# CONTINUITÉ DE SÉRIES DE FONCTIONS LE LONG DE MARCHES ALÉATOIRES

*par*

THOMAS LANGLET & DOMINIQUE SCHNEIDER

***Résumé.*** — Etant donné une suite de variables aléatoires $(X_n)$, et une suite de nombres complexes $(a_n)$, on étudie la convergence des séries du type $\sum_{n\geq 1} a_n f(\alpha S_n)$ où $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et $f$ est une fonction continue 1-périodique. On est amené à distinguer trois cas : le premier cas contient les variables aléatoires de loi absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et pour le second, on considère les variables aléatoires discrètes.

***Abstract.*** — Given a sequence of random variables $(X_n)$, and a sequence of complex numbers $(a_n)$, we study the convergence of $\sum_{n\geq 1} a_n f(\alpha S_n)$ where $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ and $f$ is a continuous fonction which is 1-periodic. We examine different cases, the first contains the random variables whose laws are absolutely continuous and the case where the random variables are discrete.

## 1. Introduction et résultats principaux

Soient $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels décroissante en module, une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'entiers, et une fonction $f$ 1-périodique à valeurs réelles, on s'intéresse au comportement de série du type

$$\sum_{k\geq 1} a_k f(u_k t)$$

pour $t \in \mathbb{R}$. On étudie notamment les propriétés de convergence uniforme, ponctuelle, au sens $L^2(t)$, l'ordre de grandeur de $\sum_{k=1}^{N} a_k f(u_k t)$ pour $N$ grand.

thomas.langlet@u-picardie.fr LAMFA CNRS UMR 6140 Universite de Picardie Jules Verne .

dominique.schneider@lmpa.univ-littoral.fr Université du Littoral Côte d'Opale LMPA Joseph Liouville Fédération de recherche FR-CNRS 2955.

Dans cet article, on se place dans le cas où $(u_k)_{k\geq 1}$ est générée par une marche aléatoire sur $\mathbb{R}$ qu'on précise immmédiatement.

Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P})$, on définit une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\geq 1}$ indépendantes et identiquement distribuées vérifiant une condition de moment :

$$\exists \rho > 0, \mathbb{E}|X_1|^\rho < +\infty. \tag{1}$$

On définit aussi une marche aléatoire associée à la suite de variables aléatoires

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

Soit $\xi : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^+$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue 1-périodique (c'est à dire appartenant à $C(\mathbb{T})$) telle que

$$|||f||| = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left|\hat{f}(j)\right| \xi(j) < +\infty$$

où $\hat{f}(j) = \int_0^1 f(t)e^{2i\pi jt}dt$. Notons $A_0(\mathbb{T}, \xi)$ l'ensemble des fonctions $f \in C(\mathbb{T})$ telles $|||f||| < +\infty$ et $\hat{f}(0) = 0$. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes décroissante en module. On s'est intéressé à la fonction aléatoire suivante :

$$F(\alpha) = \sum_{n\geq 1} a_n f(\alpha S_n(\omega)).$$

On traitera trois cas :
pour le premier cas, la fonction caractéristique de $X_1$ vérifie

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \qquad |\phi_{X_1}(\alpha)| < 1 \tag{2}$$

et

$$\limsup_{|t|\to+\infty} |\phi_{X_1}(t)| < 1. \tag{3}$$

Le deuxième cas est quand $X_1$ est discret et

$$X_1(\Omega) \subset a + l\mathbb{Z} \tag{4}$$

où $a \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{Q}$. Puis le dernier, $X_1$ est discret et vérifie

$$\#X_1(\Omega) \cap (\mathbb{Q} \setminus \{0\}) \geq 2 \quad \text{et} \quad \#X_1(\Omega) \cap \mathcal{I} \geq 1. \tag{5}$$

où $\mathcal{I}$ est un ensemble presque partout égal à $\mathbb{Q}^c$ (qu'on précise dans la partie 7) et où $\#$ désigne le cardinal de l'ensemble.

Supposons que la suite $(a_k)_k$ vérifie les deux conditions suivantes : il existe $(\gamma, \epsilon)$ dans $]0, 1[\times\mathbb{R}^+$ tel que

$$\sum_{n\geq 2} \sqrt{n^{(-1-\gamma)/2} \sum_{i\geq n} |a_i|^2} < +\infty \tag{6}$$

$$\sum_{n\geq 2} n^{(\gamma+\gamma\epsilon-1)/2}\sqrt{\ln(n)}\Big(\sum_{i\geq n}|a_i|^4\Big)^{1/4} < +\infty. \tag{7}$$

Sous ces hypothèses, on obtient le résultat principal suivant :

***Théorème 1.1***. — *Supposons que la suite $(a_n)$ vérifie les hypothèses (6) et (7), que $X_1$ vérifie (2).*

*Alors il existe un ensemble mesurable $\Omega_0$ avec $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ tel que pour tout $f \in A_0(\mathbb{T}, \xi)$, pour tout $\omega \in \Omega_0$ :*

- *Si $X_1$ vérifie (2) et (3), $\xi = \sqrt{\log(|\cdot|+2))}$ : pour tout $\eta > 0$, la série $F(.,\omega)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}\setminus[-\eta,\eta]$, et elle est donc continue sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.*

