6·5) est de même nature que la série

$$\sum_{m\geqslant 1}\frac{(-1)^m}{m},$$

qui est convergente, tandis que la série (6·6) est de même nature que la série

$$\sum_{m\geqslant 1}\frac{1}{m},$$

qui est divergente.

Bibliographie

[1] R. Apery, Irrationnalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$, Astérisque **61** (1979), 11-13.
[2] A. Blanchard, *Initiation à la théorie analytique des nombres premiers* Dunod, Paris, 1969.
[3] R. de la Bretèche & G. Tenenbaum, Séries trigonométriques à coefficients arithmétiques, *J. Anal. Math.*, **92** (2004), 1–79.
[3] R. de la Bretèche et G. Tenenbaum, Propriétés statistiques des entiers friables, *Ramanujan J.*, à paraître.
[5] N.G. de Bruijn and Y.H. van Lint, Incomplete sums of multiplicative functions. I,II, ibid.67(1964), 339-347 ;348-359.
[6] H. Davenport, On some infinite series involving arithmetical functions, *Quart. J. Math. Oxford* **8** (1937), 8–13.
[7] H. Davenport, On some infinite series involving arithmetical functions (II), *Quart. J. Math. Oxford,* **8** (1937), 313–320.
[8] H. Davenport, *Multiplicative number theory*, deuxième édition, Graduate Texts in Mathematics 74 (Springer, Berlin, 1980).
[9] E. Fouvry & G. Tenenbaum, Entiers sans grand facteur premier en progressions arithmétiques, *Proc. London Math. Soc.* (3) **63** (1991), 449–494.
[10] A. Khintchine, *Continued fractions*, Noordhoff, Groningen, 1963.
[11] A. Selberg, Note on a paper by L.G. Sathe, *J.Indian Math.Soc* (N.S.)18 (1954), 83-87.
[12] H. Smida, Sur les puissance de convolution de la fonction de Dickman, *Acta Arith.* **59** (1991), 124–143.
[13] H. Smida, Valeur moyenne des fonctions de Piltz sur les entiers sans grand facteur premier, *Acta Arith.* **63**, 1 (1993), 21–50.
[14] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, 2e édition, Cours Spécialisés, n° 1, Société Mathématique de France, 1995.
[15] G. Tenenbaum, Uniform distribution on divisors and Behrend sequences, *L'Enseignement Mathématique*, **42** (1996), 153–197.
[16] G. Tenenbaum, en collaboration avec Jie Wu, *Exercices corrigés de théorie analytique et probabiliste des nombres*, Cours spécialisés, n° 2, Société Mathématique de France, 1996.
[17] G. Tenenbaum et J. Wu, Moyennes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables, *J. reine angew. Math.*, **564** (2004), 119–166.

Bruno Martin
Institut Élie Cartan
Université de Nancy 1
BP 239
54506 Vandœuvre Cedex
France
Courriel : martin@iecn.u-nancy.fr

Inégalité de Turán-Kubilius pour les entiers friables

Sommaire

1. Introduction

1.1. L'inégalité de Turán-Kubilius

La théorie probabiliste des nombres a pour objet l'étude de la répartition des fonctions arithmétiques considérées comme des variables aléatoires sur les espaces $\Omega_x := \{n \in \mathbb{N} \,|\, n \leqslant x\}$ munis de la mesure uniforme ν_x. Dans ce cadre l'espérance et la variance, dites empiriques, de f sont définies par les formules

$$E_f(x) := \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x} f(n) \quad (x \geqslant 2)$$

et

$$V_f^{\#}(x) := \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\Big\{f(n) - E_f(x)\Big\}^2 \quad (x \geqslant 2).$$

Ce point de vue est particulièrement pertinent dans le cas d'une fonction additive, dont la répartition peut être comparée à celle d'une somme de variables aléatoires indépendantes.

Convenons que les lettres p et q dénotent systématiquement, désormais, des nombres premiers et nous désignons par $\mathbb{A}$ l'ensemble des fonctions additives à valeurs réelles. Étant donnée une fonction $f \in \mathbb{A}$, nous posons,

$$f_p(n) = \begin{cases} f(p^\nu) & \text{si } p^\nu \| n,\ \nu \geqslant 1, \\ 0 & \text{si } p \nmid n. \end{cases} \tag{1·1}$$

On a donc $f(n) = \sum_{p \leqslant x} f_p(n)$ pour $n \in \Omega_x$. Posons

$$\omega_x(p^\nu) := \frac{1}{x} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ p^\nu \| n}} 1 \quad (x \geqslant 2, \nu \geqslant 1). \tag{1·2}$$

La loi de f_p sur (Ω_x, ν_x) est donnée par

$$\nu_x\{f_p = f(p^\nu)\} = w_x(p^\nu) = \frac{1}{p^\nu}\Big(1 - \frac{1}{p}\Big) + O\Big(\frac{1}{x}\Big), \tag{1·3}$$

où, par abus de notation, nous interprétons (1·3) en convenant que si plusieurs valeurs $f(p^\nu)$ sont égales, la probabilité correspondante est la somme des probabilités apparaissant au second membre. Nous userons librement de cette convention dans la suite.

La description probabiliste d'une fonction additive f repose sur l'observation que les fonctions f_p sont, au moins pour les petites valeurs de p, asymptotiquement indépendantes. La théorie est donc sous-tendue par l'idée heuristique que f se comporte essentiellement comme une somme de variables aléatoires indépendantes. Ce point de vue est confirmé par plusieurs théorèmes de théorie probabiliste des nombres qui fournissent, pour une large classe de fonctions additives, des analogues arithmétiques de théorèmes probabilistes classiques. À titre d'exemple, les théorèmes d'Erdős-Wintner et Erdős-Kac (voir par exemple [6] et [7]) sont les pendants respectifs du théorème des trois séries de Kolmogorov et de celui de la limite centrale.

Au vu de (1·3), il est naturel de modéliser la répartition d'une fonction additive f à support dans Ω_x, par celle d'une variable aléatoire $Z_{f,x}$ définie sur un espace de probabilité abstrait par

$$Z_{f,x} = \sum_{p \leqslant x} \xi_p,$$

où les ξ_p sont des variables aléatoires indépendantes dont la loi est donnée par

$$\mathbb{P}\big(\xi_p = f(p^\nu)\big) = \frac{1}{p^\nu}\Big(1 - \frac{1}{p}\Big) \qquad (\nu \geqslant 1).$$

Nous désignons respectivement par $A_f(x)$ et $\mathbb{V}(Z_{f,x})$, l'espérance et la variance de $Z_{f,x}$ soit

$$A_f(x) := \sum_{p^\nu \leqslant x} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big)\frac{f(p^\nu)}{p^\nu},$$

$$\mathbb{V}(Z_{f,x}) := \sum_{p^\nu \leqslant x} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big)\frac{f(p^\nu)^2}{p^\nu} - \sum_{p \leqslant x} \bigg\{\sum_{\nu \geqslant 1} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big)\frac{f(p^\nu)}{p^\nu}\bigg\}^2.$$

Le moment d'ordre 2 de $Z_{f,x}$ vaut semblablement

$$B_f(x)^2 := \sum_{p^\nu \leqslant x} \mathbb{E}(\xi_p^2) = \sum_{p^\nu \leqslant x} \frac{f(p^\nu)^2}{p^\nu}\Big(1 - \frac{1}{p}\Big),$$

et l'inégalité de Cauchy–Schwarz fournit immédiatement

$$\tfrac{1}{2}B_f(x)^2 \leqslant \sum_{p^\nu \leqslant x} \frac{f(p^\nu)^2}{p^\nu}\Big(1 - \frac{1}{p}\Big)^2 \leqslant \mathbb{V}(Z_{f,x}) \leqslant B_f(x)^2.$$

Il est naturel de comparer la variance empirique $V_f^{\#}(x)$ à la variance $\mathbb{V}(Z_{f,x})$ du modèle, et, hormis les questions fines relatives à la valeur exacte des constantes impliquées, cela équivaut à comparer $V_f^{\#}(x)$ à $B_f(x)^2$. Dans sa forme classique, l'inégalité de Turán-Kubilius s'écrit ainsi, pour $f \in \mathbb{A}$,

$$V_f^{\#}(x) \ll B_f(x)^2, \quad (x \geqslant 2), \tag{1·4}$$

où la constante implicite ne dépend pas de f.

En vue d'applications ultérieures, par exemple la détermination de l'ordre normal d'une fonction additive, il peut être plus judicieux de mesurer l'écart quadratique entre $f \in \mathbb{A}$ et l'espérance $A_f(x)$ de son modèle probabiliste. Aussi l'inégalité de Turán-Kubilius est-elle plus souvent énoncée sous la forme

$$V_f(x) := \frac{1}{x} \sum_{n \leqslant x} \Big\{f(n) - A_f(x)\Big\}^2 \ll B_f(x)^2 \quad (x \geqslant 2). \tag{1·5}$$

Ainsi que le remarque Hildebrand, dans l'introduction de [11], les inégalités (1·4) et (1·5) sont équivalentes dans la mesure où

$$E_f(x) - A_f(x) = o\big(B_f(x)^2\big) \qquad (x \to \infty),$$

et donc

$$V_f(x) = V_f^{\#}(x) + o(B_f(x)^2) \qquad (x \to \infty). \tag{1·6}$$

Le problème du comportement asymptotique de la meilleure constante dans l'inégalité (1·4), c'est-à-dire

$$C(x) := \sup_{f \in \mathbb{A}} \frac{V_f^{\#}(x)}{B_f(x)^2},$$

se pose naturellement. Nous pouvons remarquer qu'en vertu de (1·6), on a également

$$C(x) = \sup_{f \in \mathbb{A}} \frac{V_f(x)}{B_f(x)^2} + o(1) \quad (x \to \infty).$$

Kubilius ([15],[16]) et Hildebrand ([11]) ont tout d'abord comparé $V_f(x)$ à un autre majorant de $\mathbb{V}(Z_{f,x})$, à savoir

$$B_f^+(x)^2 := \sum_{p^\nu \leqslant x} \frac{f(p^\nu)^2}{p^\nu}.$$

Ils ont obtenu tous deux, par des méthodes différentes, l'estimation

$$\sup_{f \in \mathbb{A}} \frac{V_f(x)}{B_f^+(x)^2} = \frac{3}{2} + o(1) \quad (x \to \infty). \tag{1·7}$$

Dans [17], Lee obtient un résultat plus précis : il existe des constantes c et d telles que, pour x assez grand,

$$\frac{3}{2} - \frac{c}{\log x} \leqslant \sup_{f \in \mathbb{A}} \frac{V_f(x)}{B_f^+(x)^2} \leqslant \frac{3}{2} - \frac{d}{\log x}.$$

Dans [2], La Bretèche et Tenenbaum déduisent des résultats obtenus par Hildebrand que

$$\sup_{f \in \mathbb{A}} \frac{V_f(x)}{B_f(x)^2} = 2 + o(1) \quad (x \to \infty). \tag{1·8}$$

La différence de comportement entre ces deux rapports est une question délicate. Nous retrouvons les formules asymptotiques (1·7) et (1·8) à partir des résultats de notre étude, et revenons en détail sur ce phénomène au paragraphe 5.

1.2. Entiers friables

Nous rappelons que $P(n)$ désigne le plus grand facteur premier d'un entier $n \geqslant 2$ et que l'on pose par convention $P(1) = 1$. Conformément à l'usage, nous employons les notations suivantes.

$$S(x,y) := \{n \leqslant x, P(n) \leqslant y\}$$

et

$$\Psi(x,y) := \sum_{n \in S(x,y)} 1 \qquad (x, y \geqslant 2).$$

Depuis une vingtaine d'années, l'étude des entiers friables, ou sans grand facteur premier, occupe une place grandissante au sein de la théorie analytique et probabiliste des nombres. La question d'établir une inégalité de Turán-Kubilius où seuls les entiers de $S(x,y)$ sont retenus est à ce titre naturellement posée.

Dans cette perspective, munissons l'espace Ω_x de la mesure uniforme sur $S(x,y)$, notée $\nu_{x,y}$. Nous désignons respectivement par $E_f(x,y)$ et $V_f^{\#}(x,y)$ l'espérance et la variance empiriques de f relatives à cette mesure, c'est-à-dire

$$E_f(x,y) := \frac{1}{\Psi(x,y)} \sum_{n\in S(x,y)} f(n) \tag{1·9}$$

et

$$V_f^{\#}(x,y) := \frac{1}{\Psi(x,y)} \sum_{n\in S(x,y)} \Big\{ f(n) - E_f(x,y)\Big\}^2. \tag{1·10}$$

Notant

$$\Psi_m(x,y) := \sum_{\substack{n\in S(x,y)\\ (n,m)=1}} 1 \qquad (m\in\mathbb{N}^*),$$

nous pouvons exprimer la loi de f_p sous $\nu_{x,y}$ par la formule

$$\nu_{x,y}\{f_p = f(p^\nu)\} = \nu_{x,y}\{n\leqslant x, p^\nu \| n\} = \frac{\Psi_p(x/p^\nu, y)}{\Psi(x,y)} \qquad (\nu\geqslant 0).$$

Tout modèle probabiliste d'une fonction additive à support dans $S(x,y)$ est donc assujetti à une évaluation du rapport

$$\frac{\Psi_p(x/p^\nu, y)}{\Psi(x,y)}. \tag{1·11}$$

Conformément à l'usage, nous désignons par ϱ la fonction de Dickman, définie comme l'unique solution de l'équation différentielle aux différences

$$v\varrho'(v) + \varrho(v-1) = 0 \quad (v>1),$$

satisfaisant la condition initiale

$$\varrho(v) = 1 \quad (0\leqslant v\leqslant 1).$$

On prolonge classiquement ϱ sur $]-\infty, 0[$ en posant

$$\varrho(v) = 0 \quad (v<0).$$

Hildebrand a établi dans [12] la validité de la formule

$$\Psi(x,y) = x\varrho(u)\left\{1 + O_\varepsilon\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}\right)\right\} \tag{1·12}$$

dans le domaine

$$x\geqslant 1, \quad \mathrm{e}^{(\log_2 3x)^{5/3+\varepsilon}} \leqslant y \leqslant x,$$

où ε est un paramètre strictement positif arbitraire. Cela suggère d'approcher le rapport (1·11) par

$$\frac{\varrho(u-u_{p^\nu})}{p^\nu \varrho(u)}\Big(1-\frac{1}{p}\Big), \tag{1·13}$$

où l'on a posé

$$u_d := (\log d)/(\log y) \quad (d\geqslant 1). \tag{1·14}$$

C'est la voie empruntée par Alladi ([1]) puis Xuan ([22],[23]). Posant

$$\begin{aligned} \eta_f(x,y) &:= \sum_{n\in S(x,y)} \frac{f(p)\varrho(u-u_p)}{p\varrho(u)} \\ \vartheta_f(x,y) &:= \sum_{n\in S(x,y)} \frac{f(p)^2\varrho(u-u_p)}{p\varrho(u)}, \end{aligned} \tag{1·15}$$

Alladi établit que l'inégalité

$$\frac{1}{\Psi(x,y)} \sum_{n\in S(x,y)} \Big\{f(n)-\eta_f(x,y)\Big\}^2 \ll \vartheta_f(x,y), \tag{1·16}$$

est valable pour toute fonction f fortement additive dans le domaine

$$\exp(\log x)^{2/3} \leqslant y \leqslant x.$$

À l'époque de la rédaction de [1], la formule (1·12) n'était établie que pour le domaine $\exp(\log x)^{3/5} \leqslant y \leqslant x$.[1] Une insertion de (1·12) dans la preuve de Alladi fournit immédiatement pour (1·16) le domaine de validité

$$\exp\Big\{\sqrt{\log x \log_2 x}\Big\} \leqslant y \leqslant x.$$

Xuan établit dans [23] l'analogue de (1·16) pour toutes les fonctions additives mais pour le domaine restreint

$$\exp\big\{(\log x)^{1/2+\varepsilon}\big\} \leqslant y \leqslant x \quad (\varepsilon > 0),$$

en posant

$$\begin{aligned} \eta_f(x,y) &:= \sum_{n\in S(x,y)} \frac{f(p^\nu)\varrho(u-u_{p^\nu})}{p^\nu\varrho(u)} \\ \vartheta_f(x,y) &:= \sum_{n\in S(x,y)} \frac{f(p^\nu)^2\varrho(u-u_{p^\nu})}{p^\nu\varrho(u)}. \end{aligned} \tag{1·17}$$

En compliquant les définitions de $\eta_f(x,y)$ et de $\vartheta_f(x,y)$, Xuan parvient dans [22] et [23] à établir l'analogue de (1·16) dans le domaine $(\log x)^{c+\varepsilon} \leqslant y \leqslant x^{1/\log_2 x}$, où c est une constante qui vaut 1 lorsque f est fortement additive et 2 dans le cas général.

En 2005, La Bretèche et Tenenbaum choisissent d'exploiter les résultats concernant les estimations du rapport (1·11) issues de la méthode du col. Notons $\alpha = \alpha(x,y)$, l'unique solution de l'équation transcendante

$$\sum_{p\leqslant y} \frac{\log p}{p^\alpha - 1} = \log x.$$

et introduisons la fonction tronquée ζ de Riemann,

$$\zeta(s,y) := \prod_{p\leqslant y} \big(1-p^{-s}\big)^{-1} \quad (\Re(s) > 1, y \geqslant 2).$$

Hildebrand et Tenenbaum ont établi dans [14] l'estimation

$$\Psi(x,y) = \frac{x^\alpha \zeta(\alpha,y)}{\alpha\sqrt{2\pi\sigma_2}}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\overline{u}}\Big)\Big\} \quad (2 \leqslant y \leqslant x), \tag{1·18}$$

où l'on a posé

$$u := \frac{\log x}{\log y}, \quad \overline{u} := \min\Big(u, \frac{y}{\log y}\Big),$$

et

$$\sigma_2 := \Big[\frac{\mathrm{d}^2 \log\zeta(s,y)}{\mathrm{d}s^2}\Big]_{s=\alpha}.$$

---

1. Cette estimation est due à de Bruijn dans [4].

La formule (1·18) suggère que le rapport (1·11) est proche de

$$\frac{1}{p^{\nu\alpha}}\Big(1-\frac{1}{p^{\alpha}}\Big). \tag{1·19}$$

Cette approximation nous invite à modéliser la répartition de f relativement à $\nu_{x,y}$ par celle de la variable aléatoire $Z_{f,x,y}$ définie par

$$Z_{f,x,y} := \sum_{p\leqslant y} \xi_p,$$

où les ξ_p sont des variables aléatoires indépendantes dont la loi est donnée par

$$\mathbb{P}\big(\xi_p = f(p^\nu)\big) = \frac{1}{p^{\nu\alpha}}\Big(1-\frac{1}{p^{\alpha}}\Big). \tag{1·20}$$

Nous emploierons désormais la notation

$$g_k(s) := \prod_{p\mid k}\Big(1-\frac{1}{p^{s}}\Big) \quad (k\geqslant 1, s\in\mathbb{C}).$$

Introduisons l'espérance et la variance de $Z_{f,x,y}$,

$$\begin{aligned} A_f(x,y) &:= \sum_{p\leqslant y}\mathbb{E}(\xi_p) = \sum_{p^\nu\in S(x,y)} g_p(\alpha)\frac{f(p^\nu)}{p^\nu},\\ \mathbb{V}(Z_{f,x,y}) &:= \sum_{p^\nu\in S(x,y)} g_p(\alpha)\frac{f(p^\nu)^2}{p^{\nu\alpha}} - \sum_{p\leqslant y}\Big\{\sum_{\nu\geqslant 1} g_p(\alpha)\frac{f(p^\nu)}{p^{\nu\alpha}}\Big\}^2, \end{aligned}$$

et le moment d'ordre 2 de $Z_{f,x,y}$,

$$B_f(x,y)^2 := \sum_{p\leqslant y}\mathbb{E}(\xi_p^2) = \sum_{p^\nu\in S(x,y)} g_p(\alpha)\frac{f(p^\nu)^2}{p^{\nu\alpha}}. \tag{1·21}$$

Ces termes restent très maniables dans la mesure où Hildebrand et Tenenbaum ont établi dans [14] des approximations précises et simples de α suivant l'ordre de grandeur de y par rapport à x. Pour fixer les idées, nous donnons l'estimation, valable pour $x\geqslant y\geqslant 2$,

$$\alpha \approx \frac{\log(1+y/\log x)}{\log y}.$$

Comme précédemment, il est utile dans les applications de considérer la variance semi-empirique $V_f(x,y)$, introduite dans [2] et mesurant l'écart quadratique entre une fonction $f\in\mathbb{A}$ et la moyenne de son modèle, donc définie par

$$V_f(x,y) := \frac{1}{\Psi(x,y)}\sum_{n\in S(x,y)}\big\{f(n)-A_f(x,y)\big\}^2, \quad (x,y\geqslant 2). \tag{1·22}$$

Dans [3], La Bretèche et Tenenbaum étudient avec précision la qualité de l'approximation du rapport (1·11) par l'expression (1·19). Ils en déduisent dans [2] que l'on a uniformément pour $f\in\mathbb{A}$, $2\leqslant y\leqslant x$,

$$V_f(x,y) \ll B_f(x,y)^2. \tag{1·23}$$

La Bretèche et Tenenbaum privilégient, dans [2], la quantité $V_f(x,y)$ à $V_f^{\#}(x,y)$ car elle est bien adaptée aux applications, comme par exemple les théorèmes de type Erdős–Wintner ou l'étude de la structure multiplicative d'un entier friable — cf.les théorèmes 1.4 et 1.6 de [2].

La variance empirique et la variance semi-empirique sont liées par la relation

$$V_f(x,y) - V_f^{\#}(x,y) = \Big(E_f(x,y) - A_f(x,y)\Big)^2. \tag{1·24}$$

Nous pouvons établir directement à partir du théorème 2.4 de [3], l'estimation uniforme pour $f \in \mathbb{A}$,

$$A_f(x,y) - E_f(x,y) \ll \frac{B_f(x,y)}{\sqrt{u}} \quad (2 \leqslant y \leqslant x), \tag{1·25}$$

qui entraîne, d'après (1·24),

$$V_f(x,y) = V_f^{\#}(x,y) + O\Big(\frac{B_f(x,y)^2}{u}\Big). \tag{1·26}$$

Nous retrouvons et précisons (1·26) dans la Proposition 4.5 *infra*. En particulier, d'après (1·26), l'inégalité

$$V_f^{\#}(x,y) \ll B_f(x,y)^2, \tag{1·27}$$

est également valable uniformément pour $f \in \mathbb{A}$ et $2 \leqslant y \leqslant x$.

Ainsi que le font remarquer La Bretèche et Tenenbaum dans [2], dans le cas $x = y$ les inégalités (1·5) et (1·23) sont équivalentes : l'estimation *infra* (2·1) donne

$$\alpha(x,x) = 1 + O\Big(\frac{1}{(\log x)^2}\Big),$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} A_f(x) &= A_f(x,x) + O\Big(\frac{B_f(x)}{\log x}\Big), \\ B_f(x) &= B_f(x,x)\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log x}\Big)\Big\}, \\ V_f(x) &= V_f(x,x) + O\Big(\frac{B_f(x)}{\log x}\Big). \end{aligned} \tag{1·28}$$

Tout comme dans le cas $x = y$, se pose le problème de déterminer le comportement asymptotique de la meilleure constante dans l'inégalité (1·23), c'est-à-dire

$$C(x,y) := \sup_{f \in \mathbb{A}} \frac{V_f(x,y)}{B_f(x,y)^2} \quad (2 \leqslant y \leqslant x).$$

Les estimations (1·8) et (1·28) montrent que

$$C(x,x) = 2 + o(1) \quad (x \to \infty).$$

De plus, La Bretèche et Tenenbaum ont également établi que

$$C(x,y) = 1 + o(1)$$

lorsque $u \to \infty$ et $x/\log y \to \infty$.

Il faut remarquer que la meilleure constante asymptotique dans l'inégalité (1·27),

$$C^{\#}(x,y) = \sup_{f \in \mathbb{A}} \frac{V_f^{\#}(x,y)}{B_f(x,y)^2},$$

n'a pas, *a priori*, le même comportement que $C(x,y)$ dans la mesure où nous ne disposons pas d'un analogue de (1·6) pour les variances friables $V_f(x,y)$ et $V_f^*(x,y)$.

