“LOGIQUE QUANTIQUE OPÉRATIONELLE ET CATÉGORIES”

NOTES DE L'EXPOSÉ PAR ISAR STUBBE[1], POUR LE
SÉMINAIRE ITINÉRANT DES CATÉGORIES
À AMIENS, LE 18 NOVEMBRE 2000

Dans cet exposé, je ne tente pas seulement d'expliquer à un public de catégoriciens en quoi consiste la “logique quantique opérationnelle”, mais aussi de les convaincre que certaines structures mathématiques qu'on étudie dans ce domaine ont un caractère catégorique. En effet, à mon avis les catégories fournissent non seulement le langage approprié pour l'étude des logiques quantiques; elles expriment aussi une qualité intrinsèque de certains aspects de la théorie quantique — qu'on pourrait alors appeler *une théorie catégorique*.

J'ai partage mon exposé en quatre parties; en gros, les-voici:

1. Trois questions
2. Une réponse à la première question
3. Une réponse à la deuxième question
4. Une réponse à la troisième question

Ci-dessous je consacre une section à chaque partie. Les références forment une cinquième section.

[1] adresse postale: AGEL–MATH–SC–UCL, Ch.du Cyclotron 2, 1348 Louvain-la-Neuve, Belgique; adresse électronique: `i.stubbe@agel.ucl.ac.be`

1 L'an zéro pour la logique quantique: l'article de Birkhoff et von Neumann, 1936

C'est dans leur fameux article de 1936 que G. Birkhoff et J. von Neumann écrivent que "*[o]ne of the aspects of quantum theory which has attracted the most general attention, is the novelty of the logical notions which it presupposes (...).*"

Plus précisément, "*[o]ur main conclusion, based on admittedly heuristic arguments, is that one can reasonbably expect to find a calculus of propositions [pertaining to a quantum physical system] which is formally indistinguishable from the calculus of linear subspaces.*" Mais comment faut-il comprendre l'expression "formally indistinguishable"; existe-t-il une description précise de ces treillis de propositions, cette logique, qu'on considère dans cette théorie de physique quantique?

Ils se posent la question: "*What experimental meaning can one attach to the meet and join of two given experimental propositions?*" Dans un tel treillis, dans une telle logique quantique, que signifient le supremum et le infimum; est-ce que sup et inf ne sont que des constructions mathématiques, ou est-ce qu'on peut les comprendre au niveau physique?

Et ils constatent que "*the central difference [between classical and quantum theory] is the distributive identity of the propositional calculus, which is a law in classical but not in quantum mechanics.*" Mais comment définir alors une implication; ou est-ce qu'une logique quantique n'est pas une vraie logique?

C'est à ces trois questions que je veux donner une réponse aujourd'hui.

2 Caractérisation du treillis des sous-espaces fermes d'un espace de Hilbert (Piron, 1976; Solèr, 1995)

Le théorème de C. Piron et le théorème de M. Solèr donnent la réponse à la première question de Birkhoff et von Neumann; on peut en effet caractériser le treillis des sous-espaces fermes d'un espace classique de Hilbert (de dimension infinie).

Définition: (Piron, 1964) Un espace généralisé de Hilbert est la donnée de

- un espace vectoriel E sur un corps ("division ring") K
- un anti-automorphisme involutif $(-)^* : K \to K$, c'est à dire, pour tout $a, b \in K$ on a que $(a+b)^* = a^* + b^*$, $(a \cdot b)^* = b^* \cdot a^*$ et $a^{**} = a$
- une forme définie de Hermite $\langle -, - \rangle : E \times E \to K$, donc pour tout $f, g, h \in E$ et $a \in K$ on a que $\langle f + a \cdot g, h \rangle = \langle f, h \rangle + a \cdot \langle g, h \rangle$, $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle^*$ et $\langle f, f \rangle = 0 \Rightarrow f = 0$

telle que pour tout $\emptyset \neq S = S^{\perp\perp} \subseteq E$ on a que $S + S^{\perp} = E$. On le dénote par un quadruple $(E, K, (-)^*, \langle -, - \rangle)$.