- *Si $X_1$ est discret et vérifie (4), $\xi = |\cdot|^{1+\epsilon}$ : la série $F(.,\omega)$ converge presque partout sur $\mathbb{R}$. Quand $f$ est un polynôme trigonométrique, pour tout $\frac{1}{2l} > \eta > 0$, $F$ converge uniformément sur les compacts de $]-\frac{1}{2l},\frac{1}{2l}[\setminus]-\eta,\eta($.*

- *Si $X_1$ est discret et vérifie (5), $\xi = |\cdot|^{1+\epsilon}$ : la série $F(.,\omega)$ converge presque-partout sur $\mathbb{R}$. Quand $f$ est un polynôme trigonométrique, pour tout $\eta > 0$, $F$ converge uniformément sur $\mathbb{R}\setminus[-\eta,\eta]$.*

*Remarque : Avec $\beta > \frac{7}{8}$, $(1/k^\beta)_k$, vérifie les deux conditions (6) et (7) .*

Le théorème 1.1 est une application des théorèmes 2.1, 2.2, 2.3, on y démontre des résultats de convergence $L^2$ et presque partout. Pour cela, on majore la norme $L^2$ en $\alpha$ ou la norme infini de $\sum_{k=M}^{N-1} a_k e^{2i\pi(\alpha S_k(\omega))}$, en fonction des sommes $\sum_{k=M}^{N-1}|a_k|^2$ et $\sum_{k=M}^{N-1}|a_k|^4$. afin de déterminer un critère de convergence sur $(a_k)$. Ces deux termes nous servirons à majorer la norme $L^2$, mais ils sont aussi utiles pour déterminer pour quelles valeur de $\gamma$ la fonction $\alpha \mapsto \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\gamma}e^{2i\pi\alpha S_n}$ est continue.

Pour majorer la norme $L^2$, on se ramène au cas où $f$ est une exponentielle complexe, ensuite on majore la nouvelle somme partielle en utilisant l'inégalité de Van der Corput. On poursuit les calculs en subdivisant l'intégrale. Une méthode de randomisation gaussienne nous permettra de relier les estimations intégrales à des comportements asymptotiques de processus gaussiens. On utilisera les résultats de Fernique [**3**],[**4**] concernant l'étude des fonctions aléatoires gaussinennes. Ce faisant, on obtiendra des estimations précises de l'ordre de grandeur en $N$ de

$$\sup_{\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}}\sup_{l\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\Big|\sum_{k=1}^{N} a_{k+h}a_k(e^{2i\pi l\alpha S_k^h(\omega)} - \mathbb{E}e^{2i\pi l\alpha S_k^h})\Big|$$

où $h$ est un entier et $S_k^h = S_{k+h} - S_k$. Les démonstrations des théorèmes 2.1, 2.2, 2.3 se trouvent dans la troisième partie, la quatrième partie contient la démonstration du théorème 1.1 à partir des théorèmes de la deuxième partie. Une variante est considérée dans l'avant-dernière partie de ce papier. On y établit une majoration de $\sum_{k=M}^{N} a_k f(\alpha S_k(\omega))$, où $(X_k)$ n'est plus identiquement distribué. $(X_n)$ est une suite stationnaire définie par un système dynamique qu'on suppose uniquement ergodique : soit $E$ un compact métrisable et $g$ une fonction continue de $E$ dans $]0,1[$. On définit, sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P})$, une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_k)_{k\geq 1}$ de la faon suivante : soit $x \in X$, pour tout $k \geq 1$,

$$\mathbb{P}(X_k = 1) = g(T^k x) = 1 - \mathbb{P}(X_k = -1).$$

On obtient alors une condition de continuité sur $F$ semblable au théorème précédent.

**Table des matières**


1. Introduction et résultats principaux ........ 1
2. Ordres de grandeur de $\sum_{k=M}^{N} a_k f(\alpha S_k(\omega))$ ........ 5
3. Démonstrations des théorèmes 2.1, 2.2, 2.3 ........ 7
4. Preuve de la convergence de $\sum_{n\geq 1} a_n f(\alpha S_k(\omega))$ ........ 19
5. En dimension supérieure ........ 23
6. Cas où la marche aléatoire est non homogéne dans le temps 24
7. Annexe ........ 27

Références ........ 29


## 2. Ordres de grandeur de $\sum_{k=M}^{N} a_k f(\alpha S_k(\omega))$

On énonce d'abord les estimations dans différents cas.

**2.1. Cas où $\phi_{X_1}$ vérifie (2) et (3).** — On commence par majorer la norme $L^2$ de $\sum_{k=M}^{N} a_k f(\alpha S_k(\omega))$, ce qui permet de déterminer une estimation de l'ordre de grandeur d'un polynôme trigonométrique le long de la marche aléatoire $(S_n)_{n\geq 1}$. On suppose pour les théorèmes 2.1 et 2.2 que $\phi_{X_1}$ vérifie (2) et (3).