Notre étude porte sur le comportement asymptotique de $C(x,y)$ et $C^{\#}(x,y)$ lorsque le paramètre $u=\log x/\log y\geqslant 1$ est fixé. Dans ce domaine, l'approximation (1·13), issue de la formule de Hildebrand, du rapport (1·11) est meilleure que (1·19). Toutefois les inégalités de Turán-Kubilius friables (1·23) et (1·27) sont valables sans restriction sur x et y et les expressions de $A_f(x,y)$ et $B_f(x,y)^2$ sont plus maniables que leurs analogues (1·17). Nous conserverons donc le point de vue de La Bretèche et Tenenbaum et étudierons les constantes

$$C^{\#}(u):=\limsup_{x\to\infty}C^{\#}(x,x^{1/u})\qquad\text{et}\qquad C(u):=\limsup_{x\to\infty}C(x,x^{1/u}).$$

La relation (1·24) implique que

$$C^{\#}(u)\leqslant C(u)\quad(u\geqslant 1).$$

Par ailleurs, nous avons, d'après (1·8), (1·26) et (1·28),

$$C(1)=C^{\#}(1)=2,$$

ainsi que

$$\lim_{u\to\infty}C^{\#}(u)=\lim_{u\to\infty}C(u)=1.$$

2. Estimations fondamentales

Les estimations données dans ce paragraphe sont uniformes lorsque la variable u est contenue dans un ensemble compact de $[1,\infty[$. Donnons dès maintenant une estimation de α dans notre domaine d'étude. Pour $v>0$, nous définissons $\xi(v)$ comme l'unique solution réelle positive de l'équation

$$1+v\xi=\mathrm{e}^{\xi}$$

lorsque $v\neq 1$ et nous posons $\xi(1)=0$. La formule (7.8) de [14] indique alors que pour $u\geqslant 1$ fixé, nous avons

$$\alpha=1-\frac{\xi(u)}{\log y}+O\Big(\frac{1}{(\log y)^2}\Big)\quad(x\geqslant 2,y=x^{1/u}).\tag{2·1}$$

Nos travaux nécessitent des estimations précises du rapport (1·11) pour $u\geqslant 1$ fixé. Elles font intervenir la fonction h définie par

$$h(u,v):=\frac{\varrho(u-v)\mathrm{e}^{-v\xi(u)}}{\varrho(u)}\quad(u\geqslant 1,0\leqslant v\leqslant u),\tag{2·2}$$

qui joue un rôle central dans notre étude. Nous regroupons quelques estimations essentielles concernant la fonction h dans le Lemme 6.3 *infra.*

Nous rappelons la notation $u_d:=\log d/\log y$ et nous désignons par $\omega(k)$ le nombre de diviseurs premiers d'un entier k, conformément à l'usage. L'estimation suivante est une conséquence directe du théorème 2.3 de [3] et de la formule de Hildebrand (1·12).

Proposition 2.1. *Soit $A>1$. Il existe une constante C absolue, telle que l'on ait, uniformément pour $x\geqslant 2$, $y=x^{1/u}$, $d\geqslant 1$, $P(k)\leqslant y$, $\omega(k)\ll 1$, $1\leqslant u\leqslant A$,*

$$\frac{\Psi_k(x/d,y)}{\Psi(x,y)}=\frac{g_k(\alpha)}{d^\alpha}h(u,u_d)\Big\{1+O\big(R(x,y,d)\big)\Big\},\tag{2·3}$$

avec

$$R(x,y,d)=\frac{1}{\log y}+\Big(\frac{d}{x}\Big)^C.$$

L'estimation (2·3) présente l'avantage d'une grande généralité et d'une certaine maniabilité. Cependant, elle souffre d'un défaut de précision lorsque d est proche de x. C'est pourquoi nous donnons une autre estimation du rapport $\Psi_k(x/d, y)/\Psi(x, y)$, dans le cas où $d = p^\nu$ et $k = p$, moins maniable mais cependant plus précise. Rappelant la définition de $\omega_x(p^\nu)$ $(\nu \geqslant 1)$ en (1·2), nous introduisons la fonction $\vartheta_{x,y}$ définie par

$$\vartheta_{x,y}(p^\nu) = \begin{cases} h(u, u_{p^\nu}) & \text{si } p^\nu \leqslant x/y, \\ \dfrac{\omega_x(p^\nu)p^\nu}{g_p(1)\varrho(u)\mathrm{e}^{u_{p^\nu}\xi(u)}} & \text{si } p^\nu > x/y. \end{cases} \tag{2·4}$$

Proposition 2.2. *Soit $A > 1$. On a uniformément pour $x \geqslant 2$, $y = x^{1/u}$, $p^\nu \in S(x, y)$, $1 \leqslant u \leqslant A$,*

$$\frac{\Psi_p(x/p^\nu, y)}{\Psi(x, y)} = \frac{g_p(\alpha)}{p^{\nu\alpha}}\vartheta_{x,y}(p^\nu)\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log y}\Big)\Big\}. \tag{2·5}$$

Nous prouvons les Propositions 2.1 et 2.2 au paragraphe 7.

3. Méthode employée

Notre démarche consiste à établir une formule asymptotique pour $V_f^\#(x, y)$ dont nous déduirons des estimations de $C^\#(u)$. Pour cela nous généralisons la méthode employée par Hildebrand dans [11] pour traiter le cas $u = 1$. Ensuite, nous préciserons le lien entre $V_f^\#(x, y)$ et $V_f(x, y)$ pour obtenir des résultats concernant $C(u)$.

Par additivité de f, nous obtenons

$$V_f^\#(x, y) = P_f(x, y) + Q_f(x, y) - R_f(x, y), \tag{3·1}$$

avec

$$P_f(x, y) := \sum_{p^\nu \in S(x,y)} f(p^\nu)^2 \frac{\Psi_p(x/p^\nu, y)}{\Psi(x, y)}, \tag{3·2}$$

$$Q_f(x, y) := -\sum_{\substack{p^\nu, q^\mu \in S(x,y) \\ p \neq q}} f(p^\nu)f(q^\mu)\Big\{\frac{\Psi_p(x/p^\nu, y)\Psi_q(x/q^\mu, y)}{\Psi(x, y)^2} - \frac{\Psi_{pq}(x/p^\nu q^\mu, y)}{\Psi(x, y)}\Big\}, \tag{3·3}$$

et

$$R_f(x, y) := \sum_{p \leqslant y}\Big(\sum_{\nu \geqslant 1} f(p^\nu)\frac{\Psi_p(x/p^\nu, y)}{\Psi(x, y)}\Big)^2. \tag{3·4}$$

Au vu de (2·5), l'étude de $P_f(x, y)$ et $R_f(x, y)$ se réduit à celle de la fonction $\vartheta_{x,y}$. Nous effectuons ce travail aux paragraphes 8 et 9.

L'étude de $Q_f(x,y)$ est plus délicate et constitue le cœur de la méthode de Hildebrand. La formule (2·3) suggère que $Q_f(x,y)$ est proche de

$$-\sum_{\substack{p^\nu,q^\mu\in S(x,y)\\ p\neq q}} g_{pq}(\alpha)\frac{f(p^\nu)f(q^\mu)}{p^{\nu\alpha}q^{\mu\alpha}}K_u(u_{p^\nu},u_{q^\mu}), \tag{3·5}$$

où K_u est la fonction définie par

$$K_u(s,t) := h(u,s)h(u,t) - h(u,s+t) \quad (s,t\in[0,1]). \tag{3·6}$$

Nous observons dès maintenant que

$$K_u(s,t) \geqslant 0 \quad (s,t\in[0,1]).$$

Cela résulte immédiatement de la croissance sur $[1,\infty[$ de la dérivée logarithmique de $1/\varrho$,

$$r(v) := -\frac{\varrho'(v)}{\varrho(v)} \quad (v\geqslant 0),$$

qui a été établie par Hildebrand [(2)].

D'après l'estimation (2·1) employée sous la forme

$$d^{\alpha-1} = \mathrm{e}^{-u_d\xi(u)}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\log y}\Big)\Big\}, \tag{3·7}$$

la quantité (3·5) est elle-même proche de

$$-\sum_{\substack{p^\nu,q^\mu\in S(x,y)\\ p\neq q}} g_{pq}(\alpha)\frac{f(p^\nu)f(q^\mu)}{p^{\nu}q^{\mu}}K_u(u_{p^\nu},u_{q^\mu})\mathrm{e}^{(u_{p^\nu}+u_{q^\mu})\xi(u)}. \tag{3·8}$$

Nous obtenons en fait le résultat suivant, énoncé rigoureusement au Lemme 15.2 *infra*, et qui montre que la contribution à $Q_f(x,y)$ des puissances de nombres premiers p^ν avec $\nu>1$ peut être négligée pour la recherche de $C^\#(u)$. On a

$$Q_f(x,y) = Q_f^*(x,y) + o(B_f(x,y)^2) \qquad (x\to\infty)$$

avec

$$Q_f^*(x,y) := -\sum_{p,q\leqslant y}\frac{f(p)f(q)}{pq}K_u(u_p,u_q)\mathrm{e}^{(u_p+u_q)\xi(u)}. \tag{3·9}$$

Nous sommes donc ramenés à étudier $Q_f^*(x,y)$.

À x et y fixés, $Q_f^*(x,y)$ est une forme quadratique en la variable $f\in\mathbb{A}$. Nous allons nous ramener à étudier une forme quadratique définie sur un espace de Hilbert en approchant des sommes discrètes par des intégrales, ne dépendant que de f et u, pour une mesure adaptée. L'expression de $Q_f^*(x,y)$ suggère l'emploi de la mesure m_u définie sur $[0,1]$ par

$$\mathrm{d}m_u(s) = \mathrm{e}^{s\xi(u)}\frac{\mathrm{d}s}{s}. \tag{3·10}$$

2. Voir la preuve du lemme 1 de [12].

Posons $H_u = L^2([0,1], m_u$ et munissons cet ensemble du produit scalaire canonique

$$\langle \varphi, \psi \rangle_u := \int_0^1 \varphi(s)\psi(s)\,\mathrm{d}m_u(s), \tag{3·11}$$

qui lui confère une structure d'espace de Hilbert séparable. L'expression de $Q_f^*(x,y)$ nous incite à considérer la forme quadratique $\widetilde{Q}$ définie sur H_u par

$$\widetilde{Q_u}(\varphi) := -\int_0^1 \int_0^1 \varphi(s)\varphi(t)K_u(s,t)\,\mathrm{d}m_u(s)\,\mathrm{d}m_u(t) \quad (\varphi \in H_u).$$

Considérons à présent l'opérateur T_u de H_u défini par

$$T_u\varphi(s) := -\int_0^1 \varphi(t)K_u(s,t)\,\mathrm{d}m_u(t), \tag{3·12}$$

de sorte que

$$\widetilde{Q_u}(\varphi) = \langle \varphi, T_u\varphi \rangle_u \quad (\varphi \in H_u).$$

Nous démontrons au paragraphe 10 que $K_u \in L^2([0,1]^2, m_u \otimes m_u)$ ce qui implique que T_u est un opérateur de Hilbert-Schmidt, en particulier un opérateur compact. Comme K_u est de plus symétrique, l'opérateur T_u est autoadjoint. D'après un théorème classique d'analyse fonctionnelle, H_u admet donc une base hilbertienne de vecteurs propres pour T_u. De plus, les valeurs propres constituent une famille discrète de nombres réels possédant 0 comme unique point d'accumulation [(3)]. Notons $(q_j)_{j\geqslant 1}$ cette base hilbertienne et $(\lambda_j)_{j\geqslant 1}$ la famille de valeurs propres associée de sorte que

$$T_u q_j = \lambda_j q_j \quad (j \geqslant 1).$$

Nous avons en particulier

$$\widetilde{Q_u}(\varphi) = \langle T_u\varphi, \varphi \rangle_u = \sum_{j\geqslant 1} \lambda_j \langle \varphi, q_j \rangle_u^2 \leqslant \lambda(u) \sum_{j\geqslant 1} \langle \varphi, q_j \rangle_u^2 \quad (\varphi \in H_u), \tag{3·13}$$

où

$$\lambda(u) := \max_{j\geqslant 1} \lambda_j > 0. \tag{3·14}$$

La méthode de Hildebrand consiste à établir que l'on peut approcher une fonction arbitraire $f \in \mathbb{A}$ par une suite de fonctions $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ de H_u, de sorte que $Q_f^*(x,y)$ soit approché par $\widetilde{Q_u}(\varphi_n) = \langle \varphi_n, T_u\varphi_n \rangle_u$, en vue d'appliquer (3·13) à φ_n.

Afin de construire la suite $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, nous adaptons la structure préhilbertienne de H_u à l'espace $\mathbb{A}$, en introduisant le pseudo-produit scalaire défini par

$$\langle f, g \rangle_{\mathbb{A}} := \sum_{p\leqslant y} \frac{f(p)g(p)e^{u_p\xi(u)}}{p} \quad (f, g \in \mathbb{A}). \tag{3·15}$$

De plus, pour $j \geqslant 1$, nous définissons la fonction arithmétique additive $\widehat{q_j}$ par

$$\widehat{q_j}(p^\nu) := q_j(u_{p^\nu}) \qquad (p \geqslant 2, \nu \geqslant 0). \tag{3·16}$$

Nous pouvons alors établir que les fonctions $(\widehat{q_j})_{j\geqslant 1}$ constituent une pseudo-base orthogonale de l'espace $\mathbb{A}$. En effet, d'après le Lemme 12.1 et la majoration (16·2) *infra*, nous avons, pour $1 \leqslant j, k \leqslant n$,

$$\begin{aligned} \langle \widehat{q_j}, \widehat{q_k} \rangle_{\mathbb{A}} = \sum_{p\leqslant y} \frac{\widehat{q_j}(p)\widehat{q_k}(p)e^{u_p\xi(u)}}{p} &= \int_0^1 q_j(s)q_k(s)\,\mathrm{d}m_u(s) + o_n(1) \\ &= \langle q_j, q_k \rangle_u + o_n(1) = \delta_{j,k} + o_n(1) \end{aligned} \qquad (y \to \infty).$$

3. Pour tout ce qui concerne la théorie des opérateurs, on pourra consulter par exemple la référence [18].

Étant donnée une fonction $f \in \mathbb{A}$, nous introduisons naturellement la suite $\{c_j(f)\}_{j=1}^{\infty}$ de ses coefficient de Fourier dans cette pseudo-base hilbertienne en posant

$$c_j(f) := \langle f, \widehat{q}_j \rangle_{\mathbb{A}} = \sum_{p \leqslant y} \frac{f(p)\widehat{q}_j(p)e^{u_p \xi(u)}}{p} \quad (f \in \mathbb{A}, j \geqslant 1).$$

Nous définissons alors φ_n par

$$\varphi_n(t) := \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} c_j(f) q_j(t) \qquad (t \in [0,1], 1 \leqslant j \leqslant n), \tag{3·17}$$

ce qui correspond essentiellement à la projection orthogonale de la fonction f sur l'espace engendré par les fonctions $\{q_j\}_{j=1}^{n}$.

Nous donnons dès maintenant un analogue de l'inégalité de Bessel dans l'espace $\mathbb{A}$ muni du pseudo produit scalaire défini en (3·15). Nous introduisons la quantité

$$B_f^{(1)}(x,y)^2 := \sum_{p \leqslant y} g_p(\alpha) \frac{f(p)^2}{p^\alpha} \leqslant B_f(x,y)^2. \tag{3·18}$$

Proposition 3.1. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $u \geqslant 1$. On a uniformément pour $f \in \mathbb{A}$, $x \geqslant 2$, $y = x^{1/u}$,*

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant n} c_j(f)^2 \leqslant \big\{1 + o_n(1)\big\} B_f^{(1)}(x,y)^2 \quad (x \to \infty). \tag{3·19}$$

4. Résultats

4.1. Formule asymptotique pour $V_f^{\#}(x,y)$

Afin d'énoncer une formule asymptotique pour $V_f^{\#}(x,y)$, nous introduisons pour $u \geqslant 1$ les quantités suivantes :

$$\begin{aligned} h_1(u) &:= \max_{0 \leqslant v \leqslant u-1} h(u,v), \\ h_2(u) &:= \max\{2h(u,u), h(u,u-1)\} \end{aligned} \tag{4·1}$$

Nous mentionnons dès maintenant la formule

$$h_1(u) = \max_{0 \leqslant v \leqslant \min(1,u-1)} h(u,v), \tag{4·2}$$

établie au Lemme 6.3. Comme $\xi(1/\log 2) = 2$ et comme la fonction ξ est croissante, nous avons

$$h_2(u) = \frac{\mathrm{e}^{-u\xi(u)}}{\varrho(u)} \max\big\{2, \mathrm{e}^{\xi(u)}\big\} = \begin{cases} 2h(u,u) & \text{si } u \leqslant 1/\log 2, \\ h(u,u-1) & \text{si } u > 1/\log 2. \end{cases} \tag{4·3}$$

De plus,

$$h_2(u) = \mathrm{e}^{-\{1+o(1)\}u} \quad (u \to \infty). \tag{4·4}$$

Rappelons que

$$V_f^{\#}(x,y) = P_f(x,y) + Q_f(x,y) - R_f(x,y), \tag{4·5}$$

où $P_f(x,y)$, $Q_f(x,y)$ et $R_f(x,y)$ sont respectivement définis en (3·2), (3·3) et (3·4). Pour établir une formule asymptotique pour $V_f^{\#}(x,y)$, nous évaluons indépendamment les trois termes figurant dans (4·5).

La fonction $\vartheta_{x,y}(p^\nu)$ est définie en (2·4). Il résulte directement de l'estimation (2·5) que

$$P_f(x,y) = \sum_{p^\nu \in S(x,y)} g_p(\alpha)\vartheta_{x,y}(p^\nu)\frac{f(p^\nu)^2}{p^{\nu\alpha}} + o\big(B_f(x,y)^2\big) \quad (x\to\infty). \tag{4·6}$$

Lorsque $p^\nu \leqslant x/y$, nous avons $\vartheta_{x,y}(p^\nu) = h(u, u_{p^\nu})$. Pour rendre exploitable la contribution à (4·6) des nombres $p^\nu \in S(x,y)$ tels que $p^\nu > x/y$, nous établissons, à la Proposition 8.1, les encadrements suivants, qui sont asymptotiquement optimaux. On a pour $p^\nu \in S(x,y)$,

$$\begin{cases} \mathrm{e}^{-\xi(u)}/\varrho(u) + o(1) \leqslant \vartheta_{x,y}(p) \leqslant h(u,u-1) + o(1) & \text{si } x/y \leqslant p \leqslant y, \\ h(u,u)/2 + o(1) \leqslant \vartheta_{x,y}(p^\nu) \leqslant h_2(u) + o(1) & \text{si } \nu \geqslant 2,\ x/y \leqslant p^\nu \leqslant x,\ p \leqslant y. \end{cases} \tag{4·7}$$

Nous signalons que dans le cas $u = 1$ et $\nu = 1$, le minorant optimal de $\vartheta_{x,x}(p)$ est en fait $1/2 + o(1)$.

L'évaluation du terme $Q_f(x,y)$ est l'objet de la Proposition 15.1 et fait intervenir la fonction φ_n dont nous rappelons la définition en (3·17). Enfin le terme $R_f(x,y)$ est l'objet de la Proposition 9.1.

Théorème 4.1. *Soit $A > 1$ et $z : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction vérifiant $z(t) \leqslant t$ pour $t \geqslant 0$, et $\lim_{t\to\infty} z(t) = +\infty$. Il existe une suite réelle $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$, ne dépendant que de A et convergeant vers 0, telle que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on ait uniformément pour $f \in \mathbb{A}$, $x \geqslant 2$, $y = x^{1/u}$, $1 \leqslant u \leqslant A$,*

$$V_f^\#(x,y) = P_f^*(x,y) + \langle\varphi_n, T_u\varphi_n\rangle_u - R_f^*(x,y) + \big\{\varepsilon_n + o_n(1)\big\}B_f(x,y)^2 \quad (x\to\infty), \tag{4·8}$$

où

$$P_f^*(x,y) := \sum_{p^\nu \in S(x,y)} g_p(\alpha)\vartheta_{x,y}(p^\nu)\frac{f(p^\nu)^2}{p^{\nu\alpha}} \tag{4·9}$$

et

$$R_f^*(x,y) := \sum_{p\leqslant z(y)} \Big\{\sum_{\nu\geqslant 1} g_p(\alpha)h(u,u_{p^\nu})\frac{f(p^\nu)}{p^{\nu\alpha}}\Big\}^2. \tag{4·10}$$

4.2. Estimation de $C^\#(u)$

Rappelons la définition de $B_f^{(1)}(x,y)$ en (3·18), posons

$$B_f^{(2)}(x,y)^2 := B_f(x,y)^2 - B_f^{(1)}(x,y)^2 = \sum_{\substack{p^\nu \in S(x,y)\\ \nu\geqslant 2}} g_p(\alpha)\frac{f(p^\nu)^2}{p^{\nu\alpha}}$$

et conservons la notation $\lambda(u)$ introduite en (3·14).

Soit $f \in \mathbb{A}$. Appliquons (3·13) à φ_n puis utilisons l'inégalité (3·19). Nous obtenons

$$\begin{aligned} \langle\varphi_n, T_u\varphi_n\rangle_u &\leqslant \lambda(u)\sum_{1\leqslant j\leqslant n}\langle\varphi_n, q_j\rangle_u^2 = \lambda(u)\sum_{1\leqslant j\leqslant n} c_j(f)^2 \\ &\leqslant \big\{\lambda(u) + o(1)\big\}B_f^{(1)}(x,y)^2 \end{aligned} \qquad (x\to\infty). \tag{4·11}$$

Nous sommes alors en mesure de déduire de la formule asymptotique (4·8) et des estimations (4·7) une majoration de la variance $V_f^\#(x,y)$. Majorant trivialement le terme $-R_f^*(x,y)$ par 0, nous obtenons

$$\begin{aligned} V_f^\#(x,y) &\leqslant P_f^*(x,y) + \lambda(u)B_f^{(1)}(x,y)^2 + o\big(B_f(x,y)^2\big) \\ &\leqslant \mathcal{H}_1(u)B_f^{(1)}(x,y)^2 + \mathcal{H}_2(u)B_f^{(2)}(x,y)^2 + o\big(B_f(x,y)\big)^2, \end{aligned} \tag{4·12}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1(u) &:= \max\big\{h_1(u), h(u,u-1)\big\} + \lambda(u) = h_1(u) + \lambda(u), \\ \mathcal{H}_2(u) &:= \max\{h_1(u), h_2(u)\}. \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que $h(u,u-1) \leqslant h_1(u)$. Posant

$$h^\#(u) := \max\{h_2(u), \lambda(u) + h_1(u)\},$$

nous obtenons ainsi une majoration de $C^\#(u)$.

Corollaire 4.2. *Pour tout $u \geqslant 1$ fixé et uniformément pour $f \in \mathbb{A}$, on a*

$$V_f^{\#}(x,y) \leqslant \{h^{\#}(u) + o(1)\} B_f(x,y)^2. \tag{4·13}$$

En particulier, on a, pour $u \geqslant 1$,

$$C^{\#}(u) \leqslant h^{\#}(u). \tag{4·14}$$

Lorsque $1 \leqslant u \leqslant 1/\log 2$, nous avons $h_2(u) = 2h(u,u)$ d'après (4·1). Lorsque $u \geqslant 1/\log 2$, nous avons, en vertu de (4·3) et (4·2), $h_2(u) = h(u, u-1) \leqslant h_1(u)$. Comme $\lambda(u) > 0$, il suit

$$h^{\#}(u) = \begin{cases} \max\{2h(u,u), \lambda(u) + h_1(u)\} & \text{si } 1 \leqslant u \leqslant 1/\log 2, \\ \lambda(u) + h_1(u) & \text{si } u \geqslant 1/\log 2. \end{cases}$$

Toute comparaison de $V_f^{\#}(x,y)$ et $B_f(x,y)^2$ pour une fonction $f \in \mathbb{A}$ particulière est susceptible de fournir une minoration de $C^{\#}(u)$. Nous nous restreignons dans ce qui suit à une classe de fonctions f satisfaisant $R_f^*(x,y) = o\big(B_f(x,y)^2\big)$ $(x \to \infty)$, de sorte que la contribution de $-R_f^*(x,y)$ à $V_f^{\#}(x,y)$ reste négligeable.

Posons, pour $\varphi \in H_u$,

$$R_u(\varphi) := \int_0^1 \varphi(t)^2 h(u,t)\,\mathrm{d}m_u(t) \quad (u \geqslant 1).$$

Désignant par φ_u un vecteur propre normalisé de l'opérateur T_u associé à la valeur propre $\lambda(u)$, nous obtenons le résultat suivant où nous posons

$$h_1^-(u) := \min_{0 \leqslant v \leqslant 1} h(u,v).$$

Proposition 4.3. *Soit $u \geqslant 1$. Alors*

$$C^{\#}(u) \geqslant \max\Big\{2h(u,u), R_u(\varphi_u) + \lambda(u)\Big\}. \tag{4·15}$$

En particulier,

$$C^{\#}(u) \geqslant \max\{2h(u,u), h_1^-(u)\}. \tag{4·16}$$

Dans le cas où $u = 1$, Hildebrand démontre que $\lambda(1) = 1/2$. Lorsque $u > 1$, nous ne sommes plus en mesure d'expliciter un vecteur propre de T_u. Toutefois, nous pouvons obtenir une approximation numérique de $\lambda(u)$ avec une précision arbitraire, grâce à une méthode classique d'analyse numérique exposée au paragraphe 19.

Compte tenu de (4·14) et de (4·15), nous avons l'implication

$$2h(u,u) \geqslant h_1(u) + \lambda(u) \Rightarrow C^{\#}(u) = 2h(u,u).$$

Or

$$2h(1,1) = 2 > \tfrac{3}{2} = h_1(1) + \lambda(1).$$

De plus, les applications $u \mapsto 2h(u,u)$ et $u \mapsto h_1(u)$ sont clairement continues et nous établissons la continuité de l'application $u \mapsto \lambda(u)$ à la Proposition 11.1. Nous obtenons donc ainsi la valeur exacte de $C^{\#}(u)$ dans un voisinage de $u = 1$.

Corollaire 4.4. *Il existe $u_0^\# > 1$ tel que, pour $1 \leqslant u \leqslant u_0^\#$, on ait*

$$C^\#(u) = 2h(u,u).$$

Posons

$$u_1^\# := \sup\{u \geqslant 1 \, : \, C^\#(u) = 2h(u,u)\}.$$

Alors $u_1^\#$ est fini en vertu de la minoration (4·15) puisque l'on a $h_1^-(u) > 2h(u,u)$, pour u assez grand, d'après le Proposition 4.7 *infra* et l'évaluation (4·4). Le Corollaire 4.4 montre que $u_1^\# > 1$. Nous pouvons établir par calcul que $1,32 < u_1^\# < 1,48$.