Bien sur, on a définit ci-dessus pour $f, g \in E$ que $f \perp g \Leftrightarrow \langle f, g \rangle = 0$, d'où alors la définition pour l'orthocomplement $S^{\perp}$ de $S \subseteq E$; donc on fait "comme si $(E, K, (-)^*, \langle -, - \rangle)$ était un espace euclidien". Ceci permet, dans les propositions suivantes, de parler de "norme d'un vecteur" etc.

Proposition: (Amemiya et Araki, 1967) Si $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$, muni de la conjugaison habituelle, alors $(E, K, (-)^*, \langle -, - \rangle)$ est complet — et donc un espace classique de Hilbert.

Proposition: (Solèr, 1995) Si $(E, K, (-)^*, \langle -, - \rangle)$ contient une suite infinie orthonormale, alors $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$ — et donc $(E, K, (-)^*, \langle -, - \rangle)$ est un espace classique de Hilbert de dimension infinie.

Pour une discussion de ce résultat étonnant, consultez par exemple (Holland, 1995). Voici alors le célèbre "théorème de représentation" de C. Piron.

Théorème: (Piron, 1976) Un ordre partiel est un treillis des sous-espaces fermés d'un espace généralisé de Hilbert de dimension ≥ 3 ssi cet ordre partiel, notons-le par $(L, \leq)$,

- est un treillis complet, donc chaque $A \subseteq L$ a un supremum $\bigvee A$ et un infimum $\bigwedge A$ dans L, et en particulier L a un "top" $1 := \bigvee L$ et un "bottom" $0 := \bigwedge L$
- est comblé d'atomes, ce qui veut dire que, en définissant un atome de L comme étant un élément $a \in L$ tel que $0 < x \leq a \Rightarrow x = a$, pour chaque $x \in L$ on a que $x = \bigvee \{a \leq x \mid a \text{ est atome de } L\}$

est orthocomplémenté, donc il y a une application $(-)' : L \to L$ telle que pour tout $x, y \in L$ on a que $x \wedge x' = 0$ et $x \vee x' = 1$, $x \leq y \Rightarrow y' \leq x'$ et $x'' = x$

est "weakly modular", ce qui veut dire par définition que pour tout $x \leq y$ dans L on a que $x \vee (y \wedge x') = y$

satisfait la "covering law", donc pour tout atome $a \in L$ et tout élément $x \in L$ tels que $a \wedge x = 0$, si $x < y \leq x \vee a$ alors $y = x \vee a$ (et on dit que $x \vee a$ "covers" x)

est irréductible, ce qu'on exprime en exigeant que le centre de L soit trivial, plus précisément, on définit le centre de L comme l'ensemble $\mathcal{Z}(L) = \{x \in L \mid \text{ pour tout atome } a \in L, \text{ ou bien } a \leq x \text{ ou bien } a \leq x'\}$, et puis on demande que $\mathcal{Z}(L) = \{0, 1\}$

est de rank ≥ 4, donc il existe une chaîne $0 < x < y < 1$ dans L.

Je viens de recevoir cette semaine un preprint dans lequel on caractérise précisément les treillis qui sont (isomorphe à) un treillis des sous-espaces fermes d'un espace classique de Hilbert.

Proposition: (Engesser, 2000) Un tel treillis $(L, \leq)$ est associe à un espace classique de Hilbert de dimension infinie ssi il existe une suite infinie d'atomes orthogonaux deux à deux telle que chaque permutation sur cette suite est la réstriction d'un morphisme d'orthotreillis $f : L \to L$ qui est l'identité sur le sous-treillis engendre par les atomes qui sont fixes par cette permutation.

Il existent d'autres critères équivalents à celui de Engesser, par exemple (Holland, 1995; Aerts et Van Steirteghem, 1999).

Et les catégories?