***Théorème 2.1***. — *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes décroissante en module. Pour presque tout $\omega$, pour tout $f \in A_0(\mathbb{T}, \sqrt{\log(|.|+2)})$ de norme $|||f||| = 1$, pour tout $\sigma$ rationnel strictement positif. Pour $R, \eta > 0$ avec $R > \eta$, pour tout $N, M, H \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $N - H > M$. pour toute mesure $\nu$ de probabilité sur $[-R, R]$, il existe une constante $K_\sigma > 0$ telle que*

$$\int_{[-R,R]} \left| \sum_{k=M}^{N-1} a_k f(\alpha S_k(\omega)) \right|^2 d\nu(\alpha) \leq$$

$$2\Bigg[\bigg(\frac{N-M+H}{H+1} + \frac{(N-M+H)(N-M)}{(H+1)(N-M-H)} \frac{1}{1-\limsup_{|t|\to+\infty} |\phi_{X_1}(t)|}$$

$$+\frac{H(N-M+H)}{N-H-M} + \frac{(N-M+H)(N-M)}{N-H-M}\nu(]-\eta,\eta])\bigg) \sum_{k=M}^{N-1} |a_k|^2$$

$$+ K_\sigma(N-M+H)H^{\sigma+1}log(N)\sqrt{\log(R+2)}\sqrt{\sum_{k=M}^{N} |a_k|^4}\Bigg].$$

On applique ce théorème à la mesure de Dirac $\delta_\alpha$ avec $\alpha$ non nul. Comme l'estimation ci-dessus est indépendante de $\alpha$, on a

***Théorème 2.2.*** — *Soient* $f \in A_0(\mathbb{T}, \sqrt{\log(|.|+2)})$ *de norme* 1, $\eta > 0$, *notons* $K$ *un compact de* $[-R, R] \setminus [-\eta, \eta]$, *pour tout* $\sigma$ *rationnel strictement positif, il existe une constante* $K_\sigma > 0$ *telle que*

$$\sup_{\alpha \in K} \left| \sum_{j=M}^{N-1} a_j f(\alpha S_j) \right| \leq 2|||f||| \Bigg[ \Bigg( \frac{N-M+H}{H+1}$$

$$+\frac{(N-M+H)(N-M)}{(H+1)(N-M-H)} \frac{1}{1-\limsup_{|t|\to+\infty} |\phi_{X_1}(t)|}$$

$$+\frac{H(N-M+H)}{N-H-M} \Bigg) \sum_{k=M}^{N-1} |a_k|^2$$

$$+K_\sigma (N-M+H) H^{\sigma+1} log(N) \sqrt{\log(R+2)} \sqrt{\sum_{k=M}^{N} |a_k|^4} \Bigg].$$

**2.2. Cas discret.** — On se place dans le cas où $X_1$ est discret et où $X_1$ vérifie

$$X_1(\Omega) \subset a + l\mathbb{Z}$$

ou vérifie

$$\# X_1(\Omega) \cap (\mathbb{Q} \setminus \{0\}) \geq 2 \quad \text{et} \quad \# X_1(\Omega) \cap \mathbb{Q}^c \geq 1.$$

Si $X_1$ vérifie (4), $|\phi_{X_1}|$ est $\frac{1}{l}$-périodique. Si $X_1$ vérifie (5), $|\phi_{X_1}|$ est apériodique. En effet si $|\phi_{X_1}|$ était périodique, alors il existerai un $\alpha$ non nul tel que $1 - |\phi_{X_1}|^2(\alpha) = 0$. Or $1 - |\phi_{X_1}|^2(\alpha)$ est égal à 0 si et seulement si pour tout $n$, $x_n \alpha \in \mathbb{Z}$ (où $(x_n)_n$ sont les valeurs prises par $X_1$). Ceci qui siginfie que $\alpha$ doit être à la fois rationnel et à la fois irrationnel.

On rappelle que dans le cas discret, la fonction $\xi$ est définie par $\xi(j) = |j|^{1+\epsilon}$.

***Théorème 2.3.*** — *Il existe un ensemble* $\Omega_0$ *de mesure pleine, tel que pour* $\omega \in \Omega_0$. *Pour tout* $f \in A_0(\mathbb{T}, |.|^{1+\epsilon})$ *de norme* $|||f||| = 1$, *pour presque tout* $\alpha \in \mathbb{R}$, *pour tout* $\sigma$ *rationnel strictement positif, il existe une constante* $K_\sigma > 0$ *telle que*

$$\left| \sum_{k=M}^{N-1} a_k f(\alpha S_k(\omega)) \right|^2 =$$

$$2\Bigg[ \Bigg( \frac{N-M+H}{H+1} + C(\alpha, \epsilon, X_1) \frac{(N-M+H)(N-M)}{H(N-M-H)}$$

$$+\frac{H(N-M+H)}{N-H-M} \Bigg) \sum_{k=M}^{N-1} |a_k|^2$$

$$+ K_\sigma(N-M+H)H^{\sigma+1}log(N)\sqrt{\sum_{k=M}^{N-1}|a_k|^4}\Bigg]$$

*où le $\mathcal{O}$ est indépendant de $f,(a_k),\omega$, mais dépend de $\alpha$.*

De ce théorème, on en déduit la partie du théorème 1 dans le cas discret.

