Nombres de Schur classiques et faibles

Fanasina RAFILIPOJAONA

Le thème central de cette thèse porte sur des partitions en n parties de l'intervalle entier $[1, N] = \{1, 2, \ldots, N\}$ excluant la présence, dans chaque partie, de solutions de l'équation $x + y = z$ dans le cas classique, ou seulement de telles solutions avec $x \neq y$ dans le cas faible. Pour n donné, le plus grand N admissible dans le cas classique se note $S(n)$ et s'appelle le *n-ème nombre de Schur* ; dans le cas faible, il se note $WS(n)$ et s'appelle le *n-ème nombre de Schur faible*. Bien qu'introduits il y a plusieurs décennies déjà, et même il y a un siècle dans le cas classique, on ne sait encore que très peu de choses au sujet de ces nombres. En particulier, $S(n)$ et $WS(n)$ ne sont exactement connus que pour $n \leq 4$.

Cette thèse est composée de deux parties : la première revisite des bornes supérieures connues sur les nombres de Schur classiques et faibles, et la seconde est consacrée à la construction de nouvelles bornes inférieures sur les nombres de Schur faibles.

Nous introduisons, dans la première partie, les ensembles t-libres de sommes, $t \in \mathbb{N}$, dont l'utilisation permet de généraliser et d'unifier diverses démonstrations de bornes supérieures sur les $S(n)$ et les $WS(n)$. Nous obtenons également une relation entre $WS(n+1)$ et $WS(n)$.

Dans la seconde partie, nous initions l'étude de certaines partitions hautement structurées présentant un potentiel intéressant pour le problème de borner inférieurement les nombres $WS(n)$. Effectivement, avec des algorithmes de recherche ne portant que sur ces partitions, nous retrouvons les meilleures bornes inférieures connues sur $WS(n)$ pour $1 \leq n \leq 6$, et nous améliorons significativement celles pour $7 \leq n \leq 9$.