Dans son livre de 1976, C. Piron définit des "c-morphismes" entre deux treillis complets et orthocomplémentés; un tel morphisme $f : L \to M$ n'est rien d'autre qu'une application ensembliste qui conserve les suprema arbitraires — $f(\bigvee A) = \bigvee\{f(x) \mid x \in A\} =: \bigvee f(A)$ — et l'orthogonalité — $a \leq b'$ dans L implique $f(a) \leq f(b)'$ dans M. Sans le faire explicitement, une catégorie des treillis complets, comblés d'atomes, orthocomplémentés, "weakly modular" qui satisfont la "covering law", et les c-morphismes entre eux est considérée, et on montre, entre autre, qu'un objet quelconque est toujours la somme d'une famille d'objets irréductibles. Il est intéressant d'étudier ce résultat, car les éléments de cette famille d'objets irréductibles sont indexes par ce qu'on appelle en mécanique quantique des "règles de supersélection". Dans le même livre, on argumente qu'un observable, dans le sens traditionnel du mot, peut être considère comme un c-morphisme d'une algèbre complète de Boole à un treillis de sous-espaces fermes d'un espace généralisé de Hilbert. Le lien entre la théorie des treillis et la géométrie projective, qui est crucial pour la compréhension du théorème de Piron, a été étudie en détail par Cl.-A. Faure et A. Frölicher depuis 1992. D. J. Moore s'en est servi pour donner, en 1995, une "traduction catégorique" des idées principales de C. Piron; la thèse de F. Valckenborgh (2000) poursuit ce programme, et contient entre autre une classification des structures catégoriques liées à l'approche de Piron–Moore.

3 La notion opérationnelle de "propriété" (Piron, 1972)

(Piron, 1990) "*En physique, on décrit un système par ses propriétés. Parmi celles-ci, les unes sont actuelles (...); les autres sont potentielles (...). Lorsque le système évolue, certaines propriétés actuelles deviennent potentielles et, ce faisant, certaines propriétés potentielles deviennent actuelles. On exprime cela en disant que l'état change; car, par définition, l'état n'est rien d'autre que la collection de toutes les propriétés actuelles du système.*" Notre première tache est donc de "*définir les concepts de propriétés actuelles et potentielles puis d'exprimer la structure mathématique qui en découle.*"

Suivant (Piron, 1990), une question (ou test) sur un système est un projet d'expérience à effectuer sur le système, qui conduit à une alternative bien définie à l'avance: on répond "oui" à la question au résultat cherché et "non" dans les autres cas. Si le système est tel que, si on décidait d'effectuer une question, alors la réponse "oui" serait certaine, on dit que cette question est vraie pour ce système; mais un système peut changer (évoluer, par exemple) et donc intuitivement le fait que l'une ou l'autre question est vraie dépend de l'*état* du système. Une question α est plus forte qu'une autre question β si chaque fois que α est vraie alors β est vraie; on définit ainsi un préordre de questions. Ce préordre est borné par les questions triviales: la question "faites n'importe quoi et répondez toujours non" est la moins forte, la question "faites n'importe quoi et répondez toujours oui" est la plus forte. Et, dernière chose, étant donné une famille de questions α_i, on appelle question produit la question $\Pi_i\alpha_i$ définie comme “choisissez arbitrairement une question α_j, effectuez cette question, et attribuez à $\Pi_i\alpha_i$ la réponse ainsi obtenue”; alors la question produit est vraie ssi chacune des α_i est vraie.

Théorème: (Piron, 1972) Le quotient évident du préordre des questions pouvant être valablement définies pour un système donné, est un treillis complet, noté $(L, \leq)$, dont les éléments sont les *propriétés* du système. Une telle propriété $a = [\alpha]$ est dite *actuelle* si une (et donc chaque) question $\beta \in [\alpha]$ est vraie; alors l'infimum d'un sous-ensemble $A \subseteq L$ est la conjonction des éléments de A, dans le sens que la propriété $\bigwedge A$ est actuelle ssi chaque $a \in A$ l'est.

L'ordre dans L doit être compris comme une “relation d'implication d'actualité”: pour deux propriétés $a, b \in L$, on a que $a \leq b$ ssi b est actuelle chaque fois que a l'est. La dernière partie de ce théorème utilise le fait que $\bigwedge A = [\Pi\{\alpha \mid a = [\alpha] \text{ et } a \in A\}]$. Remarquez que la notion de “propriété actuelle” correspond avec celle de “element of reality” de Einstein, Podolsky et Rosen (1935).
L'état du système considéré est maintenant défini comme la collection ε de toutes les propriétés actuelles du système (Piron, 1972; Aerts, 1982). Mais puisque le treillis des propriétés est complet, son ordre est une “implication d'actualité” et l'infimum est conjonction, l'état est aussi donne par $p_\varepsilon := \bigwedge \varepsilon \in L$. On dénote par S l'ensemble des états possibles du système.