## 3. Démonstrations des théorèmes 2.1, 2.2, 2.3

On commence par se ramener à un cas plus simple, le cas où $f$ est la fonction : $\alpha \mapsto e^{2i\pi l\alpha}$. En effet, comme $f$ appartient à $A_0(\mathbb{T},\xi)$, on en déduit qu'en notant $F_M^N(\alpha)=\sum_{k=M}^{N-1}a_k f(\alpha S_k(\omega))$ :

$$F_M^N(\alpha)=\sum_{k=M}^{N-1}a_k\sum_{l\in\mathbb{Z}}\hat{f}(l)e^{2i\pi l\alpha S_k(\omega)}.$$

En utilisant cette égalité, on trouve :

$$\int_{[-R,R]}\left|F_M^N(\alpha))\right|^2 d\nu(\alpha)= \quad \int_{[-R,R]}\left|\sum_{k=M}^{N-1}a_k\sum_{l\in\mathbb{Z}}\hat{f}(l)e^{2i\pi l\alpha S_k(\omega)}\right|^2 d\nu(\alpha).$$

Puis on intervertit les deux sommes, et on utilise l'inégalité triangulaire, ce qui donne :

$$\left(\int_{[-R,R]}\left|F_M^N(\alpha)\right|^2 d\nu(\alpha)\right)^{1/2}\leq\sum_{l\in\mathbb{Z}}|\hat{f}(l)|\left(\int_{[-R,R]}|\sum_{k=M}^{N-1}a_k e^{2i\pi l\alpha S_k(\omega)}|^2 d\nu(\alpha)\right)^{1/2}.$$

Il suffit donc de démontrer le résultat sur la fonction $x\mapsto e^{2il\pi x}$ où $l$ est un élément de $\mathbb{Z}^*$. La première étape de la preuve du théorème 1 consiste à utiliser l'inégalité de van der Corput afin d'obtenir une corrélation des $(a_k)$.

**3.1. Partie commune des différents cas.** — On rappelle l'inégalité de Van der Corput. Soient $N,M$ deux entiers vérifiant $M<N$. Soient $(u_n)_{M\leq n\leq N}$ une famille finie de $N-M$ éléments d'un espace de Hilbert et si H est un entier tel que $H<N-M$, on a

(8)

$$\left\|\sum_{k=M}^{N-1}u_k\right\|^2\leq\frac{N-M+H}{H+1}\sum_{k=M}^{N-1}\|u_k\|^2+2\frac{N-M+H}{(H+1)^2}\sum_{h=1}^{H}(H+1-h)\mathfrak{R}\left(\sum_{k=M}^{N-M-h-1}u_{k+h}\cdot u_k\right).$$

On l'applique à $(L^2([-R,R]),\nu)$ et à la suite $\left(a_k e^{2il\pi\alpha S_k}\right)_k$ ce qui donne :

$$\left\|\sum_{k=M}^{N-1} a_k e^{2il\pi\alpha S_k}\right\|_{2,\nu}^2 \leq \frac{N-M+H}{H+1}\sum_{k=M}^{N-1}|a_k|^2 + I$$

où

$$I = 2\frac{N-M+H}{(H+1)^2}\sum_{h=1}^{H}(H+1-h)\sum_{k=M}^{N-M-h-1}\Re\left(a_{k+h}a_k\int_{[-R,R]} e^{2il\pi\alpha S_k^h}d\nu(\alpha)\right).$$

Où on a noté $S_k^h = X_{k+1} + \ldots + X_{k+h}$. On décompose $I$ en $I_1 + I_2$, à partir de l'égalité suivante : $e^{2il\pi\alpha S_k^h} = \phi_{S_k^h}(l\alpha) + (e^{2il\pi\alpha S_k^h} - \phi_{S_k^h}(l\alpha))$.

On continue en découpant $I_1$, on utilise pour cela la propriété d'indépendance et d'équirépartition des $(X_i)_i$ ($\phi_{S_k^h} = \phi_{X_1}^h$), et on se sert de $1 = \frac{-h}{N-M-h} + \frac{N-M}{N-M-h}$ pour décomposer $I_1$ en $I_{1,1} + I_{1,2}$. On majore ensuite $a_{k+h}$ par $a_k$, on obtient :

$$I_{1,1} \leq 2\frac{N-M+H}{H+1}\sum_{h=1}^{H}\frac{(H+1-h)}{N-M-h}\int_{[-R,R]}|\phi_{X_1}^h(l\alpha)|d\nu(\alpha)\sum_{k=M}^{N-1}|a_k|^2\text{et}$$

$$I_{1,2} \leq 2\frac{N-M+H}{(H+1)^2}\sum_{h=1}^{H}\frac{(H+1-h)(N-M)}{N-M-h}\int_{[-R,R]}|\phi_{X_1}^h(l\alpha)|d\nu(\alpha)\sum_{k=M}^{N-1}|a_k|^2.$$

On commence par majorer $I_{1,1}$ : on majore $|\phi_{X_1}|$ par 1 et $h(H+1-h)$ par $(H+1)^2$, il s'en suit que : $|I_{1,1}| \leq 2\frac{H(N-M+H)}{N-H-M}\sum_{k=M}^{N-1}|a_k|^2$. La majoration de $I_{1,2}$ se traite de différentes faons suivant la nature de $X_1$.