Pour $u > u_1^\#$, alors que l'inégalité (4·16) ne fournit pas de bon résultat numérique, les relations (4·14) et (4·15) permettent un encadrement numérique satisfaisant de $C^\#(u)$. En l'absence de formule explicite pour un vecteur propre φ_u, nous exploitons la méthode numérique d'approximation de $\lambda(u)$, qui permet également d'approcher un vecteur propre pour cette même valeur propre. Les détails sont exposés au paragraphe 19. Nous obtenons ainsi un encadrement de $C^\#(u)$ dont l'amplitude maximale est inférieure à $0,2$.

En modifiant légèrement la définition de $B_f(x,y)^2$, il est possible de déterminer la valeur exacte de la constante asymptotique optimale dans l'inégalité de Turán-Kubilius. Nous énonçons le résultat correspondant et les étapes principales de sa démonstration dans l'Appendice.

4.3. La variance semi-empirique et $C(u)$

Nous rappelons la définition de la variance semi-empirique $V_f(x,y)$ en (1·22). Cette quantité peut être étudiée par la même méthode que celle employée pour $V_f^\#(x,y)$, mais sans faire appel aux résultats précédemment obtenus : nous pouvons ainsi établir que

$$V_f(x,y) = P_f(x,y) - R_f(x,y) - \sum_{p,q \leqslant y} \frac{f(p)f(q)}{pq} J_u(u_p,u_q) \mathrm{e}^{(u_p+u_q)\xi(u)} + o\big(B_f(x,y)^2\big) \quad (x \to \infty)$$

où J_u est définie par

$$J_u(s,t) := h(u,t) + h(u,s) - h(u,s+t) - 1 \quad (s,t \in [0,1]).$$

Considérons l'opérateur S_u défini sur H_u par

$$S_u\varphi(t) := \int_0^1 \varphi(s) J_u(s,t) \, \mathrm{d}m_u(s) \quad (\varphi \in H_u),$$

qui, tout comme T_u, est autoadjoint et compact. Nous obtenons pour $V_f(x,y)$ et $C(u)$ des résultats similaires à (4·8), (4·14) et (4·15) : il suffit de remplacer T_u par S_u, $\lambda(u)$ par la plus grande valeur propre $\kappa(u)$ de S_u, et φ_u par un vecteur propre de S_u. Les méthodes numériques développées dans le paragraphe 19 sont également valables pour approcher $\kappa(u)$. Cela donne lieu aux résultats énoncés dans l'introduction générale de cette thèse.

Nous avons cependant privilégié la voie qui consiste à comparer les variances $V_f(x,y)$ et $V_f^\#(x,y)$. Pour cela, nous définissons, pour $u \geqslant 1$ fixé, une fonction w_u par

$$w_u(t) := h(u,t) - 1 \quad (t \in [0,1]). \tag{4·17}$$

On a $w_u \in H_u$, comme l'atteste l'estimation (6·16) *infra*. Cette même estimation montre de plus que

$$\|w_u\|_u^2 \ll \frac{1}{u^2} \int_0^1 \mathrm{e}^{t\xi(u)} \, \mathrm{d}t \ll \frac{1}{u}, \quad (u \geqslant 1).$$

Proposition 4.5. *Soit $u \geqslant 1$. On a uniformément pour $f \in \mathbb{A}$, $x \geqslant 2$, $y = x^{1/u}$,*

$$V_f(x,y) - V_f^\#(x,y) = \left(\sum_{p \leqslant y} \frac{f(p) w_u(u_p)}{p} \mathrm{e}^{u_p \xi(u)} \right)^2 + o\big(B_f(x,y)^2\big) \quad (x \to \infty) \tag{4·18}$$

et

$$V_f(x,y) \leqslant V_f^\#(x,y) + \|w_u\|_u^2 \, B_f^{(1)}(x,y)^2 + o\big(B_f(x,y)^2\big) \quad (x \to \infty). \tag{4·19}$$

En particulier,

$$V_f(x,y) - V_f^\#(x,y) \ll \frac{B_f(x,y)^2}{u}. \tag{4·20}$$

Nous pouvons alors déduire de la Proposition 4.5 et des estimations de $C^{\#}(u)$ obtenues au paragraphe 4, un encadrement de $C(u)$. Nous introduisons à cette fin la quantité

$$\begin{aligned} h(u) : &= \max\big(h_2(u), h_1(u) + \lambda(u) + \|w_u\|_u^2\big) \\ &= \begin{cases} \max\big(2h(u,u), h_1(u) + \lambda(u) + \|w_u\|_u^2\big) & \text{si } 1 \leqslant u \leqslant 1/\log 2 \\ h_1(u) + \lambda(u) + \|w_u\|_u^2 & \text{si } u > 1/\log 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Corollaire 4.6. *Soit $u \geqslant 1$. Alors on a*

$$\max\Big\{2h(u,u), \langle w_u, \varphi_u\rangle_u^2 + R_u(\varphi_u) + \lambda(u)\Big\} \leqslant C(u) \leqslant h(u). \tag{4·21}$$

En particulier, il existe $u_0 > 1$ tel que

$$C(u) = 2h(u,u) \quad (1 \leqslant u \leqslant u_0).$$

Soit

$$u_1 := \sup\{u \geqslant 1 \,:\, C(u) = 2h(u,u)\}.$$

La quantité u_1 est finie, pour les mêmes raisons que $u_1^{\#}$, et nous obtenons par calcul l'encadrement $1,32 < u_1 < 1,48$.

Nous avons donc $C(u) = C^{\#}(u)$ dans un voisinage de $u = 1$. Nous conjecturons que cette égalité ne persiste pas pour tout $u \geqslant 1$ et qu'il existe $v_0 \geqslant 1$ tel que

$$C^{\#}(u) < C(u) \quad (u > v_0).$$

Nous donnons les détails de la preuve du Corollaire 4.6 au paragraphe 17.

4.4. Comportement asymptotique de $C^{\#}(u)$ et $C(u)$

Bien que les estimations (4·14), (4·15) et (4·21) ne soient pas explicites, du fait de la présence de $\lambda(u)$, elles nous permettent d'entreprendre une étude asymptotique des constantes $C^{\#}(u)$ et $C(u)$ lorsque $u \to \infty$. Nous obtenons la proposition suivante qui améliore l'estimation

$$C(u) = 1 + O\big(1/\sqrt{u}\big)$$

découlant des calculs menés dans la partie 5 de [2].

Proposition 4.7. *On a*

$$C^{\#}(u) = 1 + O\Big(\frac{1}{u}\Big) \quad \textit{et} \quad C(u) = 1 + O\Big(\frac{1}{u}\Big) \quad (u \geqslant 1).$$

Le point délicat dans la preuve de la Proposition 4.7 réside dans l'étude asymptotique de $\lambda(u)$. Elle repose sur un phénomène spécifique de l'opérateur T_u : lorsque u tend vers l'infini, la plus petite valeur propre de T_u reste voisine de -1 tandis que les autres tendent vers 0. Nous mentionnons dès maintenant la majoration

$$\lambda(u) \ll \frac{1}{u} \quad (u \geqslant 1), \tag{4·22}$$

qui est établie au Lemme 18.2 *infra*.

Nous terminons ce paragraphe en signalant que tous ces résultats restent valables pour des fonctions arithmétiques additives à valeurs complexes, en posant

$$V_f(x,y) := \frac{1}{\Psi(x,y)} \sum_{n \in S(x,y)} \Big|f(n) - A_f(x,y)\Big|^2 \quad \text{et} \quad B_f(x,y)^2 := \sum_{p^\nu \in S(x,y)} g_p(\alpha) \frac{|f(p^\nu)|^2}{p^{\nu\alpha}},$$

et en effectuant les changements *ad hoc*. Il convient notamment de choisir un autre produit scalaire sur H_u, soit

$$\langle \varphi, \psi\rangle_u := \int_0^1 \varphi(t)\overline{\psi(t)}\,\mathrm{d}m_u(t),$$

pour lequel l'opérateur T_u est hermitien et compact et dont le spectre demeure donc inchangé.

5. Commentaires sur le cas $u = 1$

Nous profitons de l'occasion pour tenter d'expliquer le lien entre les constantes 3/2 et 2 qui interviennent respectivement dans les résultats (1·7) et (1·8). Nous rappelons les estimations (1·28) et (1·6) qui montrent que l'on peut travailler indifféremment avec $V_f(x,x)$ ou $V_f(x) = V_f^{\#}(x,x)$, et $B_f(x,x)^2$ ou $B_f(x)^2$.

Hildebrand a démontré que $\lambda(1) = 1/2$. D'après la formule (3·1), l'estimation (15·1) *infra* et la majoration (4·11), il vient

$$V_f(x) \leqslant P_f(x,x) + \frac{1}{2}\sum_{p\leqslant x}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\frac{f(p)^2}{p} + o\big(B_f(x)^2\big) \quad (x\to\infty),$$

soit encore

$$V_f(x) \leqslant \sum_{p^\nu\leqslant x} f(p^\nu)^2\omega_x(p^\nu) + \frac{1}{2}\sum_{p\leqslant x}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\frac{f(p)^2}{p} + o\big(B_f(x)^2\big) \quad (x\to\infty). \tag{5·1}$$

Nous allons montrer que les formules asymptotiques (1·7) et (1·8) résultent toutes deux de (5·1).

En employant la majoration $\omega_x(p^\nu) \leqslant 1/p^\nu$ dans (5·1), nous obtenons directement

$$V_f(x,x) \leqslant \big\{\tfrac{3}{2}+o(1)\big\}\sum_{p^\nu\leqslant x}\frac{f(p^\nu)^2}{p^\nu} = \big\{\tfrac{3}{2}+o(1)\big\}B_f^+(x)^2.$$

Comme le remarque Hildebrand, cette inégalité est optimale : il suffit de considérer un vecteur propre φ associé à la valeur propre $-1/2$ de T_1 et d'appliquer le Lemme 16.1 *infra* à φ en notant que $h(1,t) = 1$ pour $t\in[0,1]$. Cela établit bien (1·7).

Établissons à présent la formule (1·8) à partir de (5·1). Nous avons

$$V_f(x) \leqslant \sum_{p\leqslant x} f(p)^2\omega_x(p) + \frac{1}{2}\sum_{p\leqslant x}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\frac{f(p)^2}{p} + \sum_{\substack{p^\nu\leqslant x\\ \nu\geqslant 2}} f(p^\nu)^2\omega_x(p^\nu) + o\big(B_f(x)^2\big) \quad (x\to\infty). \tag{5·2}$$

En vertu de la majoration

$$\omega_x(p) \leqslant \frac{1}{p}\Big(1-\frac{1}{p}\Big) + \min\Big(\frac{1}{p^2},\frac{1}{x}\Big),$$

nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{p\leqslant x} f(p)^2\omega_x(p) &\leqslant \sum_{p\leqslant x}\frac{f(p)^2}{p}\Big(1-\frac{1}{p}\Big) + \sum_{\sqrt{x}\leqslant p\leqslant x}\frac{f(p)^2}{p^2} + \frac{1}{x}\sum_{p\leqslant\sqrt{x}} f(p)^2\\ &\leqslant \sum_{p\leqslant x}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\frac{f(p)^2}{p} + \frac{2}{\sqrt{x}}\sum_{p\leqslant x}\frac{f(p)^2}{p}\\ &\leqslant \sum_{p\leqslant x}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\frac{f(p)^2}{p} + o\big(B_f(x)^2\big) \quad (x\to\infty).\end{aligned}$$

Par ailleurs, pour $p^\nu\leqslant x$, la majoration

$$\omega_x(p^\nu) \leqslant \frac{2}{p^\nu}\Big(1-\frac{1}{p}\Big) \tag{5·3}$$

est optimale : c'est en fait une égalité asymptotique pour $p = 2$ et $x = 2^\nu$. Il s'ensuit que

$$\sum_{\substack{p^\nu\leqslant x\\ \nu\geqslant 2}} f(p^\nu)^2\omega_x(p^\nu) \leqslant 2\sum_{\substack{p^\nu\leqslant x\\ \nu\geqslant 2}}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\frac{f(p^\nu)^2}{p}.$$

Finalement, nous avons établi la majoration

$$V_f(x) \leqslant \frac{3}{2}\sum_{p\leqslant x}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\frac{f(p)^2}{p} + 2\sum_{\substack{p^\nu\leqslant x\\ \nu\geqslant 2}}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\frac{f(p^\nu)^2}{p^\nu} + o\big(B_f(x)^2\big). \tag{5·4}$$

Ainsi

$$V_f(x) \leqslant \big\{2+o(1)\big\}B_f(x)^2 \quad (x\to\infty). \tag{5·5}$$

En s'inspirant du cas d'égalité de (5·3), La Bretèche et Tenenbaum considèrent la fonction $f \in \mathbb{A}$ définie par

$$f(p^\nu) = \begin{cases} 1 & \text{si } p=2 \text{ et } 2^\nu \leqslant x < 2^{\nu+1},\\ 0 & \text{sinon,}\end{cases}$$

et établissent ainsi que (5·5) est optimale, ce qui implique bien (1·8).

Nous constatons que, dans (5·4), la constante 3/2, provenant de la contribution à $P_f(x,x)$ des nombres premiers p et de la majoration de $Q_f(x,x)$, est éclipsée par la constante 2, provenant de la contribution à $P_f(x,x)$ des nombres p^ν avec $\nu\geqslant 2$. Lorsque u est proche de 1, le même phénomène se produit pour $V_f^\#(x,y)$: la contribution des nombres premiers p et la majoration de $Q_f(x,y)$ fournit la constante $h_1(u)+\lambda(u)$ qui est éclipsée par la constante $2h(u,u)$ issue de de la contribution à $P_f(x,y)$ des nombres p^ν avec $\nu\geqslant 2$. Mais, comme $2h(u,u)$ tend rapidement vers 0 tandis que $h_1(u)+\lambda(u) = 1+O(1/u)$, le rapport de prépondérance entre ces deux constantes s'inverse assez rapidement : le seuil critique est la valeur que nous avons notée $u_0^\#$.

6. Estimations relatives aux fonctions ϱ et ξ

6.1. Rappels concernant la fonction ξ

Nous disposons des estimations

$$\xi^{(j)}(v) = (-1)^{j-1}\frac{(j-1)!}{v^j}\bigg\{1+O\Big(\frac{1}{\log 2v}\Big)\bigg\} \quad (j\geqslant 1,\ v\geqslant 1). \tag{6·1}$$

Plus précisément, Hildebrand et Tenenbaum explicitent une représentation de $\xi(v)$ sous forme d'une série double dans [13] du type

$$\xi(v) = \log v + \log_2 v + \sum_{m\geqslant 0}\sum_{k\geqslant 1}\frac{c_{mk}}{(\log v)^m}\Big(\frac{1+\log_2 v}{v\log v}\Big) \quad (v\geqslant v_0),$$

dont nous déduisons par dérivation les estimations suivantes, qui nous seront utiles par la suite,

$$\begin{aligned} \xi''(v) &= -\frac{1}{v^2} - \frac{1}{v^2\xi(v)} + O\Big(\frac{1}{v^2(\log 2v)^2}\Big)\\ \xi'''(v) &= \frac{2}{v^3} + \frac{2}{v^3\xi(v)} + \frac{5}{v^3\xi(v)^2} + O\Big(\frac{1}{v^3(\log 2v)^3}\Big) \end{aligned} \quad (v\geqslant 1). \tag{6·2}$$

6.2. Dérivée logarithmique de ϱ

Posons

$$r(v) := -\frac{\varrho'(v)}{\varrho(v)} = \frac{\varrho(v-1)}{v\varrho(v)}. \tag{6·3}$$

Hildebrand a démontré[4] que la fonction r est strictement croissante sur $[1,\infty[$. Le comportement asymptotique de la fonction r peut être déduit de celui de la fonction ξ par le biais de la formule de Alladi-de Bruijn (voir par exemple [20] III.5, théorème 8), qui fournit une formule asymptotique pour $\varrho(v)$ en fonction de $\xi(v)$ et de sa dérivée. Il est ainsi établi au lemme 3.7 de [2] que l'on a, uniformément pour $v\geqslant 1$,

$$r(v) = \xi(v) + O(1/v), \tag{6·4}$$

$$r'(v) = \xi'(v) + O(1/v^2), \tag{6·5}$$

$$r''(v) \ll 1/v^2. \tag{6·6}$$

Nous aurons l'usage de nouvelles estimations relatives à la fonction r.

4. Voir la preuve du lemme 1 de [12].

Lemme 6.1. *On a, uniformément pour $v \geqslant 1$,*

$$r(v) - 3r(v-1) + 3r(v-2) - r(v-3) = \xi'''(v) + O\Big(\frac{\log 2v}{v^4}\Big). \tag{6·7}$$

Démonstration. Nous employons la méthode utilisée dans [2] pour établir l'estimation

$$r(v) - 2r(v-1) + r(v-2) = \xi''(v) + O\Big(\frac{\log 2v}{v^3}\Big) \quad (v \geqslant 1) \tag{6·8}$$

au cours de la preuve du Lemme 3.7. D'après le théorème 1 de [21], nous disposons d'un développement asymptotique de ϱ à l'ordre 4, soit

$$\varrho(v) = \sqrt{\frac{\xi'(v)}{2\pi}} \exp\Big\{\gamma - \int_0^v \xi(w)\,\mathrm{d}w\Big\}\big(1 + h(v) + O(1/v^4)\big),$$

où h est une fonction vérifiant

$$h^{(j)}(v) \ll \frac{1}{v^{j+1}} \quad (0 \leqslant j \leqslant 3, v \geqslant 1). \tag{6·9}$$

Nous en déduisons le développement asymptotique

$$r(t) = \xi(t)\big\{1 - h'(t) + H(t)\big\} + f(t) + O\Big(\frac{\log 2v}{v^4}\Big),$$

avec

$$\begin{aligned}\frac{f(t)}{\xi(t)+1/t} :&= -\frac{1}{2}\Big(\xi'(t) + \frac{\xi''(t)}{\xi'(t)}\Big)\big(1 - h'(t)\big) + \frac{1}{t\xi(t)+1} + \frac{5}{12}\xi''(t)\\ &\quad - \frac{1}{6}\xi''(t) - \frac{7}{48}\xi'(t)\xi''(t) + \frac{1}{8}\xi'(t)^2 - \frac{1}{48}\xi'(t)^3\\ &\quad - \frac{\xi''(t)^2}{8\xi'(y)} - \frac{\xi''(t)^2}{32\,\xi'(t)^2} + \frac{\xi''(t)\xi'''(t)}{32\,\xi'(t)^2} - \frac{3\xi''(t)^3}{128\,\xi'(t)^3}\end{aligned}$$

et

$$H(t) := h(t)h'(t) + \frac{1}{2}h''(t) + h(t)^3 - h(t)^2.$$

Nous pouvons établir, grâce aux relations (6·1) et (6·9), que

$$f'''(t) \ll \frac{\log 2t}{t^4}, \qquad H(t) \ll \frac{1}{t^3}, \qquad H'(t) \ll \frac{1}{t^4}.$$

La formule de Taylor-Lagrange nous permet alors d'obtenir (6·7). □

Lemme 6.2. *On a uniformément pour $v \geqslant 1$,*

$$r'''(v) \ll \frac{1}{v^3}. \tag{6·10}$$

Démonstration. Nous posons $s(v) := r'(v)/r(v) = r(v) - r(v-1) - 1/v$ de sorte que, d'après la formule (6.8) de [9],

$$s(v) \ll \frac{1}{v\log(2v)} \quad (v \geqslant 1). \tag{6·11}$$

Nous introduisons également la fonction

$$t(v) := \frac{r''(v)}{r(v)} = s(v)^2 + r'(v) - r'(v-1) + \frac{1}{v^2}.$$

Nous avons d'après (6·6),

$$t(v) \ll \frac{1}{v^2} \quad (v \geqslant 1).$$

En dérivant l'identité $r''(v) = t(v)r(v)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{r'''(v)}{r(v)} &= t'(v) + t(v)s(v)\\ &= 2s'(v)s(v) + r''(v) - r''(v-1) - \frac{2}{v^3} + O\Big(\frac{1}{v^3\log 2v}\Big)\\ &= 2s'(v)s(v) + r(v)t(v) - r(v-1)t(v-1) - \frac{2}{v^3} + O\Big(\frac{1}{v^3\log 2v}\Big).\end{aligned}$$

Nous avons, d'après (6·6), $s'(v) \ll 1/v^2$, donc il suit

$$\begin{aligned}\frac{r'''(v)}{r(v)} &= r(v)t(v) - r(v-1)t(v-1) - \frac{2}{v^3} + O\Big(\frac{1}{v^3\log 2v}\Big)\\ &= r(v)s(v)^2 - r(v-1)s(v-1)^2 + r(v)\big\{r(v)s(v) - r(v-1)s(v-1)\big\}\\ &\quad - r(v-1)\big\{r(v-1)s(v-1) - r(v-2)s(v-2)\big\}\\ &\quad + \frac{r(v)}{v^2} - \frac{r(v-1)}{(v-1)^2} - \frac{2}{v^3} + O\Big(\frac{1}{v^3\log 2v}\Big)\\ &= r(v)s(v)^2 - r(v-1)s(v-1)^2\\ &\quad + r(v)\big\{r(v)s(v) - 2r(v-1)s(v-1) + r(v-2)s(v-2)\big\}\\ &\quad + \big\{r(v) - r(v-1)\big\}\big\{r(v-1)s(v-1) - r(v-2)s(v-2)\big\}\\ &\quad + \frac{r(v)}{v^2} - \frac{r(v-1)}{(v-1)^2} - \frac{2}{v^3} + O\Big(\frac{1}{v^3\log 2v}\Big)\end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi

$$\frac{r'''(v)}{r(v)} = A(v) + r(v)^2B(v) + r(v)C(v) + D(v) + E(v) - \frac{2}{v^3} + O\Big(\frac{1}{v^3\log 2v}\Big), \tag{6·12}$$

où nous avons posé

$$\begin{aligned}A(v) &:= r(v)s(v)^2 - r(v-1)s(v-1)^2,\\ B(v) &:= s(v) - 2s(v-1) + s(v-2),\\ C(v) &:= 2s(v-1)\big\{r(v) - r(v-1)\big\} - s(v-2)\big\{r(v) - r(v-2)\big\},\\ D(v) &:= \big\{r(v) - r(v-1)\big\}\big\{r(v-1)s(v-1) - r(v-2)s(v-2)\big\},\\ E(v) &:= \frac{r(v)}{v^2} - \frac{r(v-1)}{(v-1)^2}.\end{aligned}$$

Nous évaluons ces quantités en employant les estimations (6·8), (6·7), (6·2) et (6·6). Nous avons

$$\begin{aligned}A(v) &= r(v)\big\{s(v) + s(v-1)\big\}\big\{s(v) - s(v-1)\big\} + s(v-1)^2\big\{r(v) - r(v-1)\big\}\\ &= r(v)\big\{s(v) + s(v-1)\big\}\big\{r(v) - 2r(v-1) + r(v-2) + \frac{1}{v^2}\big\} + O\Big(\frac{1}{v^3\log 2v}\Big)\\ &= r(v)\big\{s(v) + s(v-1)\big\}\Big(\xi''(v) + \frac{1}{v^2}\Big) + O\Big(\frac{1}{v^3\log 2v}\Big)\\ &= O\Big(\frac{1}{v^3\log 2v}\Big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B(v) &= r(v) - 3r(v-1) + 3r(v-2) - r(v-3) - \frac{2}{v^3} + O\Big(\frac{1}{v^4}\Big) \\
&= \xi'''(v) - \frac{2}{v^4} + O\Big(\frac{\log 2v}{v^3}\Big) \\
&= \frac{2}{v^3\xi(v)} + \frac{5}{v^3\xi(v)^2} + O\Big(\frac{1}{v^3(\log 2v)^3}\Big),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C(v) &= 2s(v-1)\big\{r(v) - r(v-1)\big\} - s(v-2)\big\{r(v) - r(v-2)\big\} \\
&= s(v-1)\big\{r(v) - 2r(v-1) + r(v-2)\big\} + \big\{r(v) - r(v-2)\big\}\big\{s(v-1) - s(v-2)\big\} \\
&= s(v-1)\bigg\{\xi''(v) + O\Big(\frac{\log 2v}{v^3}\Big)\bigg\} + \big\{r(v) - r(v-2)\big\}\bigg\{\frac{-1}{v^2\xi(v)} + O\Big(\frac{1}{v^2(\log 2v)^2}\Big)\bigg\} \\
&= s(v)\xi''(v) - \frac{2r'(v)}{v^2\xi(v)} + O\Big(\frac{1}{v^3(\log 2v)^2}\Big).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D(v) &= \big\{r(v-1) - r(v)\big\}\Big(r(v-1)\big\{s(v-1) - s(v-2)\big\} + s(v-2)\big\{r(v-1) - r(v-2)\big\}\Big) \\
&= -\frac{r'(v)r(v)}{v^2\xi(v)} + O\Big(\frac{1}{v^3\log 2v}\Big).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(v) &= r(v)\Big(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{(v-1)^2}\Big) + \frac{1}{(v-1)^2}\big\{r(v) - r(v-1)\big\} \\
&= -\frac{2r(v)}{v^3} + \frac{r'(v)}{v^2} + O\Big(\frac{1}{v^3\log 2v}\Big).
\end{aligned}$$

En reportant ces estimations dans (6·12), et en employant (6·4), (6·5) et (6·1), nous obtenons

$$\frac{r'''(v)}{r(v)} \ll \frac{1}{v^3\log 2v},$$

ce qui correspond à la conclusion attendue. □

6.3. Estimation de $h(u,v)$

Nous regroupons dans le lemme suivant certaines estimations utiles concernant la fonction $h(u,v)$ définie en (2·2) et que l'on peut réécrire sous la forme

$$h(u,v) = \frac{\varrho(u-v)}{\varrho(u)}\mathrm{e}^{-v\xi(u)} = \exp\bigg(\int_0^v \{r(u-t) - \xi(u)\}\,\mathrm{d}t\bigg). \tag{6·13}$$

Nous rappelons la définition de $h_1(u)$ en (4·1).