Théorème: (Aerts, 1982) Le “morphisme de Cartan”

$$\mu : L \to \mathcal{P}(S) : a \mapsto \{\varepsilon \in S \mid p_\varepsilon \leq a\}$$

qui associe donc à chaque propriété $a \in L$ l'ensemble d'états dans lesquels la propriété est actuelle, conserve les infima et le “top” et “bottom” de L, et conserve et reflète l'ordre. Ainsi il donne à S la structure d'un “espace”.

Plus précisément, l'adjoint du morphisme de Cartan,

$$\mathcal{R} : \mathcal{P}(S) \to L : T \mapsto \bigvee T$$

associe à chaque sous-ensemble T de l'ensemble S des états possibles la propriété la plus forte qui est actuelle dans chaque état $t \in T$; on l'appelle aussi une “résolution sur l'ensemble des états possibles” (Coecke et Stubbe, 1999). Alors $\mu \circ \mathcal{R}$ définie une fermeture sur S.

Maintenant il ne reste qu'a imposer (et expliquer!), axiome par axiome, le fait que $(L, \leq)$ est comble d'atomes, qu'il existe une orthocomplementation sur L, etc. pour enfin "retrouver" (et comprendre?) la mécanique quantique hilbertienne. Il existe différentes approches (Piron, 1976; Aerts, 1982, 1994; Moore, 1995, 1998).

Je conclus par une définition tentative de "logique quantique opérationnelle".

Définition tentative: (Coecke, Moore et Wilce, 2000) La logique quantique opérationnelle "involves:

(1) the fact that the structure of the 2-valued observables in orthodox quantum mechanics may usefully be regarded as a non-classical propositional logic,

(2) the attempt to give independent motivation for this structure, as part of a general programme to understand quantum mechanics, and

(3) the branch of pure mathematics that has grown out of (1) and (2) and now concerns itself with a variety of 'orthomodular' structures generalizing the logic of 2-valued quantum observables."

Et les catégories?

La notion opérationnelle de "propriété" nous sert à comprendre les "objets" de la logique quantique, à savoir les treillis des sous-espaces fermés d'un espace (généralisé) de Hilbert. Mais que peut-on dire à propos des morphismes? Dans (Amira, Coecke et Stubbe, 1998), on définit d'abord la notion opérationnelle de "induction"; en gros, une induction est une action qui induit un changement (en general non-déterministe) du système. Étant donne une résolution/morphisme de Cartan $\mathcal{R} \dashv \mu : L \to \mathcal{P}(S)$ qui décrit le système en question, on peut déduire que ces changements induits sont décrits par des morphismes $f : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(S)$ qui conservent l'union et qui sont continue par rapport à la fermeture $\mu \circ \mathcal{R}$; ces "changements d'état" forment un quantale qui est en relation surjective avec $\mathsf{Sup}(L, L)$, et on interprète alors les éléments de $\mathsf{Sup}(L, L)$ comme changements de propriété (Coecke et Stubbe, 1999, 2000). (Sup est la catégorie des treillis complets avec les morphismes qui conservent tous les suprema.) Dans (Coecke, Moore et Stubbe, 2000) cette situation est reconsidérée, et on prouve que "propager" est adjoint à "causer".

4 Plongement du treillis de propriétés dans un frame

Le supremum dans un treillis $(L, \leq)$ de propriétés d'un système physique est construit comme "infimum des bornes supérieurs", et n'est en general pas une disjonction: la propriété $a \vee b \in L$ peut être actuelle dans un certain état du système, même si ni a ni b ne le sont dans cet état. Pourtant, parfois on a envie de parler de "*a ou b*", comme par exemple dans la phrase: si on mesurerait une particule de spin–$\frac{1}{2}$, alors après la mesure la particule aurait "spin up *ou* spin down". Certainement, la notion "spin up *ou* spin down" n'est pas une propriété du système physique (il n'y a pas de question correspondante!); c'est plutôt *une proposition sur certaines propriétés* du système.