## 3.2. Majoration de $I_{1,2}$. —

*3.2.1. Cas où $\phi_{X_1}$ vérifie (2) et (3).* — On majore maintenant $|I_{1,2}|$. On commence tout d'abord par faire une partition de $[-R,R]$ en deux ensembles : $Q_1 = [-\eta,\eta]$, $Q_2 = [-R,R]\setminus Q_1$, puis on majore l'intégrale sur $Q_1$, en majorant la fonction caractéristique par 1.

$$|I_{1,2}| \leq 2\frac{(N-M+H)(N-M)}{N-M-H}\sum_{k=M}^{N-h-1}|a_k|^2\nu(Q_1)$$

$$+2\frac{(N-M+H)(N-M)}{(H+1)(N-M-H)}\sum_{k=M}^{N-1}|a_k|^2\,\Re\left(\int_{Q_2}\sum_{h=1}^{H}\phi_{X_1}^h(l\alpha)d\nu(\alpha)\right).$$

On se sert de l'inégalité suivante : pour tout $x \in \mathbb{C}$ avec $|x| < 1$, on a : $\sum_{h=1}^{H}|x|^h \leq \left|\frac{2}{1-|x|^2}\right|$.

Puis on se sert des hypothèses sur la variable $X_1$, on obtient : pour tout $\eta > 0$,

$$\sum_{h=1}^{H} |\phi_{X_1}^h(l\alpha)| \leq \frac{2}{\inf_{|x|>\eta} 1 - |\phi_{X_1}(x)|^2}.$$

On en déduit ainsi une majoration de $I_{1,2}$ :

$$I_{1,2} \leq C\Bigg( \frac{(N-M+H)(N-M)}{N-H-M} \nu(]-\eta,\eta])A_1^{N,M}$$

$$+ \frac{1}{\inf_{|x|>\eta} 1 - |\phi_{X_1}(x)|^2} \frac{(N-M+H)(N-M)}{(H+1)(N-M-H)} \sum_{k=M}^{N-1} |a_k|^2 \Bigg),$$

où on a noté $C$ la constante définie par $2/Z$.

Dans le cas discret, on ne peux plus se servir du lemme de Riemman-lebesgue pour la majoration.

*3.2.2. Cas discret et $|\phi_{X_1}|$ périodique.* — Majorons $I_{1,2}$ dans ce cas, la mesure $\nu$ est alors la mesure de Dirac en un point non nul.

$$I_{1,2} \leq 2\frac{(N-M+H)(N-M)}{(H+1)(N-M-H)} \sum_{k=M}^{N-1} |a_k|^2 \Re \left( \sum_{h=1}^{H} \phi_{X_1}^h(l\alpha) \right).$$

Soient $(x_n)$ les valeurs non nulles prises, avec une probabilité $(p_n) \in \mathbb{R}^+$, par la symétrisée de $X_1$, c'est à dire par $X_1 - X_1'$. On a alors

$$1 - |\phi_{X_1}(\alpha)|^2 = \sum_{n\geq 0} p_n \sin^2(\pi\alpha x_n) \geq p_0 \sin^2(\pi\alpha x_0).$$

Pour tout $\alpha \in \left[ -\frac{1}{2x_0}, \frac{1}{2x_0} \right]$, on a :

$$1 - |\phi_{X_1}(\alpha)|^2 \geq p_0 x_0^2 \alpha^2.$$

Puis on minore $\alpha$ par $\{\alpha x_0\}$, où $\{\cdot\}$ désigne la distance au plus proche entier, ce qui donne que pour tout $x \in [-\frac{1}{2x_0}, \frac{1}{2x_0}]$,

$$1 - |\phi_{X_1}(\alpha)|^2 \geq \{\alpha x_0\}^2.$$

Comme $\alpha \mapsto \sin^2(\pi\alpha x_0)$ est $\frac{1}{x_0}$-périodique, on en déduit : pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$1 - |\phi_{X_1}(\alpha)|^2 \geq \{\alpha x_0\}^2.$$

On obtient en utilisant cette inégalité : pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \frac{1}{x_0}\mathbb{Q}$, pour tout $l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,

$$\sum_{h=1}^{H} |\phi_{X_1}^h(l\alpha)| \leq \frac{1}{1 - |\phi_{X_1}(l\alpha)|} \leq \frac{2}{1 - |\phi_{X_1}(l\alpha)|^2} \leq \{l\alpha x_0\}^{-2}.$$

On déduit du théorème de Thue-Siegel-Roth (voir annexe) que pour presque tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe une constante $C(\alpha,\epsilon) > 0$, tel que

$$\sum_{h=1}^{H} |\phi_{X_1}^h(l\alpha)| \leq C(\alpha,\epsilon) l^{2+2\epsilon}.$$

En utilisant cette inégalité, on peut en déduire une majoration de $I_{1,2}$ qui est la suivante :

$$I_{1,2} \leq C(\alpha,\epsilon)\frac{(N-M+H)(N-M)}{(H+1)(N-M-H)} \sum_{k=M}^{N-h-1} |a_k|^2 l^{2+2\epsilon}.$$

Pour conclure, il suffit de prendre $\epsilon/2$ au lieu de $\epsilon$.■

*3.2.3. Cas discret et $|\phi_{X_1}|$ apériodique.* — Soit $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, la mesure $\nu$ est la mesure de Dirac en $\alpha$. Une première majoration de $I_{1,2}$ donne :

$$I_{1,2} \leq 2\frac{(N-M+H)(N-M)}{(H+1)(N-M-H)} \sum_{k=M}^{N-1} |a_k|^2 \frac{1}{1-|\phi_{X_1}(l\alpha)|^2}.$$