Lemme 6.3. *(i) On a*

$$h(u,w) \leqslant \max_{0\leqslant v\leqslant 1} h(u,v) \qquad (u \geqslant 1,\ w \geqslant 1), \tag{6·14}$$

en particulier

$$h_1(u) = \max_{0\leqslant v\leqslant \min(1,u-1)} h(u,v). \tag{6·15}$$

(ii) On a uniformément pour $u \geqslant 1$ et $0 \leqslant v \leqslant u$,

$$h(u,v) = 1 + O\Big(\frac{v^2}{u}\Big), \tag{6·16}$$

$$h(u,v) \ll 1. \tag{6·17}$$

Démonstration. Ainsi qu'il est remarqué dans [8], nous avons

$$r(u-1) \leqslant \xi(u) \leqslant r(u) \qquad (u > 1).$$

La fonction r étant strictement croissante sur $[1, \infty[$, nous avons donc, pour $w \geqslant 1$, d'après (6·13),

$$h(u,w) = h(u,1)\exp\Big\{\int_1^w \{r(u-t)-\xi(u)\}\,\mathrm{d}t\Big\} \leqslant h(u,1),$$

ce qui implique bien (6·14). L'estimation (6·16) est établie au Lemme 6.1 de [9] et l'estimation (6·17) est une conséquence directe de (6·14) et (6·16). □

7. Comportement local de $\Psi(x,y)$: preuves des Propositions 2.1 et 2.2

Nous commençons par démontrer la Proposition 2.1. Le cas $d > x$ est trivial dans la mesure où $h(u,v) = 0$ dès que $u < v$. Nous supposons désormais que $1 \leqslant d \leqslant x$. D'après le théorème 2.3 de [3], il existe une constante absolue $C' > 0$ telle que

$$\frac{\Psi_k(x/d,y)}{\Psi(x,y)} = g_k(\alpha)\frac{\Psi(x/d,y)}{\Psi(x,y)}\bigg\{1+O\bigg(\frac{1}{\log y}+\Big(\frac{d}{x}\Big)^{C'}\bigg)\bigg\}.$$

Nous employons à présent la formule asymptotique de Hildebrand, que nous écrivons sous la forme

$$\Psi(x,y) = x\varrho(u)\left\{1+O_\varepsilon\left(\frac{\log(u+1)}{\log y}+\frac{1}{x}\right)\right\} \qquad (x \geqslant 2, \mathrm{e}^{(\log_2 3x)^{5/3+\varepsilon}} \leqslant y),$$

où le terme en $1/x$ permet de tenir compte du cas où $1 \leqslant x < y$. Nous en déduisons que

$$\frac{\Psi_k(x/d,y)}{\Psi(x,y)} = \frac{g_m(\alpha)\varrho(u-u_d)}{d\varrho(u)}\bigg\{1+O\bigg(\frac{1}{\log y}+\Big(\frac{d}{x}\Big)^{C}\bigg)\bigg\},$$

où l'on a posé $C = \min(1, C')$. Nous employons alors l'estimation (2·1) sous la forme

(7·1) $$d^{\alpha-1} = \mathrm{e}^{-u_d\xi(u)}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\log y}\Big)\Big\},$$

et nous obtenons bien (2·3).

Démontrons à présent la Proposition 2.2. Lorsque $p^\nu \leqslant S(x/y,y)$, l'estimation (2·5) est une conséquence directe de (2·3) appliqué avec $d = p^\nu$ et $k = p$. Lorsque $p^\nu > x/y$, nous avons

$$\Psi\Big(\frac{x}{p^\nu},y\Big) = \frac{1}{x}\Big(\Big[\frac{x}{p^\nu}\Big]-\Big[\frac{x}{p^{\nu+1}}\Big]\Big) = \omega_x(p^\nu).$$

La formule (1·12) de Hildebrand implique que

$$\begin{aligned}\frac{\Psi_p(x/p^\nu,y)}{\Psi(x,y)} &= \frac{g_p(\alpha)}{p^{\nu\alpha}}\frac{\omega_x(p^\nu)p^{\nu\alpha}}{\varrho(u)g_p(\alpha)}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\log y}\Big)\Big\}\\ &= \frac{g_p(\alpha)}{p^{\nu\alpha}}\frac{\omega_x(p^\nu)p^\nu\mathrm{e}^{u_{p^\nu}\xi(u)}}{\varrho(u)g_p(\alpha)}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\log y}\Big)\Big\},\end{aligned}$$

où la dernière égalité résulte de (7·1). Nous avons

$$\frac{\partial g_p(s)}{\partial s} = \frac{\log p}{p^s} \ll 1 \quad (s \in [\alpha,1]).$$

L'estimation (2·1) implique donc la formule

$$g_p(\alpha) = g_p(1)\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\log y}\Big)\Big\},$$

qui entraîne bien la validité de (2·5) pour $p^\nu > x/y$.

8. Estimation de $\vartheta_{x,y}(p^\nu)$ lorsque $p^\nu > x/y$

Rappelons la définition de $\vartheta_{x,y}$ en (2·4) et celle de $h_2(u)$ en (4·1). Ce paragraphe est dévolu à établir un encadrement optimal de $\vartheta_{x,y}(p^\nu)$ lorsque $x/y < p^\nu \leqslant x$. Nous obtenons le résulat suivant.

Proposition 8.1. *Soit $A > 1$. On a uniformément, lorsque $x \to \infty$, $y = x^{1/u}$, $p^\nu \in S(x,y)$, $1 \leqslant u \leqslant A$,*

$$\begin{cases} \mathrm{e}^{-\xi(u)}/\varrho(u) + o(1) \leqslant \vartheta_{x,y}(p) \leqslant h(u,u-1) + o(1) & \text{si } x/y < p \leqslant y \\ h(u,u)/2 + o(1) \leqslant \vartheta_{x,y}(p^\nu) \leqslant h_2(u) + o(1) & \text{si } \nu \geqslant 2,\ x/y < p^\nu,\ p \leqslant y. \end{cases} \tag{8·1}$$

Les encadrements sont optimaux à l'exception du cas $u = 1$ et $\nu = 1$, pour lequel le minorant optimal vaut $\frac{1}{2} + o(1)$.

Démonstration. Nous commençons par observer que

$$\vartheta_{x,y}(p^\nu) = \frac{p^\nu \omega_x(p^\nu)\mathrm{e}^{-u_p\xi(u)}}{(1-1/p)\varrho(u)} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-u_{p^\nu}\xi(u)}}{\varrho(u)} \min\Big(\frac{1}{1-1/p}, 1 + \frac{p^\nu}{(1-1/p)x}\Big).$$

Posons $p = y^t$. Il suit, lorsque $x/y < p^\nu \leqslant x$,

$$\vartheta_{x,y}(p^\nu) \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-t\nu\xi(u)}}{\varrho(u)} \min\Big(\frac{1}{1-y^{-t}}, 1 + \frac{y^{t\nu-u}}{1-y^{-t}}\Big).$$

Nous allons évaluer le maximum de cette quantité sur l'intervalle $w \leqslant t \leqslant z$ lorsque

$$w := \max\Big(\frac{u-1}{\nu}, \frac{\log 2}{\log y}\Big), \qquad z := \min\Big(1, \frac{u}{\nu}\Big).$$

Une condition nécessaire pour que l'intervalle $[w,z]$ soit non vide est $u \leqslant \nu + 1$, ce que nous supposerons désormais. Cette fonction de t est le minimum de deux fonctions convexes. Elle atteint donc son maximum, soit à une extrémité de l'intervalle, soit lorsque les deux fonctions sont égales. Le cas d'égalité correspond à $t = u - \nu t$, i.e. $t = u/(\nu+1)$. Nous avons ainsi établi que

$$\vartheta_{x,y}(p^\nu)\varrho(u) \leqslant \max(B,C,D)$$

où l'on a posé

$$\begin{cases} B := \dfrac{\mathrm{e}^{-\nu z\xi(u)}}{1-y^{-z}}, \\ C := \mathrm{e}^{-w\nu\xi(u)} \min\Big(\dfrac{1}{1-y^{-w}}, 1 + \dfrac{y^{w\nu-u}}{1-y^{-w}}\Big), \\ D := \dfrac{\mathrm{e}^{-u\nu\xi(u)/(\nu+1)}}{1-y^{-u/(\nu+1)}}. \end{cases}$$

Supposons tout d'abord que $z = 1$. Nous avons alors

$$B = \frac{\mathrm{e}^{-\nu\xi(u)}}{1-y^{-1}} \leqslant \mathrm{e}^{-(u-1)\xi(u)}\big(1+o(1)\big),$$

puisque $\nu \geqslant u - 1$. Dans le cas où $z = u/\nu$, il vient

$$B \leqslant 2\mathrm{e}^{-u\xi(u)},$$

puisque $z \geqslant \log 2/\log y$.

Ensuite, nous observons que l'on a

$$C = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{-w\nu\xi(u)}}{1-y^{-w}} & \text{si } w \geqslant u/(\nu+1) \\ \mathrm{e}^{-w\nu\xi(u)}\Big(1 + \dfrac{y^{w\nu-u}}{1-y^{-w}}\Big) & \text{si } w \leqslant u/(\nu+1). \end{cases}$$

Considérons en premier lieu le cas $w = (u-1)/\nu$. Comme $\nu + 1 \geqslant u$, nous avons $w \leqslant u/(\nu+1)$ et, par suite,

$$C = \Big\{1 + \frac{y^{-1}}{1 - y^{-w}}\Big\}\mathrm{e}^{-(u-1)\xi(u)} \leqslant \big\{1 + 2y^{-1}\big\}\mathrm{e}^{-(u-1)\xi(u)} \leqslant \{1 + o(1)\}\mathrm{e}^{-(u-1)\xi(u)},$$

où la première inégalité provient de la minoration $w \geqslant \log 2/\log y$.

Examinons ensuite le cas $w = (\log 2)/\log y$, de sorte que

$$(u-1)/\nu \leqslant (\log 2)/\log y \leqslant u/\nu.$$

Si $(\nu+1)w \leqslant u$, autrement dit $2^{\nu+1} \leqslant y^u$, alors

$$C = \mathrm{e}^{-w\nu\xi(u)}\Big(1 + \frac{y^{w\nu-u}}{1-y^{-w}}\Big) = \mathrm{e}^{-w\nu\xi(u)}\Big(1 + 2y^{w\nu-u}\Big).$$

Posons $w\nu = u - \vartheta$ avec $u/(\nu+1) \leqslant \vartheta \leqslant 1$. En utilisant à nouveau la convexité, nous obtenons que

$$C = \mathrm{e}^{-(u-\vartheta)\xi(u)}\big(1 + 2y^{-\vartheta}\big) \leqslant \mathrm{e}^{-u\xi(u)}\max(\mathrm{e}^{\xi(u)}, 2) + o(1),$$

puisque $y^{-u/(\nu+1)} \leqslant \frac{1}{2} + o(1)$ lorsque $y \to \infty$.

Si $(\nu+1)w \geqslant u$, alors

$$C = \frac{\mathrm{e}^{-w\nu\xi(u)}}{1 - y^{-w}} = 2\mathrm{e}^{-w\nu\xi(u)} \leqslant 2\mathrm{e}^{-u\xi(u)+w\xi(u)} = \{2 + o(1)\}\mathrm{e}^{-u\xi(u)}.$$

Enfin, nous avons

$$\begin{aligned} D &\leqslant \frac{\mathrm{e}^{-u\xi(u)+u\xi(u)/(\nu+1)}}{1 - 1/y^{u/(\nu+1)}} \leqslant \mathrm{e}^{-u\xi(u)} \max_{u/\{1+(\log x)/\log 2\} \leqslant \vartheta \leqslant 1} \frac{\mathrm{e}^{\vartheta\xi(u)}}{1 - y^{-\vartheta}} \\ &\leqslant \mathrm{e}^{-u\xi(u)}\max\Big(2, \mathrm{e}^{\xi(u)}\Big) + o(1). \end{aligned}$$

Nous avons donc montré que l'on a dans tous les cas, lorsque $u \geqslant 1$ est fixé et $y \to \infty$,

$$\sup_{\substack{x/y < p^\nu \leqslant x \\ p \leqslant y}} \vartheta_{x,y}(p^\nu) \leqslant \{1 + o(1)\}\frac{1 + \max\{1, \mathrm{e}^{\xi(u)}\}}{\mathrm{e}^{u\xi(u)}\varrho(u)},$$

ce qui fournit bien la majoration (8·1) lorsque $\nu \geqslant 2$.

La majoration (8·1) dans le cas $\nu = 1$ correspond à un cas particulier de la preuve effectuée plus haut. En effet, lorsque $\nu = 1$, nous avons $z = 1$ et $w = (u-1)/\nu$ pour y assez grand, ce qui implique

$$\max(B, C) \leqslant \mathrm{e}^{-(u-1)\xi(u)}\big(1 + o(1)\big) \quad (\nu = 1,\ y \to \infty).$$

De plus,

$$D \leqslant \mathrm{e}^{-(u-1/2)\xi(u)}\big(1 + o(1)\big) \quad (\nu = 1,\ y \to \infty).$$

Établissons à présent les minorations de $\vartheta_{x,y}(p^\nu)$. Lorsque $x/y < p^\nu \leqslant x/2$, nous avons

$$\begin{aligned}\varrho(u)\vartheta_{x,y}(p^\nu) &= \frac{p^\nu \omega_x(p^\nu)}{g_p(1)x}\mathrm{e}^{-u_{p^\nu}\xi(u)} \geqslant \mathrm{e}^{-u_{p^\nu}\xi(u)}\Big\{1-\frac{p^\nu}{xg_p(1)}\Big\}\\ &\geqslant \frac{\mathrm{e}^{-u_{p^\nu}\xi(u)}}{2} \geqslant \frac{\mathrm{e}^{-u\xi(u)}}{2}\big\{1+o(1)\big\} \quad (x\to\infty).\end{aligned}$$

Lorsque $p^\nu > x/2$, $p^{\nu+1} > x$. Il suit

$$\varrho(u)\vartheta_{x,y}(p^\nu) = \frac{p^\nu}{g_p(1)}\Big[\frac{x}{p^\nu}\Big]\mathrm{e}^{-u_{p^\nu}\xi(u)}.$$

Sur l'intervalle $[1,\infty[$, la borne inférieure de la fonction $x \mapsto [x]/x$ vaut $1/2$. Nous en déduisons que

$$\varrho(u)\vartheta_{x,y}(p^\nu) = \frac{\mathrm{e}^{-u_{p^\nu}\xi(u)}}{2g_p(1)} \geqslant \frac{\mathrm{e}^{-u_{p^\nu}\xi(u)}}{2} \qquad (x/2 < p^\nu \leqslant x).$$

De plus, lorsque $p^\nu = x/2$, nous avons

$$\varrho(u)\vartheta_{x,y}(p^\nu) = \frac{\mathrm{e}^{-u_{p^\nu}\xi(u)}}{2}\big\{1+o(1)\big\}.$$

Nous obtenons bien la conclusion requise pour $p^\nu \in S(x,y)$ avec $\nu \geqslant 2$ et pour le cas $\nu = 1$, $u = 1$.

Lorsque $1 < u \leqslant 2$ et $x/y < p \leqslant y$, nous avons $p/x = o(1)$ quand $x \to \infty$. Il suit,

$$\begin{aligned}\varrho(u)\vartheta_{x,y}(p) &= \frac{p\omega_x(p)}{g_p(1)x}\mathrm{e}^{-u_p\xi(u)} \geqslant \mathrm{e}^{-u_p\xi(u)}\Big\{1-\frac{p}{xg_p(1)}\Big\}\\ &= \mathrm{e}^{-u_p\xi(u)}\big\{1+o(1)\big\} \geqslant \mathrm{e}^{-\xi(u)}\big\{1+o(1)\big\} \quad (x\to\infty, x/y<p\leqslant y).\end{aligned}$$

Cette minoration est asymptotiquement optimale lorsque $p = y$ et que x/y^2 est un entier tandis que x/y tend vers un entier par valeurs inférieures. Nous obtenons bien la conclusion requise pour $1 < u \leqslant 2$ et $x/y < p \leqslant y$. □

9. Estimation de $R_{\boldsymbol{f}}(x,y)$

Rappelons la définition de $R_f(x,y)$ en (3·4). Nous nous proposons ici d'établir la proposition suivante.

Proposition 9.1. *Soient $A > 1$ et $z : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction qui tend vers l'infini en l'infini. On a, uniformément pour $f \in \mathbb{A}$, $x \geqslant 2$, $y = x^{1/u}$, $1 \leqslant u \leqslant A$,*

$$R_f(x,y) = \sum_{p\leqslant z(y)}\Big\{\sum_{\nu\geqslant 1} g_p(\alpha)h(u,u_{p^\nu})\frac{f(p^\nu)}{p^{\nu\alpha}}\Big\}^2 + o\big(B_f(x,y)^2\big) \quad (x\to\infty). \tag{9·1}$$

Démonstration. Posons

$$\nu_p := \frac{\log x}{\log p} \qquad (2\leqslant p\leqslant x).$$

En employant l'estimation (2·3) et la majoration (6·17), nous obtenons

$$R_f(x,y) = \sum_{p\leqslant y}\Big\{\sum_{\nu\geqslant 1} g_p(\alpha)h(u,u_{p^\nu})\frac{f(p^\nu)}{p^{\nu\alpha}}\Big\}^2 + O(S_1+|S_2|),$$

avec

$$S_1 := \frac{1}{\log y}\sum_{p\leqslant y}\Big\{\sum_{1\leqslant\nu\leqslant\nu_p} g_p(\alpha)\frac{f(p^\nu)}{p^{\nu\alpha}}\Big\}^2$$

et

$$S_2 := \sum_{p\leqslant y}\Big\{\sum_{1\leqslant\nu\leqslant\nu_p} g_p(\alpha)\frac{f(p^\nu)}{p^{\nu\alpha}}\Big\}\Big\{\sum_{1\leqslant\nu\leqslant\nu_p} g_p(\alpha)\frac{f(p^\nu)}{p^{\nu\alpha}}\Big(\frac{p^\nu}{x}\Big)^C\Big\}.$$

Nous avons, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} S_1 &\ll \frac{1}{\log y}\sum_{p\leqslant y}\Big\{\sum_{1\leqslant\nu\leqslant\nu_p} g_p(\alpha)\frac{f(p^\nu)^2}{p^{\nu\alpha}}\Big\}\Big\{\sum_{1\leqslant\nu\leqslant\nu_p}\frac{g_p(\alpha)}{p^{\nu\alpha}}\Big\}\\ &\ll \frac{1}{\log y}\sum_{p^\nu\in S(x,y)} g_p(\alpha)\frac{f(p^\nu)^2}{p^{(\nu+1)\alpha}} \ll \frac{B_f(x,y)^2}{\log y},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} S_2 &\ll \frac{1}{x^C}\sum_{p\leqslant y}\Big\{\sum_{1\leqslant\nu\leqslant\nu_p} g_p(\alpha)\frac{f(p^\nu)^2}{p^{\nu\alpha}}\Big\}\Big\{\sum_{1\leqslant\nu\leqslant\nu_p}\frac{g_p(\alpha)}{p^{\nu\alpha}}\Big\}^{1/2}\Big\{\sum_{1\leqslant\nu\leqslant\nu_p} p^{\nu\alpha(2C-1)}\Big\}^{1/2}\\ &\ll \frac{B_f(x,y)^2}{\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

Il suit

$$R_f(x,y)=\sum_{p\leqslant y}\Big\{\sum_{\nu\geqslant 1} g_p(\alpha)h(u,u_{p^\nu})\frac{f(p^\nu)}{p^{\nu\alpha}}\Big\}^2+o\big(B_f(x,y)^2\big)\quad(x\to\infty).$$

Nous remarquons par ailleurs que pour $z\leqslant y$,

$$\begin{aligned}\sum_{z\leqslant p\leqslant y}\Big\{\sum_{\nu\geqslant 1} g_p(\alpha)h(u,u_{p^\nu})\frac{f(p^\nu)}{p^{\nu\alpha}}\Big\}^2 &\ll \sum_{z\leqslant p\leqslant y}\Big\{\sum_{1\leqslant\nu\leqslant\nu_p} g_p(\alpha)\frac{f(p^\nu)^2}{p^{\nu\alpha}}\Big\}\Big\{\sum_{1\leqslant\nu\leqslant\nu_p}\frac{g_p(\alpha)}{p^{\nu\alpha}}\Big\}\\ &\ll \frac{1}{z^\alpha}\sum_{p\leqslant y}\sum_{1\leqslant\nu\leqslant\nu_p} g_p(\alpha)\frac{f(p^\nu)^2}{p^{\nu\alpha}} \ll \frac{B_f(x,y)^2}{z^\alpha}.\end{aligned}$$

Cela implique bien la conclusion souhaitée. □

10. Estimations de $K_u(s,t)$

Nous rappelons la définition de K_u en (3·6).

10.1. Majoration élémentaire

Nous donnons tout d'abord une estimation de K_u nécessaire aux calculs ultérieurs.

Lemme 10.1. *Nous avons, uniformément pour $u\geqslant 1$, $s,t\in[0,1]$,*

(10·1) $$K_u(s,t)\ll \mathbf{1}_{]0,\infty[}(s+t-u)+r(u)\min(s,t).$$

En particulier, pour chaque $u>1$ fixé, nous avons

(10·2) $$K_u(s,t)\ll\min(s,t)\quad(s,t\in[0;1]^2),$$

où la constante implicite peut dépendre de u.

Démonstration. D'après (6·17), nous avons uniformément pour $u\geqslant 1$, $s,t\in[0,1]$,

(10·3) $$K_u(s,t)\ll 1.$$

Lorsque $s+t\leqslant u$, nous pouvons utiliser le fait que la fonction ϱ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}^+$. Plus précisément, on a

$$\begin{aligned}|\varrho(u-s)-\varrho(u)| &\leqslant s\max_{t\in[0,s]}|\varrho'(u-t)| = s|\varrho'(u-s)|\\ &= r(u-s)\varrho(u)h(u,s)s\mathrm{e}^{s\xi(u)} \ll r(u)\varrho(u)s\mathrm{e}^{s\xi(u)}\quad(0\leqslant s\leqslant u),\end{aligned}$$

où nous avons utilisé la décroissance de $|\varrho'|$, la croissance de la fonction r et la majoration (6·17).

Nous en déduisons que

$$\begin{aligned} K_u(s,t)\mathrm{e}^{(s+t)\xi(u)} &= \frac{1}{\varrho(u)^2}\big\{\varrho(u-s)\varrho(u-t)-\varrho(u)\varrho(u-s-t)\big\} \\ &= \frac{1}{\varrho(u)}\big\{\varrho(u-s)-\varrho(u-s-t)\big\}+O\Big(r(u)s\mathrm{e}^{s\xi(u)}\Big) \\ &\leqslant r(u)s\mathrm{e}^{(s+t)\xi(u)}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$K_u(s,t)\ll r(u)s.$$

Par symétrie de $K_u(s,t)$, nous obtenons

$$K_u(s,t)\ll r(u)\min(s,t),\quad (s,t\in[0,1],s+t\leqslant u). \tag{10·4}$$

La majoration (10·1) est une conséquence immédiate de (10·3) et (10·4).

Pour établir (10·2), il nous suffit de remarquer que pour $u>1$ nous avons, d'après (10·3) et (10·4),

$$\begin{aligned} &K_u(s,t)\ll 1\ll t\quad (t\geqslant u-1),\\ &K_u(s,t)\ll t\quad (t\leqslant u-1), \end{aligned}$$

où la constante dépend de u. La conclusion requise résulte alors de la symétrie de $K_u(s,t)$. □

Nous pouvons d'ores et déjà déduire du Lemme 10.1 que K_u appartient à $L^2([0,1]^2,m_u\otimes m_u)$. En effet, d'après la majoration (10·1), nous avons, uniformément pour $u\geqslant 1$,

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-2\xi(u)}\int_0^1\int_0^1 K_u(s,t)^2\,\mathrm{d}m_u(s)\,\mathrm{d}m_u(t) &\ll \int_0^1\Big(\int_{1-s}^1\frac{\mathrm{d}t}{t}\Big)\frac{\mathrm{d}s}{s}+r(u)^2\int_0^1\Big(\int_0^s\mathrm{d}t+\int_s^1 s\frac{\mathrm{d}t}{t}\Big)^2\frac{\mathrm{d}s}{s} \\ &\ll \int_0^1|\log(1-s)|\frac{\mathrm{d}s}{s}+r(u)^2\int_0^1(s+s|\log s|)^2\frac{\mathrm{d}s}{s} \\ &\ll \int_0^1|\log(1-s)|\frac{\mathrm{d}s}{s}+r(u)^2\int_0^1 s(1+|\log s|)^2\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Comme les deux dernières intégrales sont convergentes, nous obtenons la majoration suivante, valable uniformément pour $u\geqslant 1$,

$$\int_0^1\int_0^1 K_u(s,t)^2\,\mathrm{d}m_u(s)\,\mathrm{d}m_u(t)\ll(1+r(u)^2)\mathrm{e}^{2\xi(u)}. \tag{10·5}$$

Cela implique bien la conclusion requise.

10.2. Estimation uniforme en u pour $K_u(s,t)$

L'objet de cette sous-section est d'établir l'estimation suivante de K_u dont l'uniformité en u est cruciale pour établir la majoration (4·22).