Donc, on veut considérer une nouvelle structure qui contient les propriétés du système que l'on considère, mais aussi toutes les disjonctions de celles-ci. Puisque l'infimum des propriétés est une conjonction, on veut dans la nouvelle structure "garder" les infima. Et, bien sûr, si jamais le supremum d'un certain $A \subseteq L$ est une disjonction, on veut dans cette nouvelle structure que ce $\bigvee A$ soit identifié avec la disjonction des $a \in A$! (Avec un slogan on pourrait dire que "les *propriétés* forment la logique du système physique, et les *propositions* qu'on veut introduire ici expriment la logique des propriétés".)

Examinons d'abord ce qu'est, un tel état de superposition; et essayons de les "reconnaître" dans le treillis de propriétés d'un système donné.

Définition: Pour un morphisme de Cartan $\mu: L \to \mathcal{P}(S)$, on considère un $A \subseteq L$, et on dit que

les éléments de $\mu(\bigvee A) \setminus \bigcup_{a \in A} \mu(a)$ sont les états de superposition introduits par $\bigvee A$,

un élément $x < \bigvee A$ dans L est une propriété de superposition introduit par $\bigvee A$ si $\mu(x) \setminus \bigcup_{a \in A} \mu(a)$ est non-vide.

Si $\bigvee A$ introduit une (ou plusieurs) propriété de superposition alors forcement A introduit un (ou plusieurs) état de superposition; l'inverse est en général faux. Pourtant, si par exemple L est comblé d'atomes et les atomes sont les états du système, alors l'inverse est vrai.

Théorème: (Coecke, 2000) Soit $\mu : L \to \mathcal{P}(S)$ un morphisme de Cartan tel que pour tout $A \subseteq L$ il y a, pour chaque état de superposition introduit par $\bigvee A$, aussi une propriété de superposition introduit par $\bigvee A$. Alors, pour tout $A \subseteq L$, le supremum $\bigvee A$ est une disjonction (c'est à dire, $\mu(\bigvee A) = \bigcup_{a\in A}\mu(a)$) ssi pour tout $x \in L$ on a que $x \wedge (\bigvee A) = \bigvee(x \wedge A)$.

Donc dans un tel treillis de propriétés, les "suprema distributifs" sont exactement les disjonctions.

Le problème que nous nous posons, est donc: Existe-t-il un plongement universel d'un treillis avec infima, $(L, \leq)$, dans un frame, tel que tout infimum, et tout supremum distributif de L soient conservés? Nous avons d'abord besoin de quelques définitions.

Définition: Pour un semitreillis avec infima finis, $(L, \leq)$, on dit que $A \subseteq L$ est un "downset" si $a \leq b$ et $b \in A$ implique que $a \in A$; on notera les "downsets" de L par $\mathsf{Dwn}(L)$. Et on notera par $\mathsf{Dwn}_{\mathsf{dis}}(L)$ les "downsets" $A \subseteq L$ qui sont fermés pour suprema distributifs; c'est à dire, si $B \subseteq A$ et $\bigvee B$ est distributif dans L, alors $\bigvee B \in A$.

Soient $(L, \leq)$ et $(M, \leq)$ deux semitreillis avec infima finis, alors une application $f : L \to M$ conserve les suprema distributifs si, pour chaque $A \subseteq L$ tel que $\bigvee A$ est distributif, l'image $f(A)$ a un supremum distributif dans M et en plus $f(\bigvee A) = \bigvee f(A)$.

$\mathsf{InfFin}_{\mathsf{dis}}$ est la catégorie des semitreillis avec infima finis, et les applications qui conservent les infima finis et les suprema distributifs; Frame est la catégorie des frames et homomorphismes de frames.