On réutilise ce qui a été fait pour le cas discret et périodique :

$$1-|\phi_{X_1}(l\alpha)|^2 \geq \sum_{n\geq 0} p_n \sin^2(\pi x_n l\alpha).$$

Puis on minore en utilisant l'inégalité : pour tout $|x| \leq \frac{1}{2}$, $\sin(\pi x) \geq x$, ce qui nous donne

$$\sum_{n\geq 0} p_n \sin^2(\pi y_n l\alpha) \geq \sum_{n\geq 0} p_n \pi^2 \{y_n l\alpha\}^2.$$

Distinguons maintenant deux cas.

Si $\alpha$ est rationnel ($\alpha = \frac{p}{q}$ avec p et q premier entre eux et q positif) , on minore la somme par $p_1\pi^2\{y_1 l\frac{p}{q}\}^2$. Comme $y_1$ appartient à $\mathcal{I}$ (voir la dernière partie), $\frac{y_1}{q}$ est de type 1. On applique le théorème de Thue-Siegel-Roth, ce qui donne :

$$1-|\phi_{X_1}(l\alpha)|^2 \geq p_1\frac{C(y_1,p,q,\epsilon)}{l^{1+\epsilon}}.$$

Si $\alpha \in \mathcal{I}$ , on minore la somme par $p_0\pi^2\{y_0 l\alpha\}^2$. Cette fois-ci, $y_0$ est rationnel on l'écrit alors sous la forme $\frac{r}{t}$ où $r,t$ sont premiers entre eux et $t$ est positif. On a de la même faon que précédemment :

$$1-|\phi_{X_1}(l\alpha)|^2 \geq p_0\frac{C(r,t,\alpha,\epsilon)}{l^{1+\epsilon}}.$$

On en déduit donc que pour presque tout $\alpha$ réel,

$$\sum_{n\geq 0} p_n \sin^2(\pi y_n l\alpha) \geq \frac{C(\alpha,\epsilon,X_1)}{l^{1+\epsilon}},$$

ce qui nous permet de trouver une majoration de $I_{1,2}$.

$$I_{1,2} \leq C(X_1, \alpha) \frac{(N-M+H)(N-M)}{(H+1)(N-M-H)} \sum_{k=M}^{N-1} |a_k|^2 l^{2+2\epsilon}.$$

Pour conclure, il suffit de prendre $\epsilon/2$ au lieu de $\epsilon$.■

**3.3. Majoration de l'intégrale $I_2$ en utilisant des outils gaussiens.** — Il ne reste plus qu'à majorer $I_2$, on rappelle ci-dessous la valeur de l'intégrale :

$$I_2 = 2\frac{N-M+H}{(H+1)^2} \sum_{h=1}^{H} (H+1-h) \sum_{k=M}^{N-h-1} \int_{[-R,R]} \Re \left( a_{k+h} a_k (e^{2i\pi l\alpha S_k^h} - \phi_{S_k^h}(l\alpha)) \right) d\nu(\alpha).$$

Notons pour presque tout $\omega \in \Omega$, pour tout $h \geq 1$,

$$Q_h(l, N, M) = \sqrt{\sum_{k=M}^{N-h-1} |a_{k+h} a_k|^2 \log(h+2) \log(N+2) \log(R+2) \log(|l|+2)}$$

et

$$K_h(\omega) = \frac{1}{h} \sup_{M \in \mathbb{N}^*} \sup_{N, N-h > M} \sup_{l \in \mathbb{Z}^*} \sup_{\alpha \in [-R,R]} \left| \frac{\sum_{k=M}^{N-h-1} a_{k+h} a_k (e^{2i\pi l\alpha S_k^h(\omega)} - \phi_{S_k^h}(l\alpha))}{Q_h(l, N, M)} \right|.$$

On en déduit l'inégalité suivante :

$$|I_2| \leq 2\frac{N-M+H}{(H+1)^2} \sum_{h=1}^{H} (H+1-h) h Q_h(l, N, M) K_h.$$

Le terme $\sqrt{\log(|l|+2)}$ n'apparat pas dans le théorème 2.1. En effet, $\sqrt{\log(|l|+2)}$ est compris dans $|||f|||$ qui vaut 1.

Pour majorer $I_2$, on se sert du lemme suivant :

***Lemme 3.1***. — *$\{Z_h, h \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires positives et intégrables sur $(\Omega, B, \mathbb{P})$, vérifiant $\sup_{h \geq 1} \mathbb{E} Z_h < +\infty$. Alors on a pour tout $\epsilon > 0$ rationnel,*

$$\mathbb{P}\left( \omega, \sup_{H \geq 1} \left| \frac{1}{H} \sum_{h=1}^{H} \frac{Z_h(\omega)}{h^\epsilon} \right| < +\infty \right) = 1$$

On montrera dans la suite $\sup_{h \geq 1} \mathbb{E} K_h < +\infty$, supposons le admis pour le moment. L'inégalité suivante en découle :

$$|I_2| \leq \ 2K_\epsilon (N-M+H) H^{\epsilon+1} \log(N) \sqrt{\log(R+2)} \sup_{h=1,\cdots,H} \sqrt{A_{h,2}^{N,M}}.$$

Démontrons le lemme précédent.