Lemme 10.2. *On a, uniformément pour $u\geqslant 2$, $(s,t)\in[0,1]^2$,*

$$K_u(s,t)=st\,h(u,s)h(u,t)\bigg\{r'(u)-\frac{(s+t)}{2}r''(u)-\frac{st}{2}r'(u)^2+O\Big(\frac{1}{u^3}\Big)\bigg\}. \tag{10·6}$$

Démonstration. Nous avons

$$\begin{aligned} K_u(s,t) &= \frac{\varrho(u-s)\varrho(u-t)}{\varrho(u)^2}\mathrm{e}^{-(s+t)\xi(u)}\bigg\{1-\frac{\varrho(u-s-t)\varrho(u)}{\varrho(u-s)\varrho(u-t)}\bigg\} \\ &= h(u,s)h(u,t)\bigg\{1-\exp\Big(\int_0^t\big\{r(u-s-w)-r(u-w)\big\}\,\mathrm{d}w\Big)\bigg\}. \end{aligned}$$

Or, d'après le Lemme 6.2,

$$\begin{aligned}\int_0^t \big\{r(u-s-w)-r(u-w)\big\}\,\mathrm{d} &= \int_0^t \Big\{-sr'(u-w)+\frac{s^2}{2}r''(u-w)+O\Big(\frac{s}{u^3}\Big)\Big\}\,\mathrm{d}w\\ &= \int_0^t \Big\{-sr'(u)+wsr''(u)+\frac{s^2}{2}r''(u)\Big\}\,\mathrm{d}w+O\Big(\frac{st}{u^3}\Big)\\ &= -st\Big\{r'(u)-\frac{(s+t)}{2}r''(u)\Big\}+O\Big(\frac{st}{u^3}\Big).\end{aligned}$$

D'après (6·5), (6·1) et (6·6), nous obtenons bien (10·6). □

11. Continuité de $u \mapsto \lambda(u)$

Rappelons les définitions de la mesure $\mathrm{d}m_u$ en (3·10), du produit scalaire $(\varphi,\psi)\mapsto\langle\varphi,\psi\rangle_u$ en (3·11), de l'opérateur T_u en (3·12) et celle de $\lambda(u)$ en (3·14). Nous nous proposons ici d'établir le résultat suivant.

Proposition 11.1. *L'application $u\mapsto\lambda(u)$ est continue sur* $[1,+\infty[$.

Démonstration. Soient $u\geqslant 1$ et $v\in\mathbb{R}$ tel que $1\leqslant u+v\leqslant 2u$. Dans les calculs qui suivent, les termes d'erreur sont autorisés à dépendre de u.

Comme la fonction $t\mapsto \mathrm{e}^{t\xi(w)}$ est bornée sur $[0,1]$ pour $w\geqslant 1$, les mesures $\mathrm{d}m_u$ et $\mathrm{d}m_{u+v}$ sont équivalentes sur $[0,1]$, et donc $H_u=H_{u+v}$. Nous désignons par N_w la norme d'opérateur correspondant à la norme $\|.\|_w$.

Comme T_u et T_{u+v} sont deux opérateurs compacts autoadjoints, nous avons

$$\lambda(u)=\max_{\|\varphi\|_u=1}\langle\varphi,T_u\varphi\rangle_u,\qquad \lambda(u+v)=\max_{\|\varphi\|_{u+v}=1}\langle\varphi,T_{u+v}\varphi\rangle_{u+v}.$$

La fonction $v\mapsto\xi(v)$ étant de classe $\mathcal{C}^1$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_{u+v}^2 &= \int_0^1\varphi(t)^2\mathrm{e}^{t\xi(u+v)}\frac{\mathrm{d}t}{t}\\ &= \int_0^1\varphi(t)^2\mathrm{e}^{t\{\xi(u)+O(v)\}}\frac{\mathrm{d}t}{t}=\{1+o(1)\}\,\|\varphi\|_u^2\quad(\varphi\in H_u, v\to 0).\end{aligned}\tag{11·1}$$

Par ailleurs, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'estimation (10·5), nous avons

$$|\langle\varphi,T_{u+v}\varphi\rangle_{u+v}|\leqslant\|\varphi\|_{u+v}^2\,N_{u+v}(T)^2\ll\|\varphi\|_u^2\,,\tag{11·2}$$

où la dernière majoration provient de (11·1). Nous déduisons de (11·1) et (11·2) la formule

$$\begin{aligned}\lambda(u+v) &= \max_{\varphi\neq 0}\frac{\langle\varphi,T_{u+v}\varphi\rangle_{u+v}}{\|\varphi\|_{u+v}^2}=\max_{\varphi\neq 0}\frac{\langle\varphi,T_{u+v}\varphi\rangle_{u+v}}{\|\varphi\|_u^2}\big\{1+o(1)\big\}\\ &= \max_{\varphi\neq 0}\frac{\langle\varphi,T_{u+v}\varphi\rangle_{u+v}}{\|\varphi\|_u^2}+o(1)=\max_{\|\varphi_u\|=1}\langle\varphi,T_{u+v}\varphi\rangle_{u+v}+o(1)\quad(v\to 0).\end{aligned}$$

Maintenant, nous avons, pour $\varphi\in H_u$,

$$\begin{aligned}\langle\varphi,T_{u+v}\varphi\rangle_{u+v} &= \int_0^1\int_0^1\varphi(s)\varphi(t)K_{u+v}(s,t)\,\mathrm{d}m_{u+v}(s)\,\mathrm{d}m_{u+v}(t)\\ &= \int_0^1\int_0^1\varphi(s)\varphi(t)K_{u+v}(s,t)\mathrm{e}^{(s+t)\xi(u+v)}\frac{\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t}{st}\\ &= b(u,v)\big\{1+O(v)\big\}\end{aligned}$$

avec

$$b(u,v):=\int_0^1\int_0^1\varphi(s)\varphi(t)K_{u+v}(s,t)\,\mathrm{d}m_u(s)\,\mathrm{d}m_u(t).$$

Il résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$b(u,v) \ll \|\varphi\|_u^2 \int_0^1 \int_0^1 K_{u+v}(s,t)^2 \,\mathrm{d}m_u(s)\,\mathrm{d}m_u(t).$$

Or, d'après (10·1), nous disposons de la majoration

$$K_{u+v}(s,t) \ll \mathbf{1}_{]0,\infty[}(s+t-u-v) + \min(s,t) \ll \mathbf{1}_{]0,\infty[}(s+t-1) + \min(s,t).$$

Le calcul effectué à la fin du paragraphe 10.1 montre alors que

$$b(u,v) \ll \|\varphi\|_u^2 .$$

Nous obtenons ainsi l'évaluation

$$\langle \varphi, T_{u+v}\varphi\rangle_{u+v} = b(u,v) + O\Big(v\,\|\varphi\|_u^2\Big).$$

Il s'ensuit que

$$\lambda(u+v) = \max_{\|\varphi\|_u=1} \langle \varphi, T'_{u+v}\varphi\rangle_u + o(1) \quad (v\to 0),$$

où T'_{u+v} est l'opérateur défini par

$$T'_{u+v}\varphi(s) := \int_0^1 \varphi(t) K_{u+v}(s,t)\,\mathrm{d}m_u(t) \quad (s\in[0,1]).$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned}\lambda(u+v) &\leqslant \max_{\|\varphi\|_u=1} \langle T_u\varphi,\varphi\rangle_u + \max_{\|\varphi\|_u=1} \langle (T'_{u+v}-T_u)\varphi,\varphi\rangle_u + o(1)\\ &\leqslant \lambda(u) + N_u(T'_{u+v}-T_u)^2 + o(1) \quad (v\to 0).\end{aligned}$$

De même,

$$\lambda(u) \leqslant \lambda(u+v) + N_u(T'_{u+v}-T_u)^2 + o(1).$$

Nous obtenons donc

$$\big|\lambda(u+v)-\lambda(u)\big| \leqslant N_u(T'_{u+v}-T_u)^2 + o(1) \quad (v\to 0).$$

Il nous suffit donc d'établir que

$$\lim_{v\to 0} N_u(T'_{u+v}-T_u) = 0.$$

Nous avons, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}\big\|(T'_{u+v}-T_u)\varphi\big\|_u^2 &= \int_0^1 \bigg(\int_0^1 \big\{K_{u+v}(s,t)-K_u(s,t)\big\}\varphi(s)\,\mathrm{d}m_u(s)\bigg)^2 \mathrm{d}m_u(t)\\ &\leqslant \|\varphi\|_u^2 \int_0^1\int_0^1 \big\{K_{u+v}(s,t)-K_u(s,t)\big\}^2 \,\mathrm{d}m_u(t)\,\mathrm{d}m_u(s).\end{aligned}$$

Il suit

$$N(T_{u+v}-T_u)^2 \leqslant \int_0^1\int_0^1 \big\{K_{u+v}(s,t)-K_u(s,t)\big\}^2 \,\mathrm{d}m_u(t)\,\mathrm{d}m_u(s).$$

Or, nous avons

$$\lim_{v\to 0} K_{u+v}(s,t) - K_u(s,t) = 0$$

pour tout $s,t\in[0,1]$, sauf éventuellement sur les droites d'équations $s+t=u$, $t=1$ et $s=1$ dont la réunion est de mesure nulle. De plus,

$$\begin{aligned}K_{u+v}(s,t)-K_u(s,t) &\ll \mathbf{1}_{]0,\infty[}(s+t-u-v) + \mathbf{1}_{]0,\infty[}(s+t-u) + \min(s,t)\\ &\ll \mathbf{1}_{]0,\infty[}(s+t-1) + \min(s,t),\end{aligned}$$

la majoration étant uniforme en v. Comme l'application

$$(s,t)\mapsto \mathbf{1}_{]0,\infty[}(s+t-1) + \min(s,t)$$

appartient à $L^2\big([0,1]^2, m_u\otimes m_u\big)$, nous pouvons appliquer le théorème de la convergence dominée. La conclusion requise en résulte. $\square$

12. Approximation de sommes discrètes par des intégrales

Nous rappelons la notation

$$u_d := \frac{\log d}{\log y} \quad (d \geqslant 1).$$

Lemme 12.1. *Soit $n \geqslant 1$ et $g : [0,1]^n \to \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable telle que*

$$g(x_1, \ldots, x_n) \ll f_1(x_1) \ldots f_n(x_n) \quad ((x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n), \tag{12·1}$$

où les $(f_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ sont des applications absolument continues sur $[0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, telles que les intégrales

$$\int_0^1 f_j(t) \frac{\mathrm{d}t}{t} \quad (1 \leqslant j \leqslant n) \tag{12·2}$$

soient convergentes. Alors on a

$$\sum_{p_1, \ldots, p_n \leqslant y} \frac{g(u_{p_1}, \ldots, u_{p_n})}{p_1 \ldots p_n} = \int_{[0,1]^n} f(x_1, \ldots, x_n) \frac{dx_1 \ldots \mathrm{d}x_n}{x_1 \ldots x_n} + o(1) \quad (y \to \infty).$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Nous pouvons écrire

$$\sum_{p_1, \ldots, p_n \leqslant y} \frac{g(u_{p_1}, \ldots, u_{p_n})}{p_1 \ldots p_n} = S_1(y) + S_2(y) \tag{12·3}$$

avec

$$S_1(y) := \sum_{y^\varepsilon < p_1, \ldots, p_n \leqslant y} \frac{g(u_{p_1}, \ldots, u_{p_n})}{p_1 \ldots p_n}$$

et

$$S_2(y) := \sum_{\substack{p_1, \ldots, p_n \leqslant y \\ \exists i, p_j \leqslant y^\varepsilon}} \frac{g(u_{p_1}, \ldots, u_{p_n})}{p_1 \ldots p_n}.$$

Le lemme 9 de [19] permet d'écrire

$$S_1(y) = \int_{[\varepsilon,1]^n} g(x_1, \ldots, x_n) \frac{dx_1 \ldots \mathrm{d}x_n}{x_1 \ldots x_n} + o_\varepsilon(1) \quad (y \to \infty). \tag{12·4}$$

La majoration (12·1) implique

$$S_2(y) \ll \sum_{\substack{p_1, \ldots, p_n \leqslant y \\ \min p_j \leqslant y^\varepsilon}} \frac{f_1(u_{p_1}) \ldots f_n(u_{p_n})}{p_1 \ldots p_n} \ll \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} F_j(\varepsilon) \prod_{\substack{1 \leqslant h \leqslant n \\ h \neq j}} F_j(1),$$

où l'on a posé

$$F_j(t) := \sum_{p \leqslant y^t} \frac{f_j(u_p)}{p} \qquad (1 \leqslant j \leqslant n).$$

Maintenant, une nouvelle application du Lemme 9 de [19] permet d'écrire

$$\begin{aligned} F_j(1) - F_j(\varepsilon) &= \sum_{y^\varepsilon < p \leqslant y} \frac{f_j(u_p)}{p} = \int_\varepsilon^1 f_j(t) \frac{\mathrm{d}t}{t} + o_\varepsilon(1) \\ &= \int_0^1 f_j(t) \frac{\mathrm{d}t}{t} + h_j(\varepsilon) + o_\varepsilon(1) \quad (y \to \infty) \end{aligned}$$

où $h_j(\varepsilon)$ tend vers 0 avec ε.

De plus, une sommation d'Abel à partir de l'estimation classique

$$\sum_{p\leqslant y^t}\frac{1}{p}=\log(t\log y)+c+O\Big(\frac{1}{1+t\log y}\Big)\qquad(0\leqslant t\leqslant 1)$$

fournit, en introduisant la dérivée presque partout $f_j'\in L^1[0,1]$,

$$\begin{aligned}F_j(\varepsilon)&=\int_0^\varepsilon f_j(t)\frac{\mathrm{d}t}{t}+\int_0^\varepsilon f_j(t)\,\mathrm{d}O\Big(\frac{1}{1+t\log y}\Big)\\&=\int_0^\varepsilon f_j(t)\frac{\mathrm{d}t}{t}+O\Big(\frac{|f_j(\varepsilon)|}{1+\varepsilon\log y}+\int_0^\varepsilon\frac{|f_j'(t)|\,\mathrm{d}t}{1+t\log y}\Big)\\&=\int_0^\varepsilon f_j(t)\frac{\mathrm{d}t}{t}+o_\varepsilon(1),\end{aligned}$$

d'après le théorème de Lebesgue.

Il s'ensuit qu'il existe une fonction numérique h tendant vers 0 à l'origine telle

$$S_2(y)\ll h(\varepsilon)+o_\varepsilon(1)\quad(y\to\infty).\tag{12·5}$$

Reportons cette estimation dans (12·3) en tenant compte de (12·4). Nous obtenons

$$\sum_{p_1,\ldots,p_n\leqslant y}\frac{g(u_{p_1},\ldots,u_{p_n})}{p_1\ldots p_n}=\int_{[\varepsilon,1]^n}g(x_1,\ldots,x_n)\frac{dx_1\ldots\mathrm{d}x_n}{x_1\ldots x_n}+O\big(h(\varepsilon)\big)+o_\varepsilon(1)\quad(y\to\infty).$$

La formule requise en résulte en faisant tendre successivement y vers l'infini puis ε vers 0. □

13. Vecteurs propres de T_u

Nous nous proposons ici d'établir la proposition suivante relative aux vecteurs propres de l'opérateur T_u défini en (3·12).

Proposition 13.1. *Soit $u\geqslant 1$. Tout vecteur propre φ de T_u est intégrable au sens de Riemann sur $[0,1]$ et satisfait à la majoration*

$$\varphi(s)\ll s\quad(s\in[0,1]),\tag{13·1}$$

où la constante implicite dépend explicitement de u, de $\|\varphi\|_u$ et de la valeur propre associé à φ.

Démonstration. Soit φ un vecteur propre de T_u associé à une valeur propre λ.

Traitons tout d'abord le cas où $\lambda\neq 0$. Dans les calculs qui suivent les constantes implicites sont absolues. Nous omettons les détails de ces calculs qui reposent essentiellement sur les estimations

$$\int_{1-s}^1\sqrt{|\log(1-t)|}\frac{\mathrm{d}t}{t}\ll\mathbf{1}_{]1/2;1]}(s)+\mathbf{1}_{]0;1/2]}(s)s\sqrt{|\log s|}\quad(s\in]0,1])$$

et

$$\int_{1-s}^1\sqrt{|\log t|}\,\mathrm{d}t\ll s^{3/2}\quad(s\in[0,1]).$$

Nous avons

$$\varphi(s)=-\frac{1}{\lambda}\int_0^1\varphi(t)K_u(s,t)\,\mathrm{d}m_u(t)\quad(s\in[0,1]).\tag{13·2}$$

Cela implique que φ est continue, donc Riemann-intégrable. De plus, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$|\varphi(s)|\leqslant\frac{1}{|\lambda|}\,\|\varphi\|_u\,\Big(\int_0^1K_u(s,t)^2\,\mathrm{d}m_u(t)\Big)^{1/2}\quad(s\in[0,1]).$$

En employant la majoration

$$K_u(s,t) \ll \{1+r(u)\}\Big(\mathbf{1}_{]0,\infty[}(s+t-1)+\min(s,t)\Big) \quad (s,t\in[0,1]), \tag{13·3}$$

issue de (10·1), nous obtenons

$$\varphi(s) \ll \frac{\mathrm{e}^{\xi(u)/2}\big(1+r(u)\big)\,\|\varphi\|_u}{\lambda}\Big\{\sqrt{|\log(1-s)|}+s(1+\sqrt{|\log s|})\Big\}.$$

Reportons cette estimation dans (13·2) et utilisons à nouveau la majoration (13·3). Il suit

$$\varphi(s) \ll \frac{\mathrm{e}^{\xi(u)}\big(1+r(u)\big)^2\,\|\varphi\|_u}{\lambda^2}\Big\{s\sqrt{\log s}+O(s)\Big\} \quad (s\in[0,1]).$$

En reportant une nouvelle fois cette estimation dans (13·2) et en utilisant (13·3), il vient

$$\varphi(s) \ll \frac{M_u\,\|\varphi\|_u}{\lambda^3}\,s,$$

avec $M_u := \mathrm{e}^{3\xi(u)/2}\big\{1+r(u)\big\}^3$, ce qui correspond à la conclusion souhaitée.

Le cas $\lambda=0$ est plus délicat. En prolongeant à droite les dérivées successives de ϱ et en dérivant n fois l'équation fonctionnelle de la fonction ϱ, nous obtenons l'identité

$$\begin{aligned}\varrho^{(n)}(z+k) = {} & \frac{\varrho(z+k-n)}{\prod_{1\leqslant j\leqslant n}(z+k-j+1)} \\ & + \sum_{j=1}^{n-1}\varrho(z+k-j)P_{j,n}\Big(\frac{1}{z+k},\dots,\frac{1}{z+k-j+1}\Big) \qquad (0\leqslant n\leqslant k,\ z\in[0,1])\end{aligned}$$

où les $P_{j,n}$ sont des polynômes en j variables. Par définition, un vecteur propre φ associé à la valeur propre 0 vérifie l'équation

$$F(t) := \int_0^1 \varphi(s)\{\varrho(u-s)\varrho(u-t)-\varrho(u)\varrho(u-s-t)\}\frac{\mathrm{d}s}{s} = 0 \qquad (0\leqslant t\leqslant 1). \tag{13·4}$$

Soit k tel que $k\leqslant u<k+1$. Effectuons le changement de variable $z=u-k-t+1$ et considérons d'abord le cas $z\in]u-k,1]$. Nous avons alors

$$G(z) := \int_0^1 \varphi(s)\{\varrho(u-s)\varrho(z+k-1)-\varrho(u)\varrho(z-s+k-1)\}\frac{\mathrm{d}s}{s} = 0. \tag{13·5}$$

En dérivant $k-1$ fois l'identité (13·5), nous obtenons

$$G^{(k-1)}(z) = G_1(z)+G_2(z) = 0 \qquad (u-k\leqslant z\leqslant 1),$$

où

$$G_1(z) := \int_0^1 \varphi(s)\Big\{\frac{\varrho(z)\varrho(u-s)}{(z+1)\cdots(z+k-1)}-\frac{\varrho(u)\varrho(z-s)}{(z-s)\cdots(z-s+k-1)}\Big\}\frac{\mathrm{d}s}{s}, \tag{13·6}$$

et

$$G_2(z) := \int_0^1 \varphi(s)\big\{\varrho(u-s)Q_k(z)-\varrho(u)Q_k(z-s)\big\}\frac{\mathrm{d}s}{s},$$

avec

$$Q_k(z) := \sum_{j=1}^{k-1}\varrho(z+j)P_{j,k-1}\Big(\frac{1}{z+j+1},\dots,\frac{1}{z+k-1}\Big).$$

Dans (13·6), on a $\varrho(z)=1$ et $\varrho(z-s)=\mathbf{1}_{]0,\infty[}(z-s)$, donc

$$\begin{aligned} G_1(z) &= \int_0^z \varphi(s)\Big\{\frac{\varrho(u-s)}{(z+1)\cdots(z+k-1)} - \frac{\varrho(u)}{(z-s)\cdots(z-s+k-1)}\Big\}\frac{\mathrm{d}s}{s} \\ &\quad + \int_1^z \varphi(s)\frac{\varrho(u-s)}{(z+1)\cdots(z+k-1)}\frac{\mathrm{d}s}{s}. \end{aligned}$$

Cela implique

$$\begin{aligned} G_1'(z) &= -\frac{\varphi(z)\varrho(u)}{z(k-1)!} + \int_0^z \varphi(s)\big\{\varrho(u-s)R(z)-\varrho(u)R(z-s)\big\}\frac{\mathrm{d}s}{s} \\ &\quad + R(z)\int_z^1 \varphi(s)\varrho(u-s)\frac{\mathrm{d}s}{s} \quad (z\in]u-k,1]). \end{aligned} \tag{13·7}$$

où $R\in \mathcal{C}^1([0,1])$. Par ailleurs nous avons

$$\begin{aligned} G_2'(z) &= \int_0^z \varphi(s)\big\{\varrho(u-s)S_k(z)-\varrho(u)S_k(z-s)\big\}\frac{\mathrm{d}s}{s} \\ &\quad + \int_z^1 \varphi(s)\big\{\varrho(u-s)S_k(z)-\varrho(u)T_k(z-s)\big\}\frac{\mathrm{d}s}{s}, \end{aligned} \tag{13·8}$$

avec

$$S_k(z) := \sum_{i=0}^{k-1}\varrho(z+j)U_{j,k}\Big(\frac{1}{z+j+1},\dots,\frac{1}{z+k-1}\Big),$$

et

$$T_k(z) := \sum_{j=1}^{k-1}\varrho(z+j)U_{j,k}\Big(\frac{1}{z+j+1},\dots,\frac{1}{z+k-1}\Big),$$

les $U_{j,k}$ désignant des polynômes en j variables. Nous remarquons que S_k est lipschitzienne sur $[0,1]$ tandis que T_k l'est sur $[-1,1]$.

Les identités (13·5), (13·7) et (13·8) impliquent alors l'existence d'une fonction V, lipschitzienne sur $[0,1]$ et d'une fonction W lipschitzienne sur $[-1,1]$ telles que

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(z)}{z} &= \int_0^z \varphi(s)\big\{\varrho(u-s)V(z)-\varrho(u)V(z-s)\big\}\frac{\mathrm{d}s}{s} \\ &\quad + \int_z^1 \varphi(s)\big\{\varrho(u-s)V(z)-\varrho(u)W(z-s)\big\}\frac{\mathrm{d}s}{s} \quad (z\in]u-k,1]). \end{aligned}$$

Nous pouvons obtenir, en posant $z=u-k-t$ et en dérivant $k+1$ fois l'équation (13·5), une expression équivalente de φ pour $z\in]0,u-k]$. Il existe donc des fonctions $\widetilde{V}$ et $\widetilde{W}$ respectivement lipschitziennes sur $[0,1]$ et $[-1,1]$ telles que

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(z)}{z} &= \int_0^z \varphi(s)\big\{\varrho(u-s)\widetilde{V}(z)-\varrho(u)\widetilde{V}(z-s)\big\}\frac{\mathrm{d}s}{s} \\ &\quad + \int_z^1 \varphi(s)\big\{\varrho(u-s)\widetilde{V}(z)-\varrho(u)\widetilde{W}(z-s)\big\}\frac{\mathrm{d}s}{s} \quad (y\in]0,1]). \end{aligned} \tag{13·9}$$

Cela montre en premier lieu que φ est intégrable au sens de Riemann. Par ailleurs, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz ainsi que le caractère lipschitzien de ϱ, $\widetilde{V}$ et $\widetilde{W}$, nous obtenons,

$$\frac{\varphi(z)}{z} \ll \|\varphi\|_u\big(z+\sqrt{|\log z|}\big) \quad (z\in]0,1]),$$

soit

$$\varphi(z)\ll z\sqrt{|\log z|} \quad (z\in]0,1]).$$

En réinjectant cette dernière inégalité dans (13·9), nous en déduisons que

$$\varphi(z)\ll z\Big(1+\int_0^1\sqrt{|\log t|}\,\mathrm{d}t\Big) \quad (z\in]0,1]) \tag{13·10}$$

L'intégrale apparaissant dans (13·10) est convergente. Cela fournit la majoration attendue. □

14. Inégalité de Bessel pour les fonctions additives : preuve de la Proposition 3.1

Rappelons la définition des fonctions $\widehat{q}_j$ $(j \geqslant 1)$ en (3·16).