Théorème: (Bruns et Lakser, 1970; Harding, 2000) La catégorie Frame est une subcatégorie pleine et monoréflective de $\mathsf{InfFin}_{\mathsf{dis}}$; le plongement

$$\downarrow(-) : L \to \mathsf{Dwn}_{\mathsf{dis}}(L) : x \mapsto \downarrow x = \{a \in L \mid a \leq x\}$$

est la réflection de $L \in \mathsf{InfFin}_{\mathsf{dis}}$ — et en fait, ce plongement conserve tous les infima qui existent dans L.

Le treillis de propriétés L, en general non-distributif et dont les suprema sont en general non-disjonctifs, est inclus "de manière économique" dans un frame $\mathsf{Dwn}_{\mathsf{dis}}(L)$ — un treillis qui est par excellence distributif et dans lequel tout supremum est une disjonction. Donc pour $A \subseteq L$ on peut penser au supremum de A dans L comme la superposition des éléments de A, et au supremum de $\bigcup_{a\in A}\downarrow a$ dans $\mathsf{Dwn}_{\mathsf{dis}}(L)$ comme la disjonction de ces éléments. Le plongement conserve les suprema distributifs; donc si $\bigvee A$ est distributif dans L, alors $\bigvee A$ sera identifie avec le supremum de $\bigcup_{a\in A}\downarrow a$ dans $\mathsf{Dwn}_{\mathsf{dis}}(L)$. Tous les infima dans L sont conserves; donc on ne perd pas les conjonctions des propriétés qu'on a dans L. Et, finalement, comme le treillis de propriétés d'un système physique est complet, l'application

$$\mathcal{R} : \mathsf{Dwn}_{\mathsf{dis}}(L) \to L : T \mapsto \bigvee T$$

est adjoint au plongement; c'est en fait un autre exemple d'une résolution. Par sa surjectivité elle permet de "reconnaître" les éléments de L dans $\mathsf{Dwn}_{\mathsf{dis}}(L)$: $\downarrow(-)\circ\mathcal{R}$ définie une fermeture sur le frame $\mathsf{Dwn}_{\mathsf{dis}}(L)$, et le treillis des fermés est isomorphe à L.

Question: Définir une implication interne pour un treillis de propriétés pose des problèmes, puisque ce treillis est en general non-distributif. Est-ce une bonne idée de définir, pour $a, b \in L$, une implication "externe" $a \Rightarrow b$ par $(\downarrow a \Rightarrow \downarrow b)$ dans le frame $\mathsf{Dwn}_{\mathsf{dis}}(L)$?

Et les catégories?

Le plongement $\downarrow(-) : L \to \mathsf{Dwn}_{\mathsf{dis}}(L)$ décrit ci-dessus peut être considéré comme une coréstriction d'un morphisme de Yoneda. Travaillons avec $\mathsf{2}$, la catégorie avec deux objets différents et un morphisme non-trivial, comme "univers d'ensembles constants"; un ordre partiel $(L, \leq)$ peut alors être considère comme $\mathsf{2}$–catégorie, et un $\mathsf{2}$–foncteur est une application monotone.

Proposition: $\mathsf{Dwn}(L) \cong \mathsf{Monot}(L, \mathsf{2}^{\mathsf{op}})^{\mathsf{op}} \cong \mathsf{Monot}(L^{\mathsf{op}}, \mathsf{2})$, donc les "downsets" de L sont les préfaisceaux sur L.

Le plongement de Yoneda, $y : L \to \mathsf{Monot}(L^{\mathsf{op}}, \mathsf{2}) : x \mapsto L(-, x)$, correspond alors avec l'inclusion des éléments de L dans $\mathsf{Dwn}(L)$ en tant que idéaux principaux.

Proposition: Si $(L, \leq)$ est un semitreillis avec infima finis, alors $\mathsf{Dwn}_{\mathsf{dis}}(L) \cong \mathsf{Monot}_{\mathsf{dis}}(L, \mathsf{2}^{\mathsf{op}})^{\mathsf{op}}$ — $\mathsf{Monot}_{\mathsf{dis}}$ désigne bien sûr la catégorie des semitreillis avec infima finis, et les morphismes qui conservent les suprema distributifs. (Un tel morphisme est en effet monotone; car si $x \leq y$ alors $\{x, y\}$ est un sous-ensemble avec un supremum distributif, donc $f(y) = f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$, et il suit que $f(x) \leq f(y)$.)