Par hypothèse, il existe une constante $K > 0$, telle que pour tout $h \geq 1$, $\mathbb{E}Z_h \leq K$. Fixons $\epsilon > 0$ supposé petit. On a ainsi pour tout $h \geq 1$, $\mathbb{E}\frac{Z_h}{h^\epsilon} \leq \frac{K}{h^\epsilon}$. Ceci étant encore valable au sens de Césaro, c'est à dire : pour tout $H \geq 1$,

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{H}\sum_{h=1}^{H}\frac{Z_h}{h^\epsilon}\right) \leq \frac{K}{H^\epsilon}.$$

Pour tout $\rho > 1$, on note $\mathcal{N}_\rho = \left\{[\rho^k], k \in \mathbb{N}\right\}$ un index partiel où $[\cdot]$ désigne la partie entière.
On a alors pour tout $\rho > 1$ fixé :

$$\mathbb{E}\left[\sum_{H\in\mathcal{N}_\rho}\frac{1}{H}\sum_{H=1}^{H}\frac{Z_h}{h^\epsilon}\right] \leq K\sum_{H\in\mathcal{N}_\rho}\frac{1}{H^\epsilon} < +\infty.$$

Par conséquent :

$$\mathbb{P}\left\{\omega, \lim_{H\to+\infty, H\in\mathcal{N}_\rho}\frac{1}{H}\sum_{h=1}^{H}\frac{Z_h(\omega)}{h^\epsilon} = 0\right\} = 1$$

Le lemme suivant dont on trouve la démonstration dans [**6**], permet de conclure.

***Lemme 3.2***. — *Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions positives et mesurables, définies sur un espace de probabilité $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Pour tout $\rho > 1$, on désigne par $\mathcal{N}_\rho$ l'index partiel $\left\{[\rho^k], k \in \mathbb{N}\right\}$. Supposons que pour tout $\rho > 1$ fixé,*

$$\mu\left\{x, \lim_{N\in\mathcal{N}_\rho\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f_k(x) \textit{existe}\right\} = 1.$$

*Alors pour tout $\rho > 1$, cette limite est la même, noté $L$, et nous avons*

$$\mu\left\{x, \lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f_k(x) = L(x)\right\} = 1.$$

On montre que l'hypothèse utilisée dans le lemme 3.1 est vraie, c'est à dire :

$$\sup_{h\geq 1}\mathbb{E}K_h < +\infty \tag{9}$$

est vrai, pour cela, on utilise une procédure de randomisation gaussienne. Cette méthode permet de transférer le problème à étudier, en un problème de continuité de trajectoire de fonctions aléatoires gaussiennes.

**Etape 1** : Symétrisation du problème

Une variable aléatoire est dite symétrique si étant donné un choix $\epsilon$ aléatoire de signe $\pm 1$, $\epsilon X$ a la même loi que $X$.

Notons pour $k \geq 1$, $(Y_k)_{k\geq 1}$ une copie indépendante de $(X_k)_{k\geq 1}$, et tout $h, k \geq 1$, $R_k^h = Y_{k+1} + \cdots + Y_{k+h}$ une copie indépendante de $S_k^h$, on a alors $\phi_{S_k^h}(l\alpha) = \phi_{R_k^h}(l\alpha)$. On écrit ensuite $K_h(\omega)$ sous la forme

$$\frac{1}{h} \sup_{M\in\mathbb{N}^*} \sup_{N,N-h>M} \sup_{l\in\mathbb{Z}^*} \sup_{\alpha\in[-R,R]} \left| \frac{\mathbb{E}_{\omega'} \sum_{k=M}^{N-h-1} a_{k+h} a_k (e^{2i\pi l\alpha S_k^h(\omega)} - e^{2i\pi l\alpha R_k^h(\omega')})}{Q_h(l,N,M)} \right|.$$

Dans la suite, on écrira $\sup_{M,N,l,\alpha}$ au lieu de $\sup_{M\in\mathbb{N}^*} \sup_{N,N-h>M} \sup_{l\in\mathbb{Z}^*} \sup_{\alpha\in[-R,R]}$ .

Le but de cette étape est de symétriser la variable aléatoire $e^{2i\pi l\alpha S_k^h(\omega)} - e^{2i\pi l\alpha R_k^h(\omega')}$. Grce à l'inégalité de Jensen, on en déduit que $hK_h(\omega)$ est inférieur ou égal à :

$$\mathbb{E}_{\omega'} \sup_{M,N,l,\alpha} \left| \frac{\sum_{k=M}^{N-h-1} a_{k+h} a_k (e^{2i\pi l\alpha S_k^h(\omega)} - e^{2i\pi l\alpha R_k^h(\omega')})}{Q_h(l,N,M)} \right|.$$