Soit $n \geqslant 1$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant n} c_j(f)^2 = \sum_{p\leqslant y} \frac{f(p)}{p} \sum_{1\leqslant j\leqslant n} c_j(f)\widehat{q}_j(p) \leqslant H_1^{1/2} H_2^{1/2}, \tag{14·1}$$

avec

$$H_1 := \sum_{p\leqslant y} g_p(\alpha) \frac{f^2(p)}{p^\alpha}$$

et

$$H_2 := \sum_{p\leqslant y} \frac{1}{p^\alpha g_p(\alpha)} \Big(\sum_{1\leqslant j\leqslant n} c_j(f)\widehat{q}_j(p) \Big)^2.$$

D'après les estimations (2·1) et (13·1), nous avons

$$\begin{aligned} H_2 &= \sum_{p\leqslant y} \frac{1}{p^\alpha} \Big\{ \sum_{1\leqslant j\leqslant n} c_j(f)\widehat{q}_j(p) \Big\}^2 + O_n\Big(\frac{1}{\log y} \sum_{p\leqslant y} \frac{\log p}{p^{2\alpha}} \sum_{1\leqslant j\leqslant n} c_j(f)^2 \Big) \\ &= \sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} c_j(f) c_k(f) \sum_{p\leqslant y} \frac{\widehat{q}_j(p)\widehat{q}_k(p)\mathrm{e}^{u_p\xi(u)}}{p} + o_n\Big(\sum_{1\leqslant j\leqslant n} c_j(f)^2 \Big) \\ &= \sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} c_j(f)c_k(f)\big(\delta_{j,k} + o_n(1)\big) + o_n\Big(\sum_{1\leqslant j\leqslant n} c_j(f)^2 \Big) \\ &= \big\{1 + o_n(1)\big\} \sum_{1\leqslant j\leqslant n} c_j(f)^2 \quad (x \to \infty). \end{aligned}$$

Nous déduisons donc de (14·1) et de l'estimation de H_2 que

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant n} c_j(f)^2 \leqslant \sum_{p\leqslant y} g_p(\alpha) \frac{f(p)^2}{p^\alpha} \big(1 + o_n(1)\big) \quad (x \to \infty).$$

Nous obtenons bien (3·19).

15. Estimation de $Q_f(x, y)$

Pour $f \in \mathbb{A}$, rappelons les définitions de $Q_f(x, y)$, $Q_f^*(x, y)$ et φ_n respectivement en (3·3), (3·9) et (3·17). Dans ce paragraphe, nous nous proposons d'établir la proposition suivante.

Proposition 15.1. *Soit $A > 1$. Il existe une suite réelle $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$, ne dépendant que de A et convergeant vers 0, telle que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on ait uniformément pour $f \in \mathbb{A}$, $x \geqslant 2$, $y = x^{1/u}$, $1 \leqslant u \leqslant A$*

$$Q_f(x, y) = \langle \varphi_n, T_u \varphi_n \rangle_u + \big\{\varepsilon_n + o_n(1)\big\} B_f(x, y)^2 \quad (x \to \infty). \tag{15·1}$$

Nous démontrons la Proposition 15.1 à partir de deux lemmes.

Lemme 15.2. *Soit $A > 1$. On a uniformément pour $f \in \mathbb{A}$, $x \geqslant 2$, $y = x^{1/u}$, $1 \leqslant u \leqslant A$,*

$$Q_f(x, y) = Q_f^*(x, y) + o(B_f(x, y)^2), \quad (x \to \infty) \tag{15·2}$$

Afin d'énoncer le lemme suivant, nous introduisons la quantité

$$b_f(y)^2 := \langle f, f \rangle_{\mathbb{A}} = \sum_{p\leqslant y} \frac{f(p)^2 \mathrm{e}^{u_p\xi(u)}}{p} \quad (f \in \mathbb{A}, y \geqslant 2).$$

Lemme 15.3. *Soit $A > 1$. Il existe une suite réelle $\{\varepsilon_n\}_{n\geqslant 1}$, ne dépendant que de A et convergeant vers 0, telle que, pour tout $n \geqslant 1$, on ait uniformément pour $f, g \in \mathbb{A}$, $x \geqslant 2$, $y = x^{1/u}$, $1 \leqslant u \leqslant A$,*

(15·3)
$$\sum_{p,q\leqslant y} \frac{f(p)g(q)}{pq} K_u(u_p, u_q) \mathrm{e}^{(u_p+u_q)\xi(u)} \leqslant b_f(y) b_g(y) \big\{\varepsilon_n + o_n(1)\big\} + O_n\Big(\sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} |c_j(f)||c_k(g)| \Big).$$

Déduction de la Proposition 15.1 à partir des Lemmes 15.2 et 15.3 : soit $f \in \mathbb{A}$, nous posons,

$$f_n := \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} c_j(f)\widehat{q}_j, \quad r_n := f - f_n \quad (n \geqslant 1).$$

Nous avons

$$\begin{aligned} Q_f^*(x,y) &= -\sum_{p,q \leqslant y} \frac{\big(f_n + r_n\big)(p)\big(f_n + r_n\big)(q)}{pq} K_u(u_p, u_q)\mathrm{e}^{(u_p+u_q)\xi(u)} \\ &= \Sigma_1 + 2\Sigma_2 + \Sigma_3, \end{aligned} \tag{15·4}$$

où

$$\Sigma_1 := -\sum_{p,q \leqslant y} \frac{f_n(p)f_n(q)}{pq} K_u(u_p, u_q)\mathrm{e}^{(u_p+u_q)\xi(u)}$$

$$\Sigma_2 := -\sum_{p,q \leqslant y} \frac{f_n(p)r_n(q)}{pq} K_u(u_p, u_q)\mathrm{e}^{(u_p+u_q)\xi(u)}$$

et

$$\Sigma_3 := -\sum_{p,q \leqslant y} \frac{r_n(p)r_n(q)}{pq} K_u(u_p, u_q)\mathrm{e}^{(u_p+u_q)\xi(u)}.$$

La somme Σ_1 fournit le terme principal.

$$\Sigma_1 = -\sum_{1 \leqslant j,k \leqslant n} c_j(f)c_k(f) \sum_{p,q \leqslant y} \frac{\widehat{q}_j(p)\widehat{q}_k(q)}{pq} K_u(u_p, u_q)\mathrm{e}^{(u_p+u_q)\xi(u)}.$$

D'après le Lemme 12.1 et l'estimation (13·1), nous avons donc,

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= -\sum_{1 \leqslant j,k \leqslant n} c_j(f)c_k(f) \left\{ \int_0^1 \int_0^1 q_j(s)q_k(t)K_u(s,t)\,\mathrm{d}m_u(s)\,\mathrm{d}m_u(t) + o_n(1) \right\} \\ &= \sum_{1 \leqslant j,k \leqslant n} c_j(f)c_k(f)\Big\{ \langle q_j, T_u(q_k)\rangle_u + o_n(1) \Big\} \\ &= \langle \varphi_n, T_u\varphi_n\rangle_u + o_n\Big(\sum_{1 \leqslant j \leqslant n} c_j(f)^2 \Big) \\ &= \langle \varphi_n, T_u\varphi_n\rangle_u + o_n\big(B_f(x,y)^2\big) \quad (x \to \infty), \end{aligned} \tag{15·5}$$

où la dernière égalité résulte de (3·19).

Maintenant d'après le Lemme 15.3, nous avons

$$\Sigma_2 \leqslant b_{f_n}(y)b_{r_n}(y)\big(\varepsilon_n + o_n(1)\big) + O_n\Big(\sum_{1 \leqslant j,k \leqslant n} c_j(f_n)c_k(r_n) \Big).$$

Calculons le coefficient $c_j(f_n)$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$. D'après le Lemme 12.1 et l'estimation (13·1), nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{p \leqslant y} \frac{\widehat{q}_j(p)\widehat{q}_k(p)\mathrm{e}^{u_p\xi(u)}}{p} &= \sum_{p \leqslant y} \frac{q_j(u_p)q_k(u_p)\mathrm{e}^{u_p\xi(u)}}{p} \\ &= \langle q_j, q_k\rangle_u + o_n(1) = \delta_{j,k} + o_n(1) \quad (1 \leqslant j,k \leqslant n). \end{aligned} \tag{15·6}$$

Il suit

$$\begin{aligned} c_j(f_n) &= \sum_{p \leqslant y} \frac{f_n(p)\widehat{q}_j(p)\mathrm{e}^{u_p\xi(u)}}{p} \\ &= \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} c_k(f) \sum_{p \leqslant y} \frac{\widehat{q}_j(p)\widehat{q}_k(p)\mathrm{e}^{u_p\xi(u)}}{p} \\ &= \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} c_k(f)\big(\delta_{j,k} + o_n(1)\big) \\ &= c_j(f) + o_n\big(\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} |c_k(f)| \big) \quad (1 \leqslant j \leqslant n). \end{aligned}$$

Par linéarité de $f \mapsto c_j(f)$, nous avons également

$$c_j(r_n) = o_n\big(\sum_{1\leqslant k\leqslant n} |c_k(f)|\big) \quad (1 \leqslant j \leqslant k).$$

Ces deux estimations montrent que

$$\sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} c_j(f_n)c_k(r_n) = o_n\Big(\Big\{\sum_{1\leqslant j\leqslant n} |c_j(f)|\Big\}^2\Big) = o_n\Big(\sum_{1\leqslant j\leqslant n} c_j(f)^2\Big).$$

Il nous reste à évaluer $b_{f_n}(y)^2$ et $b_{r_n}(y)^2$. Nous avons, d'après (15·6),

$$\begin{aligned} b_{f_n}(y)^2 &= \sum_{p\leqslant y} \frac{f_n(p)^2 \mathrm{e}^{u_p\xi(u)}}{p} \\ &= \sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} c_j(f)c_k(f) \sum_{p\leqslant y} \frac{\widehat{q_j}(p)\widehat{q_k}(p)\mathrm{e}^{u_p\xi(u)}}{p}. \\ &= \sum_{1\leqslant j\leqslant n} c_j(f)^2\big\{1 + o_n(1)\big\} \end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned} b_{r_n}(y)^2 &= b_f(y)^2 + b_{f_n}(y)^2 - 2\sum_{p\leqslant y} \frac{f(p)f_n(p)\mathrm{e}^{u_p\xi(u)}}{p} \\ &= b_f(y)^2 + b_{f_n}(y)^2 - 2\sum_{1\leqslant j\leqslant n} c_j(f) \sum_{p\leqslant y} \frac{f(p)\widehat{q_j}(p)\mathrm{e}^{u_p\xi(u)}}{p} \\ &= \big\{b_f(y)^2 - \sum_{1\leqslant j\leqslant n} c_j(f)^2\big\}\big(1 + o_n(1)\big). \end{aligned}$$

Nous obtenons donc

$$\Sigma_2 \ll \Big(b_f(y)^2 + \sum_{1\leqslant j\leqslant n} c_j(f)^2\Big)\Big(\varepsilon_n + o_n(1)\Big).$$

Nous pouvons établir que cette majoration est également valable pour Σ_3.

De plus, nous avons

$$b_f(y)^2 \ll B_f(x,y)^2.$$

Nous en déduisons la majoration

$$\Sigma_2 + \Sigma_3 \ll \Big(B_f(x,y)^2 + \sum_{1\leqslant j\leqslant n} c_j(f)^2\Big)\Big(\varepsilon_n + o_n(1)\Big) \ll B_f(x,y)^2\big\{\varepsilon_n + o_n(1)\big\}, \tag{15·7}$$

où la dernière inégalité résulte de (3·19). Compte tenu de (15·2), (15·4), (15·5) et (15·7) nous avons établi que

$$Q_f(x,y) = \langle\varphi_n, T_u\varphi_n\rangle_u + B_f(x,y)^2\big\{\varepsilon_n^* + o_n(1)\big\} \quad (x \to \infty),$$

où $\{\varepsilon_n^*\}_{n=1}^\infty$ est une suite convergeant vers 0, ce qui correspond bien à la conclusion requise.

Démonstration du Lemme 15.2. D'après la Proposition 2.1, nous avons

$$Q_f(x,y) := -\sum_{\substack{p^\nu, q^\mu \in S(x,y) \\ p\neq q}} g_{pq}(\alpha)\frac{f(p^\nu)fq^\mu)}{p^{\nu\alpha}q^{\mu\alpha}} K_u(u_{p^\nu}, u_{q^\mu}) + O\big(R_1 + R_2\big),$$

avec

$$R_1 := \frac{1}{\log y} \sum_{p^\nu, q^\mu \in S(x,y)} g_{pq}(\alpha)\frac{f(p^\nu)f(q^\mu)}{p^{\nu\alpha}q^{\mu\alpha}},$$

$$R_2 := \sum_{\substack{p^\nu q^\mu \in S(x,y)\\ p\neq q}} g_{pq}(\alpha)\frac{f(p^\nu)f(q^\mu)}{p^{\nu\alpha}q^{\mu\alpha}}\Big(\frac{p^\nu q^\mu}{x}\Big)^C.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$R_1 \ll \frac{B_f(x,y)^2}{\log y}\sum_{p^\nu \in S(x,y)}\frac{1}{p^{\nu\alpha}} \ll \frac{\log_2 y}{\log y}B_f(x,y)^2.$$

Par ailleurs, nous avons, toujours d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$R_2 \leqslant \frac{B_f(x,y)^2}{x^C}\left(\sum_{\substack{n\leqslant x\\ \omega(n)=2}} n^{2C-1}\right)^{1/2} \ll B_f(x,y)^2\left(\frac{\log_2 2x}{\log x}\right)^{1/2},$$

la dernière majoration résultant, *via* une intégration par parties, de l'estimation classique

$$\sum_{\substack{n\leqslant z\\ \omega(n)=2}} 1 \leqslant \frac{z\log_2 z}{\log z}, \quad z\geqslant 2.$$

Ainsi avons-nous établi que

$$Q_f(x,y) = -\sum_{\substack{p^\nu,q^\mu \in S(x,y)\\ p\neq q}} g_{pq}(\alpha)\frac{f(p^\nu)f(q^\mu)}{p^{\nu\alpha}q^{\mu\alpha}}K_u(u_{p^\nu},u_{q^\mu}) + o\big(B_f(x,y)^2\big) \quad (x\to\infty).$$

Étudions à présent la contribution des couples (p^ν,q^μ) tels que ν ou $\mu\geqslant 2$. D'après la majoration (10·1), nous avons

$$\sum_{\substack{p^\nu,q^\mu \in S(x,y)\\ \nu\geqslant 2}} g_{pq}(\alpha)K_u(u_{p^\nu},u_{q^\mu})\frac{f(p^\nu)f(q^\mu)}{p^{\nu\alpha}q^{\mu\alpha}} \ll S_1+S_2, \tag{15·8}$$

avec

$$S_1 := \sum_{\substack{p^\nu,q^\mu \in S(x,y)\\ p^\nu q^\mu > x,\nu\geqslant 2}} g_{pq}(\alpha)\frac{|f(p^\nu)f(q^\mu)|}{p^{\nu\alpha}q^{\mu\alpha}}$$

et

$$S_2 := \sum_{\substack{p^\nu,q^\mu \in S(x,y)\\ \nu\geqslant 2}} g_{pq}(\alpha)u_{p^\nu}\frac{|f(p^\nu)f(q^\mu)|}{p^{\nu\alpha}q^{\mu\alpha}}.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons

$$S_1 \ll B_f(x,y)^2\left(\sum_{\substack{p^\nu,q^\mu\leqslant x\\ p^\nu q^\mu > x,\nu\geqslant 2}}\frac{1}{p^{\nu\alpha}q^{\mu\alpha}}\right)^{1/2}.$$

Nous déduisons de l'estimation (2·1) pour α la majoration suivante.

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{p^\nu,q^\mu\leqslant x\\ p^\nu q^\mu > x,\nu\geqslant 2}}\frac{1}{p^{\nu\alpha}q^{\mu\alpha}} &\ll \sum_{q^\mu\leqslant x}\frac{1}{q^{\mu\alpha}}\sum_{\substack{p^\nu > x/q^\mu\\ \nu\geqslant 2}}\frac{1}{p^{\nu\alpha}} \ll \sum_{q^\mu\leqslant x}\frac{1}{q^{\mu\alpha}}\Big(\frac{q^{\mu\alpha}}{x}\Big)^{1/3}\sum_{p^\nu,\nu\geqslant 2}\frac{1}{p^{2\nu\alpha/3}}\\ &\ll \frac{1}{x^{1/3}}\sum_{q^\mu\leqslant x}\frac{1}{q^{2\mu\alpha/3}} \ll \frac{1}{x^{1/3}}\sum_{q\leqslant x}\frac{1}{q^{2\alpha/3}}\\ &\ll \frac{1}{x^{1/3}}\sum_{q\leqslant x}\frac{1}{q^{2/3}} \ll \frac{1}{\log x}.\end{aligned}$$

Il suit

$$S_1 \ll \frac{B_f(x,y)^2}{\sqrt{\log x}}. \tag{15·9}$$

Par ailleurs, toujours d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons

$$S_2 \ll \frac{B_f(x,y)^2}{\log y}\Big(\sum_{\substack{p^\nu \leqslant x \\ \nu \geqslant 2}} \frac{(\log p^\nu)^2}{p^{\nu\alpha}}\Big)^{1/2}\Big(\sum_{q^\mu \leqslant x} \frac{1}{q^{\mu\alpha}}\Big)^{1/2} \ll B_f(x,y)^2 \frac{\sqrt{\log_2 2x}}{\log x}. \tag{15·10}$$

Nous déduisons donc de (15·8), (15·9) et (15·10), l'estimation

$$Q_f(x,y) = -\sum_{\substack{p,q \leqslant y \\ p \neq q}} g_{pq}(\alpha)\frac{f(p)f(q)}{p^\alpha q^\alpha} K_u(u_p,u_q) + o(B_f(x,y)^2).$$

Compte tenu de l'estimation $\alpha = 1 + o(1) \geqslant 3/4$, nous obtenons, de la même manière,

$$Q_f(x,y) = -\sum_{\substack{p,q \leqslant y \\ p \neq q}} \frac{f(p)f(q)}{p^\alpha q^\alpha} K_u(u_p,u_q) + o(B_f(x,y)^2). \tag{15·11}$$

L'erreur commise en omettant la condition $p \neq q$ dans (15·11) est, d'après l'estimation (10·2),

$$\ll \frac{1}{\log y}\sum_{p \leqslant y} \frac{f(p)^2 \log p}{p^{2\alpha}} \ll \frac{B_f(x,y)^2}{\log y},$$

ce qui implique

$$Q_f(x,y) = -\sum_{p,q \leqslant y} \frac{f(p)f(q)}{p^\alpha q^\alpha} K_u(u_p,u_q) + o(B_f(x,y)^2).$$

En utilisant l'estimation (7·1), nous obtenons alors,

$$\begin{aligned} Q_f(x,y) &= Q_f^*(x,y) + O\Big(\frac{1}{\log y}\sum_{p,q \leqslant y} \frac{f(p)f(q)}{pq} K_u(u_p,u_q)\Big) + o\big(B_f(x,y)^2\big) \\ &= Q_f^*(x,y) + o\big(B_f(x,y)^2\big) \quad (x \to \infty), \end{aligned}$$

où la dernière égalité provient de la majoration (6·17) et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Nous obtenons bien la conclusion requise.

Démonstration du Lemme 15.3. Au cours de cette démonstration, nous précisons la dépendance en u des valeurs propres de T_u en désignant par $\lambda_j(u)$ la j-ème valeur propre de T_u. Comme la suite $\{q_j\}_{j=1}^\infty$ constitue une base hilbertienne de l'espace $H_u = L^2([0,1], m_u)$, la famille $\{q_j q_k\}_{j,k \geqslant 1}$ constitue une base hilbertienne de $G := L^2([0,1]^2, m_u \otimes m_u)$ muni du produit scalaire canonique,

$$\langle \varphi, \psi \rangle_G := \int_0^1 \int_0^1 \varphi(s,t)\psi(s,t)\,\mathrm{d}m_u(s)\,\mathrm{d}m_u(t) \qquad (\varphi, \psi \in G). \tag{15·12}$$

Comme $K_u \in G$, nous pouvons calculer son développement dans cette base, en effectuant le calcul suivant :

$$\begin{aligned}\langle K_u, q_j q_k\rangle_G &= \int_0^1 q_k(s)\int_0^1 q_j(t)K_u(s,t)\,\mathrm{d}m_u(t)\,\mathrm{d}m_u(s)\\ &= \lambda_j\int_0^1 q_k(s)q_j(s)\,\mathrm{d}m_u(s) = \lambda_j\delta_{j,k}\qquad (j,k\geqslant 1),\end{aligned}$$

où $\delta_{j,k}$ désigne le symbole de Kronecker. Nous avons donc

$$K_u(s,t) = \sum_{j\geqslant 1}\lambda_j(u)q_j(s)q_j(t)\quad (s,t\in[0,1]). \tag{15·13}$$

Il en découle la formule suivante, qui est classique pour un opérateur de Hilbert-Schmidt.

$$\sum_{j\geqslant 1}\lambda_j(u)^2 = \int_0^1\int_0^1 K_u(s,t)^2\,\mathrm{d}m_u(s)\,\mathrm{d}m_u(t). \tag{15·14}$$

À présent, nous posons

$$\chi_n(s,t) := \sum_{1\leqslant j\leqslant n}\lambda_j(u)q_j(s)q_j(t)\qquad (n\geqslant 1),$$

et nous effectuons la décomposition

$$\sum_{p,q\leqslant y}\frac{f(p)g(q)}{pq}K_u(u_p,u_q)\mathrm{e}^{(u_p+u_q)\xi(u)} = S_1+S_2$$

avec

$$S_1 := \sum_{p,q\leqslant y}\frac{f(p)g(q)}{pq}\chi_n(u_p,u_q)\mathrm{e}^{(u_p+u_q)\xi(u)}$$

et

$$S_2 := \sum_{p,q\leqslant y}\frac{f(p)g(q)}{pq}\big\{K_u(u_p,u_q)-\chi_n(u_p,u_q)\big\}\mathrm{e}^{(u_p+u_q)\xi(u)}$$

Le calcul de S_1 est immédiat :

$$\begin{aligned}S_1 &= \sum_{1\leqslant j\leqslant n}\lambda_j(u)\sum_{p\leqslant y}\frac{f(p)\widehat{q_j}(p)\mathrm{e}^{u_p\xi(u)}}{p}\sum_{q\leqslant y}\frac{g(q)\widehat{q_j}(q)\mathrm{e}^{u_q\xi(u)}}{q}\\ &= \sum_{1\leqslant j\leqslant n}\lambda_j(u)c_j(f)c_j(g),\end{aligned}$$

ce qui, d'après la formule (15·14) et l'inégalité (10·5), fournit le terme d'erreur de (15·3).

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons de plus

$$\begin{aligned}S_2 &\leqslant \left(\sum_{p,q\leqslant y}\frac{f(p)^2g(q)^2\mathrm{e}^{(u_p+u_q)\xi(u)}}{pq}\right)^{1/2}\left(\sum_{p,q\leqslant y}\frac{\big(K_u(u_p,u_q)-\chi_n(u_p,u_q)\big)^2\mathrm{e}^{(u_p+u_q)\xi(u)}}{pq}\right)^{1/2}\\ &\leqslant b_f(y)b_g(y)\left(\sum_{p,q\leqslant y}\frac{\vartheta_u(u_p,u_q)}{pq}\right)^{1/2},\end{aligned}$$

où nous avons posé

$$\vartheta_u(s,t) := \big\{K_u(s,t)-\chi_n(s,t)\big\}^2\mathrm{e}^{(s+t)\xi(u)}\quad (s,t\in[0,1]).$$

D'après la Proposition 13.1 et la majoration (10·2), la fonction ϑ_u est Riemann-intégrable et satisfait

$$\vartheta_u(s,t) \ll st \quad (s,t \in [0;1]). \tag{15·15}$$

Nous pouvons appliquer le Lemme 12.1 à la fonction ϑ_u, pour le choix $f_1(t) = f_2(t) = t$. Nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned}\sum_{p,q\leqslant y} \frac{\vartheta_u(u_p,u_q)}{pq} &= \int_0^1 \int_0^1 \big\{K_u(s,t) - \chi_n(s,t)\big\}^2 \,\mathrm{d}m_u(s)\,\mathrm{d}m_u(t) + o_n(1)\\ &= \int_0^1 \int_0^1 \big\{\sum_{j\geqslant n} \lambda_j(u) q_j(s) q_j(t)\big\}^2 \,\mathrm{d}m_u(s)\,\mathrm{d}m_u(t) + o_n(1)\\ &= \sum_{j\geqslant n} \lambda_j(u)^2 + o_n(1),\end{aligned} \tag{15·16}$$

où la deuxième égalité résulte de la formule (15·13). La majoration (15·15) étant uniforme pour $1 \leqslant u \leqslant A$, les termes d'erreur de (15·16) ne dépendent que de n et de A. Posons

$$F_n(u) := \sum_{j\geqslant n} \lambda_j(u)^2.$$

D'après l'identité (15·14), nous avons

$$\lim_{n\to\infty} F_n(u) = 0 \quad (u \geqslant 1),$$

et

$$F_{n+1}(u) \leqslant F_n(u) \quad (u \geqslant 1).$$

Par ailleurs, nous sommes en mesure d'établir la continuité des applications

$$u \mapsto \lambda_j(u) \quad (j \geqslant 1).$$

Pour cela, nous utilisons la caractérisation suivante (cf. [5] p.908) : si

$$\lambda_1(u) \geqslant \lambda_2(u) \geqslant ... \geqslant \lambda_j(u) \geqslant ... \geqslant 0,$$

on a

$$\lambda_j(u) = \min_{S\in V_j} \max_{x\in S} \frac{\langle\varphi, T_u\varphi\rangle_u}{\|\varphi\|_u^2},$$

où V_j désigne l'ensemble des sous-espaces de H_u de codimension $j-1$. Une caractérisation similaire est disponible pour les valeurs propres négatives rangées dans l'ordre croissant. Nous omettons les détails qui sont similaires à ceux de la preuve de la Proposition 11.1, et qui reposent essentiellement sur la continuité de l'application $u \mapsto T_u$.