Par conséquence l'inclusion $L \to \mathsf{Monot}_{\mathsf{dis}}(L, 2^{\mathsf{op}})^{\mathsf{op}} : x \mapsto L(-, x)$ est une coréstriction du morphisme de Yoneda; ce morphisme est exactement la réflection $\downarrow(-) : L \to \mathsf{Dwn}_{\mathsf{dis}}(L)$ du théorème plus haut.

Question: Qu'est-ce qui est connu en general de ces coréstrictions des plongements de Yoneda qui sont des cocomplétions?

Références

(Aerts, 1982) *Description of many separated physical entities without the paradoxes encountered in quantum mechanics.* Found. Phys. **12** p1131–1170

(Aerts, 1994) *Quantum Structures, Separated Physical Entities and Probability.* Found. Phys. **24** p1227–1259

(Aerts et Van Steirteghem, 1999) *Quantum axiomatics and a theorem of M. P. Solr.* Int. J. Theor. Phys. **39** p497–502

(Amemiya et Araki, 1967) *A remark on Piron's paper.* Publ. Res. Inst. Math. Sci. **A2** p423–427

(Amira, Coecke et Stubbe, 1998) *How Quantales emerge by introducing Induction within the Operational Approach.* Helv. Phys. Acta. **71** p554–572

(Birkhoff et von Neumann, 1936) *The Logic of Quantum Mechanics.* Ann. of Math. **37** p823–843

(Bruns et Lakser, 1970) *Injective hulls of semilattices.* Can. Math. Bull. **13** p115–118

(Coecke, 2000) *Quantum logic in intuitionistic perspective.* A paraître dans Studia Logica

(Coecke, Moore et Wilce, 2000) *Operational quantum logic: an overview.* Current research in operational quantum logic (eds. Coecke, Moore et Wilce), Kluwer Academic Publishers

(Coecke, Moore et Stubbe, 2000) *Quantaloids describing causation and propagation for physical entities.* A paraître dans Found. Phys. Letters

(Coecke et Stubbe, 1999) *On a Duality of Quantales emerging from an operational resolution.* Int. J. Theor. Phys. **38** p3296–??

(Coecke et Stubbe, 1999) *Operational Résolution and State Transitions in a Categorcal Setting.* Found. Phys. Letters **12** p29–49

(Coecke et Stubbe, 2000) *State transitions as morphisms for complete lattices* Int. J. Theor. Phys. **39** p605–614

(Einstein, Podolsky et Rosen, 1935) *Can quantum–mechanical description of physical reality be considered complete?* Phys. Rev. **47** p777–780

(Engesser, 2000) *Characterisation of classical Hilbert lattices.* Preprint

(Faure et Frölicher, 1993) *Morphisms of Projective Geometries and of corresponding Lattices.* Geom. Ded. **47** p25–40

(Faure, Moore, et Piron, 1995) *Deterministic Evolutions and Schrödinger flows.* Helv. Phys. Acta **68** p150–157

(Harding, 2000) "Private communication"

(Holland, 1995) *Orhtomodularity in infinite dimensions; a theorem of M. Solèr.* Bull. A.M.S. **32** p205–234

(Moore, 1995) *Categories of Representations of Physical Systems.* Helv. Phys. Acta **68** p658–678

(Moore, 1999) *On State Spaces and Property Lattices.* Stud. Hist. Phil. Mod. Phys. **30** p61–83

(Piron, 1964) *Axiomatique Quantique.* Helv. Phys. Acta **37** p439–468

(Piron, 1972) *Survey of General Quantum Physics.* Found. Phys. **2** p287–314

(Piron, 1976) *Foundations of Quantum Physics.* W. A. Benjamin, Reading

(Piron, 1990) *Mécanique Quantique. Bases et Applications.* Presses Polytech. et Univ. Romandes

(Solèr, 1995) *Characterization of Hilbert spaces with orthomodular spaces.* Comm. Algebra **23** p219–243

(Valckenborgh, 2000) *Compound systems in quantum axiomatics.* Thèse de doctorat, Vrije Universiteit Brussel