De plus, si $\|\cdot\|_G$ désigne la norme associée au produit scalaire défini en (15·12), l'application $u \mapsto \|K_u\|_G$ est continue. Comme nous avons

$$F_n(u) = \|K_u\|_G - \sum_{1\leqslant j\leqslant n} \lambda_j(u)^2,$$

d'après la formule (15·14), les fonctions F_n sont également continues. Or, en vertu du théorème de Dini toute suite monotone de fonctions numériques continues convergeant simplement vers une fonction continue sur un ensemble compact y converge uniformément. Nous avons donc

$$\sum_{p,q\leqslant y} \frac{\vartheta_u(u_p,u_q)}{pq} \leqslant \varepsilon_n + o_n(1),$$

avec

$$\varepsilon_n := \sup_{1\leqslant u\leqslant A} F_n(u) \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Cela achève la preuve du Lemme 15.3.

16. Minoration de $C^{\#}(u)$: preuve de la 6·9

Commençons par énoncer un lemme permettant d'évaluer $V_f^{\#}(x,y)$ et $B_f(x,y)^2$ pour une classe assez générale de fonctions additives. Nous rappelons la notation

$$R_u(\varphi) := \int_0^1 \varphi(t)^2 h(u,t)\,\mathrm{d}m_u(t) \quad (u \geqslant 1, \varphi \in H_u).$$

Lemme 16.1. *Soient $u \geqslant 1$ et φ une fonction de H_u et vérifiant*

$$\varphi(s) \ll s \quad (s \in [0,1]). \tag{16·1}$$

Si f est la fonction additive définie par $f(p^\nu) := \varphi(u_{p^\nu})$ pour $\nu \geqslant 1$, alors on a pour $x \geqslant 2$ et $y = x^{1/u}$,

$$B_f(x,y)^2 = \|\varphi\|_u^2 + o(1) \quad (x \to \infty)$$

et

$$V_f^{\#}(x,y) = R_u(\varphi) + \langle T_u\varphi, \varphi\rangle_u + o(1) \quad (x \to \infty),$$

où les termes d'erreur dépendent implicitement de u.

Démonstration. D'après la majoration (16·1) et l'estimation $\alpha = 1 + o(1) \geqslant 3/4$ qui découle de (2·1), nous avons

$$B_f(x,y)^2 = \sum_{p \leqslant y} \frac{\varphi(u_p)^2}{p^\alpha} + o(1) \quad (x \to \infty).$$

Par définition,

$$V_f^{\#}(x,y) = \sum_{p^\nu \in S(x,y)} \varphi(u_{p^\nu})^2 \frac{\Psi_p(x/p^\nu, y)}{\Psi(x,y)} - \sum_{p \leqslant y}\Big(\sum_{\nu \geqslant 1} \varphi(u_{p^\nu})\frac{\Psi_p(x/p^\nu, y)}{\Psi(x,y)}\Big)^2 + Q_f(x,y).$$

D'après (15·2) et (2·3) nous obtenons

$$\begin{aligned} V_f^{\#}(x,y) = &\sum_{p^\nu \in S(x,y)} g_p(\alpha) h(u, u_{p^\nu}) \frac{\varphi(u_{p^\nu})^2}{p^{\nu\alpha}} \\ &- \sum_{p,q \leqslant y} \frac{\varphi(u_p)\varphi(u_q)}{pq} K_u(u_p, u_q) \mathrm{e}^{(u_p+u_q)\xi(u)} + R_1 + R_2 + R_3, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} R_1 &\ll \frac{1}{\log y} \sum_{p^\nu \in S(x,y)} \frac{\varphi(u_{p^\nu})^2}{p^{\nu\alpha}} h(u, u_{p^\nu}), \\ R_2 &\ll \sum_{p^\nu \in S(x,y)} \frac{\varphi(u_{p^\nu})^2}{p^{\nu\alpha}} h(u, u_{p^\nu}) \Big(\frac{p^\nu}{x}\Big)^C \\ R_3 &\ll \sum_{p \leqslant y} \Big(\sum_{\nu \geqslant 1} \frac{|\varphi(u_{p^\nu})|}{p^{\nu\alpha}} h(u, u_{p^\nu})\Big)^2. \end{aligned}$$

Les majorations (16·1) et (6·17) et des estimations classiques de sommes portant sur des nombres premiers nous permettent d'établir que

$$R_1 = o(1), \quad R_2 = o(1) \quad \text{et} \quad R_3 = o(1) \quad (x \to \infty).$$

et que

$$\sum_{p^\nu \in S(x,y)} g_p(\alpha) h(u, u_{p^\nu}) \frac{\varphi(u_{p^\nu})^2}{p^{\nu\alpha}} = \sum_{p \leqslant y} \frac{\varphi(u_p)^2}{p^\alpha} h(u, u_p) + o(1) \quad (x \to \infty).$$

Nous omettons les détails qui sont similaires à ceux de la preuve du Lemme 15.2. Nous avons donc

$$V_f^{\#}(x,y) = \sum_{p\leqslant y} \frac{\varphi(u_p)^2}{p^\alpha} h(u,u_p) - \sum_{p,q\leqslant y} \frac{\varphi(u_p)\varphi(u_q)}{pq} K_u(u_p,u_q)\mathrm{e}^{(u_p+u_q)\xi(u)} + o(1) \quad (x\to\infty).$$

En employant l'estimation (7·1), nous obtenons finalement

$$B_f(x,y)^2 = \sum_{p\leqslant y} \frac{\varphi(u_p)^2}{p} \mathrm{e}^{u_p\xi(u)} + o(1) \quad (x\to\infty),$$

et

$$\begin{aligned} V_f^{\#}(x,y) = &\sum_{p\leqslant y} \frac{\varphi(u_p)^2 h(u,u_p)\mathrm{e}^{u_p\xi(u)}}{p} \\ &- \sum_{p,q\leqslant y} \frac{\varphi(u_p)\varphi(u_q)K_u(u_p,u_q)\mathrm{e}^{(u_p+u_q)\xi(u)}}{pq} + o(1) \quad (x\to\infty). \end{aligned}$$

En appliquant le Lemme 12.1 aux fonctions $t\mapsto\varphi(t)^2\mathrm{e}^{t\xi(u)}$, $t\mapsto\varphi(t)^2h(u,t)\mathrm{e}^{t\xi(u)}$ et $(s,t)\mapsto\varphi(s)\varphi(t)K_u(s,t)\mathrm{e}^{(s+t)\xi(u)}$, nous obtenons bien la conclusion souhaitée. □

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la 6·9. Au cours de cette démonstration, les termes d'erreurs sont autorisés à dépendre de u.

Comparons tout d'abord $V_f^{\#}(x,y)$ et $B_f(x,y)^2$ pour la fonction $f\in\mathbb{A}$ définie par

$$f(p^\nu) = \begin{cases} 1 & \text{si } p=2 \text{ et } 2^\nu\leqslant x<2^{\nu+1}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme $u\geqslant 1$ est fixé, nous avons, d'après la formule (1·12) de Hildebrand,

$$\begin{aligned} V_f^{\#}(x,y) &= \frac{1}{\Psi(x,y)} \sum_{\substack{n\leqslant x\\ 2^\nu\|n}} 1 - \left(\frac{1}{\Psi(x,y)}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ 2^\nu\|n}} 1\right)^2 \\ &= \frac{1+o(1)}{x\varrho(u)} \qquad (x\to\infty). \end{aligned}$$

Par ailleurs, en vertu de l'estimation (7·1), il vient,

$$\begin{aligned} B_f(x,y)^2 &= \frac{1}{2^{\nu\alpha}}\Big(1-\frac{1}{2^\alpha}\Big) = \frac{1+o(1)}{2^{\nu\alpha+1}} \\ &= \frac{1}{2^{\nu+1}}\mathrm{e}^{u_{2^\nu}\xi(u)}\big\{1+o(1)\big\} \\ &= \frac{1}{2^{\nu+1}}\mathrm{e}^{u\xi(u)}\big\{1+o(1)\big\} \quad (x\to\infty). \end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$\frac{V_f^{\#}(x,y)}{B_f(x,y)^2} = \frac{2^\nu}{x} 2h(u,u)\big(1+o(1)\big) \quad (x\to\infty).$$

Il suit

$$C^{\#}(u) = \limsup_{x\to\infty} C^{\#}(x,x^{1/u}) \geqslant 2h(u,u).$$

Nous procédons de même en considérant la fonction f de $\mathbb{A}$, définie par $f(p^\nu)=\varphi_u(u_{p^\nu})$. D'après la Proposition 13.1, nous disposons de la majoration

(16·2) $$\varphi_u(s) \ll s, \quad s\in[0,1].$$

D'après le Lemme 16.1, nous avons donc

$$B_f(x,y)^2 = \|\varphi_u\|_u^2 + o(1) = 1 + o(1) \quad (x \to \infty), \tag{16·3}$$

et

$$\begin{aligned} V_f^{\#}(x,y) &= R_u(\varphi_u) + \langle T_u\varphi_u, \varphi_u\rangle_u + o(1) \\ &= R_u(\varphi_u) + \lambda(u) + o(1) \quad (x \to \infty). \end{aligned} \tag{16·4}$$

Nous déduisons de (16·3) et (16·4) la minoration

$$C^{\#}(u) \geqslant R_u(\varphi_u) + \lambda(u),$$

ce qui achève la preuve de la 6·9.

17. Variance semi-empirique : preuves de la Proposition 4.5 et du Corollaire 4.6

Établissons tout d'abord la Proposition 4.5. Nous rappelons l'estimation

$$\begin{aligned} V_f(x,y) - V_f^{\#}(x,y) &= \Big(E_f(x,y) - A_f(x,y)\Big)^2 \\ &= \bigg(\sum_{p^\nu \in S(x,y)} f(p^\nu)\Big\{\frac{\Psi_p(x/p^\nu,y)}{\Psi(x,y)} - \frac{g_p(\alpha)}{p^{\nu\alpha}}\Big\}\bigg)^2. \end{aligned} \tag{17·1}$$

Nous avons, en vertu de (2·3) et de (6·17),

$$E_f(x,y) - A_f(x,y) = \sum_{p^\nu \in S(x,y)} g_p(\alpha)\big\{h(u,u_{p^\nu}) - 1\big\}\frac{f(p^\nu)}{p^{\nu\alpha}} + O\big(R_1 + R_2\big),$$

avec

$$\begin{aligned} R_1 &:= \frac{1}{\log y}\sum_{p^\nu \in S(x,y)} g_p(\alpha)\frac{f(p^\nu)}{p^{\nu\alpha}} \\ R_2 &:= \sum_{p^\nu \in S(x,y)} g_p(\alpha)\frac{f(p^\nu)}{p^{\nu\alpha}}\Big(\frac{p^\nu}{x}\Big)^C. \end{aligned}$$

En employant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons

$$R_1 = o\big(B_f(x,y)^2\big), \qquad R_2 = o\big(B_f(x,y)^2\big) \quad (x \to \infty).$$

Nous omettons les détails. Par ailleurs, comme

$$\sum_{\substack{p^\nu \in S(x,y)\\ \nu\geqslant 2}} g_p(\alpha)\frac{f(p^\nu)}{p^{\nu\alpha}}u_{p^\nu} \ll \frac{B_f(x,y)}{\log y}\Big(\sum_{\substack{p^\nu \in S(x,y)\\ \nu\geqslant 2}} \frac{(\log p^\nu)^2}{p^{\nu\alpha}}\Big)^{1/2} = o\big(B_f(x,y)\big) \quad (x \to \infty),$$

nous obtenons, d'après l'estimation (6·16),

$$\begin{aligned} E_f(x,y) - A_f(x,y) &= \sum_{p\leqslant y} g_p(\alpha)\frac{f(p)}{p^\alpha}\big\{h(u,u_p) - 1\big\} + o\big(B_f(x,y)\big) \\ &= \sum_{p\leqslant y} \frac{f(p)}{p^\alpha}\big\{h(u,u_p) - 1\big\} + o\big(B_f(x,y)\big). \end{aligned} \tag{17·2}$$

Il suit, au vu de (17·1) et de la définition de w_u en (4·17)

$$V_f(x,y) - V_f^{\#}(x,y) = \Big(\sum_{p\leqslant y} \frac{f(p)w_u(u_p)}{p^\alpha}\Big)^2 + o\big(B_f(x,y)^2\big) \quad (x\to\infty). \tag{17·3}$$

En appliquant l'estimation (7·1), nous obtenons bien (4·18).

Maintenant, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et (2·1), nous avons

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{p\leqslant y} \frac{f(p)}{p^\alpha} w_u(u_p)\Big)^2 &\leqslant \sum_{p\leqslant y} g_p(\alpha)\frac{f(p)^2}{p^\alpha} \sum_{p\leqslant y} \frac{w_u^2(u_p)}{p^\alpha g_p(\alpha)} \\ &\leqslant B_f^{(1)}(x,y)^2 \Big(\sum_{p\leqslant y} \frac{w_u^2(u_p)}{p} \mathrm{e}^{u_p\xi(u)} + o(1)\Big)\end{aligned} \tag{17·4}$$

Le Lemme 12.1 s'applique à w_u d'après l'estimation (6·16), et il vient

$$\sum_{p\leqslant y} \frac{w_u^2(u_p)}{p} \mathrm{e}^{u_p\xi(u)} = \|w_u\|_u^2 + o(1) \quad (x\to\infty). \tag{17·5}$$

Compte tenu de (17·3), (17·4) et (17·5), nous obtenons bien (4·19).

Démonstration du Corollaire 4.6 : D'après les estimations (4·19) et (4·12), nous avons

$$\begin{aligned}V_f(x,y) \leqslant{}& \big(h_1(u) + \lambda(u) + \|w_u\|_u^2\big) B_f^{(1)}(x,y)^2 \\ &+ \max\{h_1(u), h_2(u)\} B_f^{(2)}(x,y)^2 + o\big(B_f(x,y)^2\big) \quad (x\to\infty),\end{aligned}$$

ce qui entraîne la majoration

$$V_f(x,y) \leqslant \big(h(u) + o(1)\big) B_f(x,y)^2 \quad (x\to\infty),$$

soit $C(u) \leqslant h(u)$. Par ailleurs, nous avons $C(u) \geqslant C^{\#}(u) \geqslant 2h(u,u)$. Il nous reste à établir la minoration

$$C(u) \geqslant R_u(\varphi_u) + \lambda(u) + \langle\varphi_u, w_u\rangle_u^2, \tag{17·6}$$

où φ_u un vecteur propre de T_u associé à la valeur propre $\lambda(u)$ tel que $\|\varphi_u\|_u = 1$. Notons f la fonction additive définie par $f(p^\nu) = \varphi_u(u_{p^\nu})$. D'après les formules (16·3), (4·18) et (16·4), nous avons

$$\begin{aligned}B_f(x,y)^2 &= 1 + o(1), \\ V_f(x,y) &= R_u(\varphi_u) + \lambda(u) + \Big(\sum_{p\leqslant y} \frac{f(p)w_u(u_p)}{p} \mathrm{e}^{u_p\xi(u)}\Big)^2 + o(1) \\ &= R_u(\varphi_u) + \lambda(u) + \langle\varphi_u, w_u\rangle_u^2 + o(1) \quad (x\to\infty),\end{aligned}$$

la dernière égalité provenant du Lemme 12.1 appliqué à la fonction $t \mapsto \varphi_u(t)w_u(t)$. Cela fournit bien la minoration (17·6).

18. Étude asymptotique de $C(u)$ et $C^{\#}(u)$: preuve de la Proposition 4.7

Les deux lemmes suivants nous permettent d'établir la Proposition 4.7.

Lemme 18.1. *On a uniformément pour $u \geqslant 1$ et $\varphi \in H_u$ tel que $\|\varphi\|_u = 1$,*

$$h_1(u) = 1 + O\Big(\frac{1}{u}\Big), \qquad R_u(\varphi) = 1 + O\Big(\frac{1}{u}\Big).$$

Lemme 18.2. *On a pour $u \geqslant 1$*

$$\lambda(u) \ll \frac{1}{u}.$$

Déduction de la Proposition 4.7 à partir des Propositions 18.1 et 18.2. Soit φ_u un vecteur propre de T_u de norme 1 associé à la valeur propre $\lambda(u)$. D'après (4·14) et (4·15), nous disposons de l'encadrement

$$R_u(\varphi_u) + \lambda(u) \leqslant C^{\#}(u) \leqslant h_1(u) + \lambda(u) \quad (u > 1/\log 2).$$

L'estimation

$$C^{\#}(u) = 1 + O\Big(\frac{1}{u}\Big) \tag{18·1}$$

est donc une conséquence directe des Lemmes 18.1 et 18.2. Par ailleurs, nous déduisons immédiatement de (18·1) et (4·20) l'estimation

$$C(u) = 1 + O\Big(\frac{1}{u}\Big).$$

Preuve du Lemme 18.1. L'estimation

$$h_1(u) = 1 + O\Big(\frac{1}{u}\Big)$$

est une conséquence directe de (6·16). Toujours d'après (6·16), nous avons, sous l'hypothèse $\varphi \in H_u$,

$$R_u(\varphi) = \int_0^1 \varphi(t)^2 h(u,t)\,\mathrm{d}m_u(t) = \|\varphi\|_u \Big\{1 + O\Big(\frac{1}{u}\Big)\Big\}.$$

Nous obtenons bien la conclusion souhaitée lorsque $\|\varphi\|_u = 1$.

Preuve du Lemme 18.2. Notre méthode consiste à estimer d'une part la plus petite valeur propre $\lambda^*(u)$ de T_u en utilisant la formule classique pour un opérateur compact et auto-adjoint

$$\lambda^*(u) = \min_{\substack{\varphi\in H_u\\ \|\varphi\|_u=1}} \langle T_u\varphi,\varphi\rangle_u, \tag{18·2}$$

et d'autre part la somme des carrés des valeurs propres de T_u par le biais de l'identité établie en (15·14), soit

$$\sum_{i\geqslant 1} \lambda_i^2 = \int_0^1\int_0^1 K_u(s,t)^2\,\mathrm{d}m_u(s)\,\mathrm{d}m_u(t). \tag{18·3}$$

Pour mener ces calculs, nous précisons l'estimation (6·16). Posant

$$\vartheta(u) := r(u) - \xi(u),$$

de sorte que $\vartheta(u) \ll 1/u$ d'après (6·4), la formule (6·6) implique le développement asymptotique

$$h(u,t) = 1 + t\vartheta(u) - \tfrac12 t^2 r'(u) + O\Big(\frac{1}{u^2}\Big), \quad (0 \leqslant t \leqslant 1,\ u \geqslant 2). \tag{18·4}$$

Par ailleurs, pour chaque valeur du paramètre entier $k \geqslant 1$, nous introduisons les intégrales

$$J_k := \int_0^1 s^k \mathrm{e}^{s\xi(u)}\,\mathrm{d}s, \qquad I_k := \int_0^1 s^k \frac{\varrho(u-s)}{\varrho(u)}\,\mathrm{d}s, \quad L_k := \int_0^1 s^k \frac{\varrho(u-s)^2}{\varrho(u)^2}\mathrm{e}^{-s\xi(u)}\,\mathrm{d}s.$$

On a

$$J_0 = \frac{\mathrm{e}^{\xi(u)} - 1}{\xi(u)} = u.$$

Une intégration par parties fournit la formule de récurrence

$$J_{k+1} = \frac{\mathrm{e}^{\xi(u)}}{\xi(u)} - \frac{J_k}{\xi(u)} \qquad (k \geqslant 1).$$

Nous en déduisons, grâce à (6·16), que

$$J_k \sim I_k \sim L_k \sim u \quad (u \to \infty).$$

Ces estimations et le développement asymptotique (18·4) fournissent

$$\begin{aligned} I_k &= J_k + \vartheta(u)J_{k+1} - \tfrac{1}{2}r'(u)J_{k+2} + O\Big(\frac{1}{u}\Big), \\ L_k &= J_k + 2\vartheta(u)J_{k+1} - r'(u)J_{k+2} + O\Big(\frac{1}{u}\Big). \end{aligned}$$

Nous sommes maintenant en mesure d'effectuer les calculs annoncés. Estimons d'abord $\lambda^*(u)$. Pour cela, nous évaluons la quantité $\langle T_u\varphi, \varphi\rangle_u / \langle \varphi, \varphi\rangle_u$ pour le choix $\varphi(t) = t$, qui est licite car φ appartient bien à H_u. Nous avons

$$\langle \varphi, \varphi\rangle_u = J_1.$$

D'après le Lemme 10.2 et l'identité $\int_0^1 \varrho(u-s)\,\mathrm{d}s = u\varrho(u)$, nous pouvons encore écrire

$$\begin{aligned} &\langle T_u\varphi, \varphi\rangle_u \\ &\quad = -\int_0^1\int_0^1 stK_u(s,t)\,\mathrm{d}m_u(s)\,\mathrm{d}m_u(t) \\ &\quad = -\int_0^1\int_0^1 \Big\{str'(u) - \tfrac{1}{2}st(s+t)r''(u) - \mathrm{d}m_u(st)^2r'(u)^2 + O\Big(\frac{st}{u^2}\Big)\Big\}\frac{\varrho(u-s)\varrho(u-t)}{\varrho(u)^2}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\ &\quad = -r'(u)I_1^2 + r''(u)I_1I_2 + \frac{r'(u)^2}{2}I_2^2 + O\Big(\frac{1}{u}\Big). \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} I_1^2 &= J_1^2 + 2\vartheta(u)J_1J_2 - r'(u)J_3J_1 + O(1), \\ I_1I_2 &= J_1J_2 + O(u), \\ I_1^2 &= J_2^2 + O(u). \end{aligned}$$

Cela implique,

$$\langle T_u\varphi, \varphi\rangle_u = -r'(u)J_1\Big(J_1 + 2\vartheta(u)J_2 - r'(u)J_3\Big) + r''(u)J_1J_2 + \tfrac{1}{2}r'(u)^2J_2^2 + O\Big(\frac{1}{u}\Big).$$

Nous obtenons donc

$$\begin{aligned} \lambda^*(u) &\leqslant \frac{\langle T_u\varphi, \varphi\rangle_u}{\langle \varphi, \varphi\rangle_u} \\ &= -r'(u)\big(J_1 + 2\vartheta(u)J_2 - r'(u)J_3\big) + r''(u)J_2 + \frac{r'(u)^2J_2^2}{2J_1} + O\Big(\frac{1}{u^2}\Big). \end{aligned} \tag{18·5}$$

Il existe $\delta \geqslant 1$ tel que la dernière expression figurant dans (18·5) soit négative pour $u \geqslant \delta$. Nous en déduisons que

$$\lambda^*(u)^2 \geqslant r'(u)^2J_1\big\{J_1 + 4\vartheta(u)J_2 - 2r'(u)J_3\big\} - 2r'(u)r''(u)J_1J_2 - r'(u)^3J_2^2 + O\Big(\frac{1}{u^2}\Big) \quad (u \geqslant \delta).$$

Par ailleurs, toujours en utilisant le Lemme 10.2, nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{j\geqslant 1}\lambda_j^2 &= \int_0^1\int_0^1 K_u(s,t)^2\,\mathrm{d}m_u(s)\,\mathrm{d}m_u(t) \\ &= r'(u)^2L_1^2 - 2r'(u)r''(u)L_1L_2 - r'(u)^3L_2^2 + O\Big(\frac{1}{u^2}\Big). \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} L_1^2 &= J_1^2 + 4\vartheta(u)J_1J_2 - 2r'(u)J_3J_1 + O(1), \\ L_1L_2 &= J_1J_2 + O(u), \\ L_1^2 &= J_2^2 + O(u). \end{aligned}$$

Il vient donc

$$\sum_{j\geqslant 1} \lambda_j^2 = r'(u)^2 J_1\big\{J_1 + 4\vartheta(u)J_2 - 2r'(u)J_3\big\} - 2r'(u)r''(u)J_1J_2 - r'(u)^3J_2^2 + O\Big(\frac{1}{u^2}\Big).$$

Finalement nous obtenons

$$\lambda(u)^2 \leqslant \sum_{j\geqslant 1} \lambda_j^2 - \lambda^*(u)^2 \ll \frac{1}{u^2}, \quad (u \geqslant \delta)$$

ce qui fournit bien la conclusion requise, compte tenu de la continuité de la fonction λ établie à la Proposition 11.1.

19. Calculs numériques

L'objectif de ce paragraphe est de décrire et de justifier une méthode d'approximation numérique de la plus grande valeur propre de T_u et de montrer comment cette méthode peut nous permettre également d'obtenir une minoration de $C^{\#}(u)$ ou de $C(u)$.

Par souci de concision, nous poserons dans tout ce paragraphe

$$\begin{aligned} &H := H_u, \quad \|\varphi\| := \|\varphi\|_u\,, \quad \langle\varphi,\psi\rangle := \langle\varphi,\psi\rangle_u, \\ &T := T_u, \quad \lambda := \lambda(u) \quad (\varphi,\psi \in H_u). \end{aligned}$$

Nous employons la méthode de Galerkin[5] qui consiste à « approcher » l'espace H par une suite de sous-espaces de dimension finie. Soit $n \geqslant 1$. Nous scindons l'intervalle $[0,1]$ en n intervalles fermés $(I_k)_{0\leqslant k\leqslant n-1}$ définis par

$$I_k := \Big[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\Big] \quad (0 \leqslant k \leqslant n-1)$$

et nous introduisons les fonctions $(\psi_k)_{1\leqslant k\leqslant n-1}$ définies par

$$\psi_k(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in I_k, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et H_n le sous-espace vectoriel de H engendré par les fonctions $(\psi_k)_{1\leqslant k\leqslant n-1}$. Notons Π_n la projection orthogonale sur H_n. Nous obtenons le résultat d'approximation suivant.

Proposition 19.1. *Soit $u > 1$ et $\varphi \in H$ un vecteur propre de T_u associé à une valeur propre λ de T_u. Alors il existe une constante A_1 dépendant explicitement de $\|\varphi\|$, de u et de λ telle que*

$$\|\varphi - \Pi_n\varphi\| \leqslant \frac{A_1}{\sqrt{n}}. \tag{19·1}$$

Nous donnons la preuve de la Proposition 19.1 en fin de paragraphe.

Nous introduisons à présent l'opérateur $T_n : H_n \to H_n$ défini par $T_n := \Pi_n T$. L'opérateur T_n est autoadjoint. En effet, nous avons pour $\varphi \in H_n$,

$$\begin{aligned} \langle T_n\varphi,\varphi\rangle &= \langle \Pi_nT\varphi,\varphi\rangle = \langle T\varphi, \Pi_n\varphi\rangle \\ &= \langle\varphi, T\varphi\rangle = \langle\Pi_n\varphi, T\varphi\rangle \\ &= \langle\varphi, \Pi_nT\varphi\rangle = \langle\varphi, T_n\varphi\rangle. \end{aligned}$$

En particulier, toutes les valeurs propres de T_n sont réelles. Notre méthode consiste à approcher λ, la plus grande valeur propre de T, par la plus grande valeur propre de T_n, que nous noterons λ_n. L'estimation (19·1) nous permet d'établir le résultat suivant.

5. Pour tout ce qui concerne la méthode de Galerkin, on pourra consulter par exemple la référence [10].

Proposition 19.2. *Soit $u \geqslant 1$. La suite $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ est croissante et converge vers λ. Plus précisément, il existe une constante A_2 dépendant explicitement de λ et de u telle que,*

$$|\lambda - \lambda_n| \leqslant \frac{A_2}{\sqrt{n}} \quad (n \geqslant 1). \tag{19·2}$$

Nous donnons la preuve de la Proposition 19.2 en fin de paragraphe.

Pour approcher avec une précision arbitraire la valeur λ, il nous suffit donc de calculer la plus grande valeur de T_n. Comme $(\Psi_j)_{1\leqslant j\leqslant n-1}$ constitue une base orthogonale de H_n, cela revient à déterminer la plus grande valeur propre de la matrice $B = (b_{j,k})_{1\leqslant j,k\leqslant n-1}$ où

$$b_{j,k} := \frac{\langle T_n\Psi_j, \Psi_k\rangle}{\|\Psi_k\|^2} = \frac{\langle T\Psi_j, \Psi_k\rangle}{\|\Psi_k\|^2} \quad (1 \leqslant j, k \leqslant n-1).$$

Expliquons à présent comment cette méthode nous permet également d'obtenir une minoration de $C^{\#}(u)$. Considérons un vecteur propre φ_n de l'opérateur T_n associé à la valeur propre λ_n censée approcher λ. Comme φ_n est une combinaison linéaire des fonctions $(\Psi_j)_{1\leqslant j\leqslant n-1}$, elle satisfait à la majoration

$$\varphi_n(t) \ll t \quad (t \in [0,1]).$$

Nous pouvons donc appliquer à φ_n le Lemme 16.1, ce qui nous donne la minoration suivante de $C^{\#}(u)$.

$$C^{\#}(u) \geqslant \frac{R_u(\varphi_n) + \langle\varphi_n, T_u\varphi_n\rangle}{\|\varphi_n\|^2} = \frac{R_u(\varphi_n) + \lambda_n}{\|\varphi_n\|}.$$

Les quantités du membre du droite sont toutes numériquement calculables.

Preuve de la Proposition 19.1. Nous avons établi que si φ est un vecteur propre de T associé à une valeur propre λ, alors

$$|\varphi(t)| \leqslant A_3 t \quad (t \in [0,1]), \tag{19·3}$$

où A_3 est une constante dépendant explicitement de u, $\|\varphi\|$ et λ. Par ailleurs, si $\lambda \neq 0$, il résulte immédiatement de la majoration (16·2) que φ est dérivable sur $[0,1]$ et que

(19·4), $$|\varphi'(t)| \leqslant A_4 \quad (t \in [0,1])$$

où A_4 est une constante dépendant explicitement de u, $\|\varphi\|$ et λ. En particulier, nous en déduisons que φ' est de carré intégrable sur $[0,1]$ pour la mesure μ de Lebesgue.

Afin d'évaluer la quantité $\|\varphi - \Pi_n\varphi\|$, nous calculons tout d'abord une expression analytique de Π_n. Étant donné $\varphi \in H$, il existe des nombres réels $(\alpha_k)_{1\leqslant k\leqslant n-1}$ tels que

$$\Pi_n\varphi(t) = \sum_{1\leqslant k\leqslant n-1} \alpha_k\psi_k.$$

Comme Π_n est autoadjoint et que la famille $(\psi_k)_{1\leqslant k\leqslant n-1}$ est orthogonale, nous avons, pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$,

$$\alpha_k \|\psi_k\|^2 = \langle\Pi_n\varphi, \psi_k\rangle = \langle\varphi, \Pi_n\psi_k\rangle.$$

Comme de plus $\psi_k \in H_n$, il vient

$$\alpha_k = \frac{\langle\varphi, \psi_k\rangle}{\|\psi_k\|^2} = \frac{1}{\|\psi_j\|^2}\int_{I_j} \varphi(t)\,\mathrm{d}m_u(t).$$

Finalement, nous obtenons

$$\Pi_n\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in I_0, \\ \delta_k^{-1}\int_{I_k} \varphi(t)\,\mathrm{d}m_u(t) & \text{si } t \in I_k,\ 1 \leqslant k \leqslant n-1, \end{cases}$$

où nous notons $\delta_k \int_{I_k} \mathrm{d}m_u(t)$.

Nous pouvons d'ores et déjà remarquer que

$$\delta_k \leqslant \log\Big(\frac{k+1}{k}\Big)\mathrm{e}^{\xi(u)} \leqslant 2\mathrm{e}^{\xi(u)} \quad (1 \leqslant k \leqslant n-1).$$

Nous sommes maintenant en mesure d'établir (19·1). Nous introduisons les notations suivantes :

$$\|\varphi\|_{I_k} := \bigg(\int_{I_k} \varphi(t)^2 \,\mathrm{d}m_u(t)\bigg)^{1/2} \quad (\varphi \in H, 0 \leqslant k \leqslant n-1),$$

$$\|\varphi\|_{L^2_\mu} := \bigg(\int_0^1 \varphi(t)^2 \,\mathrm{d}t\bigg)^{1/2}, \quad \varphi \in L^2([0,1],\,\mathrm{d}t),$$

$$\|\varphi\|_{L^2_\mu(I_k)} := \bigg(\int_{I_k} \varphi(t)^2 \,\mathrm{d}t\bigg)^{1/2} \quad (\varphi \in H, 0 \leqslant k \leqslant n-1).$$

Soit $\varphi \in H$ un vecteur propre de T. Nous avons pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$,

$$\begin{aligned}
\|\varphi - \Pi_n\varphi\|_{I_k}^2 &= \int_{I_k} \big(\varphi(s) - \Pi_n\varphi(s)\big)^2 \,\mathrm{d}m_u(s) = \int_{I_k} \bigg(\frac{1}{\delta_k}\int_{I_k} \big(\varphi(s) - \varphi(t)\big)\,\mathrm{d}m_u(t)\bigg)^2 \mathrm{d}m_u(s) \\
&= \int_{I_k} \bigg(\frac{1}{\delta_k}\int_{I_k} \bigg\{\int_t^s \varphi'(u)\,\mathrm{d}u\bigg\}\,\mathrm{d}m_u(t)\bigg)^2 \mathrm{d}m_u(s) \\
&\leqslant \int_{I_k} \bigg(\frac{1}{\delta_k}\int_{I_k} |s-t|^{1/2}\,\|\varphi'\|_{L^2_m(I_k)}\,\mathrm{d}m_u(t)\bigg)^2 \mathrm{d}m_u(s) \\
&\leqslant \frac{\|\varphi'\|^2_{L^2_\mu(I_k)}}{n} \int_{I_k} \bigg(\frac{1}{\delta_k}\int_{I_k} \mathrm{d}m_u(t)\bigg)^2 \mathrm{d}m_u(s) \leqslant \frac{1}{n}\,\|\varphi'\|^2_{L^2_\mu(I_k)}\,\delta_k \leqslant \frac{2\mathrm{e}^{\xi(u)}}{n}\,\|\varphi'\|^2_{L^2_\mu(I_k)}.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, d'après la majoration (19·3), nous avons

$$\|\varphi - \Pi_n\varphi\|_{I_0} = \|\varphi\|_{I_0} \leqslant A_3\bigg(\int_0^{1/n} t\,\mathrm{d}t\bigg)^{1/2} \leqslant \frac{A_3}{n\sqrt{2}}.$$

Finalement, nous avons

$$\begin{aligned}
\|\varphi - \Pi_n\varphi\|^2 &= \sum_{0\leqslant k\leqslant n-1} \|\varphi - \Pi_n\varphi\|_{I_k}^2 \\
&\leqslant \frac{A_3^2}{2n^2} + \frac{2\mathrm{e}^{\xi(u)}}{n}\sum_{1\leqslant k\leqslant n-1} \|\varphi'\|^2_{L^2_\mu(I_k)} \leqslant \frac{A_3^2}{2n^2} + \frac{2\mathrm{e}^{\xi(u)}A_4^2}{n}.
\end{aligned}$$

Finalement, nous en déduisons bien (19·1) avec $A_1 = \max\{2\mathrm{e}^{\xi(u)}A_4^2, A_3^2/n\}$.

Preuve de la Proposition 19.2. Nous avons

$$\lambda = \max_{\substack{\|\varphi\|\leqslant 1\\ \varphi\in H}} \langle T\varphi, \varphi\rangle$$

et

$$\lambda_n = \max_{\substack{\|\varphi\|\leqslant 1\\ \varphi\in H_n}} \langle T_n\varphi, \varphi\rangle = \max_{\substack{\|\varphi\|\leqslant 1\\ \varphi\in H_n}} \langle T\varphi, \varphi\rangle. \tag{19·5}$$

Comme $H_n \subseteq H_{n+1} \subseteq H$, l'identité (19·5) implique immédiatement que la suite λ_n est croissante et que $\lambda_n \leqslant \lambda$.

Considérons à présent un vecteur propre φ de norme 1 de T associé à la valeur propre λ, et introduisons $\varphi_n = \Pi_n\varphi$. Comme $\|\varphi_n\| \leqslant \|\varphi\| = 1$, nous avons

$$0 \leqslant \lambda - \lambda_n \leqslant \langle T\varphi, \varphi\rangle - \langle T\varphi_n, \varphi_n\rangle.$$

Il suit, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'estimation (19·1)

$$\begin{aligned}|\lambda_n - \lambda| &\leqslant |\langle T\varphi - T\varphi_n, \varphi_n\rangle| + |\langle T\varphi, \varphi - \varphi_n\rangle| \\ &\leqslant N(T)\,\|\varphi - \Pi_n\varphi\|\,\|\varphi_n\| + N(T)\,\|\varphi\|\,\|\varphi - \Pi_n\varphi\| \\ &\leqslant 2N(T)\,\|\varphi - \Pi_n\varphi\| \\ &\leqslant \frac{2A_1N(T)}{\sqrt{n}},\end{aligned}$$

où $N(T)$ désigne la norme d'opérateur de T. Nous obtenons bien (19·2) avec $A_2 = 2N(T)A_1$.

20. Appendice

Quitte à modifier la définition de $B_f(x,y)$ par une norme équivalente, nous sommes en mesure de déterminer la constante asymptotique optimale dans l'inégalité de Turán-Kubilius. L'approximation

$$\frac{\Psi_p(x/p^\nu, x)}{\Psi(x,y)} \approx \frac{g_p(\alpha)}{p^{\nu\alpha}} h(u, u_{p^\nu})$$

incite en effet à étudier le rapport

$$V_f^{\#}(x,y)/B_f(x,y;h)^2$$

où l'on a posé

$$B_f(x,y;h)^2 := \sum_{p^\nu\in S(x,y)} g_p(\alpha)h(u,u_{p^\nu})\frac{f(p^\nu)^2}{p^{\nu\alpha}} \quad (f\in\mathbb{A}).$$

Pour chaque $u \geqslant 1$ fixé, la fonction $v \mapsto h(u,v)$ est bornée, continue, et ne s'annule pas sur $[0,u]$. Nous avons donc

$$B_f(x,y;h) \asymp_u B_f(x,y) \quad (x\geqslant 2, y = x^{1/u}).$$

Dans l'espace H_u nous remplaçons la mesure m par la mesure m_h définie par

$$\mathrm{d}m_h(t) := h(u,t)\mathrm{e}^{t\xi(u)}\frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Par ailleurs, nous posons

$$K_{u,h}(s,t) := \frac{K_u(s,t)}{h(u,t)h(u,s)} \quad (s,t\in[0,1]),$$

et nous introduisons l'opérateur $T_{u,h}$ défini sur H_u par

$$T_{u,h}\varphi(s) := -\int_0^1 \varphi(t)K_{u,h}(s,t)\,\mathrm{d}m_h(t) \quad (s\in[0,1]).$$

Cet opérateur est autoadjoint et compact ; il admet une base hilbertienne de vecteurs propres, que nous notons$\{q_{h,j}\}_{j=1}^{\infty}$. Désignons encore par $\lambda_h(u)$ la plus grande valeur propre de $T_{u,h}$. Nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 20.1. *Soit $u \geqslant 1$. On a*

$$C_h(u) := \limsup_{x\to\infty} \sup_{f\in\mathbb{A}} \frac{V_f(x,x^{1/u})}{B_f^*(x,x^{1/u})^2} = \max\{1+\lambda_h(u), 2\}.$$

Il est à noter que la constante $C_h(u)$, contrairement à $C^{\#}(u)$ ou $C(u)$, est au moins égale à 2 quel que soit $u \geqslant 1$. Cela provient du fait que le facteur $h(u, u_{p^\nu})$ tend vers 0 lorsque $u \to \infty$ pour $p^\nu > x/y$.

Lorsque $u = 1$ la fonction $v \mapsto h(u, v)$ vaut identiquement 1 sur $[0, u]$. Le résultat de Hildebrand fournit donc l'égalité $\lambda_h(1) = \lambda(1) = 1/2$. Comme nous pouvons montrer la continuité de la fonction $u \mapsto \lambda_h(u)$, nous avons donc $C_h(u) = 2$ dans un voisinage de $u = 1$. De plus, nous pouvons établir la majoration $\lambda_h(u) \ll 1/u$ pour $u \geqslant 1$. Cela implique que pour u assez grand, nous avons $C_h(u) = 2$. Nous conjecturons que $C_h(u) = 2$ pour tout $u \geqslant 1$, ce qui corroborerait les résultats numériques obtenus.

Nous nous contentons ici de donner les étapes essentielles de la preuve du Théorème 20.1. Les détails relèvent de calculs similaires à ceux effectués dans le cadre de la définition (1·21).

Nous considérons le produit scalaire associée à la mesure m_h, soit

$$\langle \varphi, \psi \rangle_h := \int_0^1 \varphi(t)\psi(t)\,\mathrm{d}m_h(t),$$

et nous définissons, pour $f \in \mathbb{A}$,

$$\psi_n := \sum_{j=1}^n c_j(f;h) q_{h,j} \qquad \text{avec } c_j(f;h) := \sum_{p\leqslant y} \frac{f(p) q_{h,j}(u_p)}{p} h(u,u_p) \mathrm{e}^{u_p \xi(u)}.$$

Nous pouvons obtenir la nouvelle formule asymptotique suivante pour $V_f^{\#}(x, y)$, où nous conservons les notations et les hypothèses du Théorème 4.1 :

$$V_f^{\#}(x,y) = P_f^*(x,y) + \langle \psi_n, T_{u,h}\psi_n \rangle_h - R_f^*(x,y) + o\big(B_f(x,y;h)^2\big) \quad (x \to \infty).$$

Nous pouvons établir l'analogue de la majoration (3·19) soit

$$\langle \psi_n, T_{u,h}\psi_n \rangle_h \leqslant \big\{\lambda_h(u) + o(1)\big\} \sum_{p\leqslant y} g_p(\alpha) h(u,u_p) \frac{f(p)^2}{p} \quad (y \to \infty).$$

Nous avons donc

$$V_f^{\#}(x,y) \leqslant S_1 + S_2 + S_3 + \lambda_h(u) \sum_{p\leqslant y} g_p(\alpha) h(u,u_p) \frac{f(p)^2}{p} + o\big(B_f(x,y;h)^2\big),$$

avec

$$S_1 := \sum_{p\leqslant y} g_p(\alpha)\vartheta_{x,y}(p)\frac{f(p)^2}{p} = \sum_{p\leqslant x/y} g_p(\alpha)\vartheta_{x,y}(p)\frac{f(p)^2}{p} + \sum_{x/y<p\leqslant y} g_p(\alpha)\vartheta_{x,y}(p)\frac{f(p)^2}{p}$$

$$S_2 := \sum_{\substack{p^\nu \in S(x/y,y)\\ \nu\geqslant 2}} g_p(\alpha) h(u,u_{p^\nu}) \frac{f(p^\nu)^2}{p^{\nu\alpha}}$$

$$S_3 := \sum_{\substack{p^\nu \in S(x,y)\\ p^\nu > x/y, \nu\geqslant 2}} g_p(\alpha)\vartheta_{x,y}(p^\nu) \frac{f(p^\nu)^2}{p^{\nu\alpha}}.$$

Les calculs effectués dans la preuve du Proposition 8.1 montrent que

$$\max_{x/y<p\leqslant y} \frac{\vartheta_{x,y}(p)}{h(u,u_p)} \leqslant 1 + o(1), \qquad \max_{\substack{p^\nu \in S(x,y)\\ p^\nu > x/y, \nu\geqslant 2}} \frac{\vartheta_{x,y}(p^\nu)}{h(u,u_{p^\nu})} \leqslant 2 + o(1) \quad (x \geqslant 2, y = x^{1/u}).$$

Nous en déduisons que

$$S_1 \leqslant \{1+o(1)\} \sum_{p\leqslant y} g_p(\alpha) h(u,u_p) \frac{f(p)^2}{p}$$

$$S_3 \leqslant \{2+o(1)\} \sum_{\substack{p^\nu \in S(x,y) \\ p^\nu > x/y, \nu \geqslant 2}} g_p(\alpha) h(u,u_{p^\nu}) \frac{f(p^\nu)^2}{p^{\nu\alpha}}.$$

Nous obtenons ainsi la majoration

$$V_f^\#(x,y) \leqslant \Big(\max\big\{1+\lambda_h(u), 2\big\} + o(1)\Big) B_f(x,y;h)^2 \quad (x\to\infty).$$

Cette majoration est optimale. En effet, si f est la fonction additive définie par $f(p^\nu) := \varphi(u_{p^\nu})$ pour $\nu \geqslant 1$, où φ est un vecteur propre normé de $T_{u,h}$ associé à la valeur propre $\lambda_h(u)$, nous avons

$$V_f^\#(x,y) = 1+\lambda_h(u)+o(1), \qquad \text{et} \qquad B_f(x,y;h)^2 = 1+o(1) \quad (x\to\infty).$$

Par ailleurs, si f est la fonction additive définie par

$$f(p^\nu) = \begin{cases} 1 & \text{si } p=2 \text{ et } 2^\nu \leqslant x < 2^{\nu+1}, \\ 0 & \text{sinon ,} \end{cases}$$

nous avons

$$V_f^\#(x,y) = \frac{1+o(1)}{x\varrho(u)}$$

et

$$B_f(x,y;h)^2 = \big\{1+o(1)\big\} \frac{\mathrm{e}^{u_{2^\nu}\xi(u)}}{2^{\nu+1}} = \big\{1+o(1)\big\} \frac{h(u,u_{2^\nu})}{2^{\nu+1}} \quad (x\to\infty).$$

Bibliographie

[1] K. Alladi, The Turán-Kubilius inequality for integers without large prime factors, *J. reine angew. Math.* **335** (1982), 180-196.

[2] R. de la Bretèche et G. Tenenbaum, Entiers friables : inégalité de Turán-Kubilius et applications, *Invent. Math.* **159** (2005), 531–588.

[3] R. de la Bretèche et G. Tenenbaum, Propriétés statistiques des entiers friables, *Ramanujan J.*, à paraître.

[4] N. G. de Bruijn, On the number of positive integers $\leqslant x$ and free of prime factors $> y$, *Indag. Math.* **13** (1951), 50-60.

[5] N. Dunford et J.T. Schwarz *Linear operators*, vol. 2, Interscience Publisher (1958).

[6] P.D.T.A. Elliott. *Probabilistic number theory : mean value theorems.* Grundlehren Math. Wiss. 239. New-York, Berlin, Heidelberg : Springer 1979.

[7] P.D.T.A. Elliott, *Probabilistic number theory : central limit theorems.* Grundlehren Math. Wiss. 240. New-York, Berlin, Heidelberg : Springer 1980.

[8] J.-H. Evertse, P. Moree, C.L. Stewart, R. Tijdeman, Multivariate Diophantine equations with many solutions. *Acta Arith.* **107** (2003), no. 2, 103–125.

[9] É. Fouvry et G. Tenenbaum, Répartition statistique des entiers sans grand facteur premier dans les progressions arithmétiques, *Proc. London Math. Soc.* (3) **73** (1996), 481-514.

[10] W. Hackbusch *Integral equations. Theory and numerical treatment.* International Series of Numerical Mathematics, 120. Birkhäuser Verlag, Basel (1995).

[11] A. Hildebrand, An asymptotic formula for the variance of an additive fonction, *Math. Z.* **183** (1983), 145-170.

[12] A. Hildebrand, On the numbers of positive integers $\leqslant x$ and free of prime factors $> y$, *J. Number Theory* **22** (1986), 289-307.

[13] A. Hildebrand, On a class of differential-difference equations arising in number theory, *J. Anal. Math.* **61** (1993), 145-179.

[14] A. Hildebrand et G. Tenenbaum : On integers free of large primes factors, *Trans. Am. Math. Soc.* **296** (1986), 265-290.

[15] J. Kubilius : Estimate of the central moment for strongly additive arithmetic functions (en russe, résumés en anglais et lituanien), *Litovsk. Mat. Sb.* **23**(1) (1983), 122-133.

[16] J. Kubilius : Estimate of the second central moment for any additive arithmetic functions (en russe, résumés en anglais et lituanien), *Litovsk. Mat. Sb.* **23**(2) (1983), 110-117.

[17] J. Lee : The second central moment of additive functions, *Amer. Math. Soc.* **114**(4) (1992), 887-895.

[18] W. Rudin *Functional analysis.* Second edition. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York, (1991).

[19] G. Tenenbaum, Loi de répartition des diviseurs 2, *Acta Arith.* **38** (1980), 1-36.
[20] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres,* Cours spécialisés, no.1, Société Mathématique de France (1995).
[21] H. Smida, Sur les puissances de convolution de la fonction de Dickman, *Acta Arithm.* **49**(2) (1991), 123-143.
[22] T.Z Xuan, The Turán-Kubilius inequality for integers free of large prime factors, *J. Number Theory* **43** (1993), 82-87.
[23] T.Z Xuan, The Turán-Kubilius inequality for integers free of large prime factors (II), *Acta Arithm.* **65** (1993), 329-352.

Bruno Martin
Institut Élie Cartan
Université de Nancy 1
BP 239
54506 Vandœuvre Cedex France
courriel : Bruno.martin@iecn.u-nancy.fr

UFR S.T.M.I.A.
École Doctorale IAE + M
Université Henri Poincaré - Nancy I
D.F.D. Mathématiques

Un entier naturel est dit y-friable lorsque son plus grand facteur premier n'excède pas y. Ce travail est consacré à l'étude des entiers friables dans le cadre de la théorie analytique et probabiliste des nombres. La première partie est dévolue à un problème posé par Davenport en 1937, qui consiste à déterminer les conditions de validité de diverses généralisations de son développement de la fonction sinus en série de parties fractionnaires. Ces généralisations peuvent être décrites par un couple de fonctions arithmétiques, liées par la relation de convolution $f = g * \mathbf{1}$. Nous traitons le cas où g est la fonction de Piltz d'ordre $z \in \mathbb{C}$. La deuxième partie est consacrée à l'étude du comportement asymptotique de la constante optimale dans une version friable de l'inégalité de Turán-Kubilius. Précisant des résultats récents de La Bretèche et Tenenbaum, nous généralisons au cas friable une formule asymptotique de la variance d'une fonction arithmétique additive, établie par Hildebrand en 1983.

Call integer y-friable if its largest prime factor does not exceed y. We study friable integers in the context of analytic and probabilistic number theory. We first address a problem initiated by Davenport in 1937, and explore conditions of validity for various generalizations of his expansion of the sine function as series of fractionnal part. These generalizations are described by a pair of functions, satisfaying the convolution formula $f = g * \mathbf{1}$. We treat the case when g is the Piltz function of order $z \in \mathbb{C}$. In a second part we investigate the asymptotic behaviour of the optimal constant in a friable version of the Turán-Kubilius inequality. Elaborating on recent results of La Bretèche et Tenenbaum, we generalize an asymptotic formula for the variance of an arithmetic additive function established by Hildebrand en 1983.

Mots-clefs : entiers friables, P-sommation, identités de Davenport, première fonction de Bernoulli, fonctions de Piltz, approximation diophantienne, fonction de Dickman, fonctions additives, inégalité de Turán-Kubilius, opérateur intégral, méthode de Galerkin.

Institut Élie Cartan Nancy CNRS UMR 9973
Faculté des Sciences - B.P. 239 - 54506 Vandœuvre-lès-Nancy CEDEX