Comme $S_k^h = X_{k+1} + \cdots + X_{k+h}$, on remarque que pour $k$, $S_k^h$ et $S_{k+1}^h$ ne sont pas indépendants, mais que $S_k^h$ et $S_{k+h}^h$ le sont. On va donc sommer par paquets pour avoir des indices en progression arithmétiques, de raison h. On partitionne $\{k \in \mathbb{N}, M \leq k \leq N-h-1\}$ en $\bigcup_{1\leq m\leq h} I_m^h(M, N-h)$, où $I_m^h(M, N-h) = [M, N-h-1] \cap \{m + hr, r \in \mathbb{N}\}$ . Ainsi pour $i, j \in I_m^h(M, N-h)$, avec $i \neq j$, on a l'indépendance de $S_i^h$ avec $S_j^h$, et $R_i^h$ avec $R_j^h$, ceci entrane que pour montrer que () est vraie, il suffit de prouver que

$$(10) \quad \sup_{h\geq 1} \sup_{m=1,\cdots,h} \mathbb{E}_{\omega,\omega'} \sup_{M,N,l,\alpha} \left| \frac{\sum_{k\in I_m^h(M,N-h)} a_{k+h} a_k (e^{2i\pi l\alpha S_k^h(\omega)} - e^{2i\pi l\alpha R_k^h(\omega')})}{Q_h(l,N,M)} \right|$$

est finie.

Fixons $h \geq 1$ et $1 \leq m \leq h$.

Notons $(\epsilon_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de Rademacher, indépendante des suites $(X_k)_{k\geq 1}$ et $(Y_k)_{k\geq 1}$. On obtient alors en notant $\Delta_{k,h}(\omega, \omega')$ à la place de $e^{2i\pi l\alpha S_k^h(\omega)} - e^{2i\pi l\alpha R_k^h(\omega')}$ :

$$
\begin{aligned}
(11) \qquad & \mathbb{E}_{\omega,\omega'} \sup_{M,N,l,\alpha} \left| \frac{\sum_{k\in I_m^h(M,N-h)} a_{k+h}a_k\Delta_{k,h}(\omega,\omega')}{Q_h(l,N,M)} \right| \\
= {} & \mathbb{E}_{\omega,\omega'} \sup_{M,N,l,\alpha} \left| \frac{\sum_{k\in I_m^h(M,N-h)} \mathbb{E}_\epsilon|\epsilon_k| a_{k+h}a_k\Delta_{k,h}(\omega,\omega')}{Q_h(l,N,M)} \right| \\
= {} & \mathbb{E}_{\omega,\omega'} \sup_{M,N,l,\alpha} \left| \mathbb{E}_\epsilon \frac{\sum_{k\in I_m^h(M,N-h)} |\epsilon_k| a_{k+h}a_k\Delta_{k,h}(\omega,\omega')}{Q_h(l,N,M)} \right| \\
\leq {} & \mathbb{E}_{\omega,\omega'}\mathbb{E}_\epsilon \sup_{M,N,l,\alpha} \left| \frac{\sum_{k\in I_m^h(M,N-h)} |\epsilon_k| a_{k+h}a_k\Delta_{k,h}(\omega,\omega')}{Q_h(l,N,M)} \right|.
\end{aligned}
$$

Comme les variables aléatoires $\epsilon_k^h$ et $S_k^h$ sont indépendantes et que les suites $(e^{2i\pi l\alpha S_k^h(\omega)} - e^{2i\pi l\alpha R_k^h(\omega')})_{k\in I_m^h(M,N-h)}$ et $(\epsilon_k(e^{2i\pi l\alpha S_k^h(\omega)} - e^{2i\pi l\alpha R_k^h(\omega')}))_{k\in I_m^h(M,N-h)}$ sont indépendantes et ont même loi pour tout choix de signe $+1$ ou $-1$, on en déduit donc l'équidistribution en loi de

$$\sum_{k\in I_m^h(M,N-h)} \epsilon_k a_{k+h}a_k\Delta_{k,h}(\omega,\omega')$$

et

$$\sum_{k\in I_m^h(M,N-h)} |\epsilon_k| a_{k+h}a_k\Delta_{k,h}(\omega,\omega').$$

Ce qui permet les majorations suivantes :

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}_{\omega,\omega'} \sup_{M,N,l,\alpha} \left| \frac{\sum_{k\in I_m^h(M,N-h)} a_{k+h}a_k\Delta_{k,h}(\omega,\omega')}{Q_h(l,N,M)} \right| \\
& \leq \mathbb{E}_{\omega,\omega'}\mathbb{E}_\epsilon \sup_{M,N,l,\alpha} \left| \frac{\sum_{k\in I_m^h(M,N-h)} \epsilon_k a_{k+h}a_k\Delta_{k,h}(\omega,\omega')}{Q_h(l,N,M)} \right| \\
& \leq 2\mathbb{E}_{\omega}\mathbb{E}_\epsilon \sup_{M,N,l,\alpha} \left| \frac{\sum_{k\in I_m^h(M,N-h)} \epsilon_k a_{k+h}a_k e^{2i\pi l\alpha S_k^h(\omega)}}{Q_h(l,N,M)} \right| \qquad .
\end{aligned}
$$

**Etape 2** : Randomisation gaussienne

La randomisation gaussienne consiste à introduire des processus gaussiens afin de pouvoir utiliser des outils introduits par Fernique.

Notons $(g_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires de loi normale définies sur l'espace de probabilté $(\Omega_g,\tau_g,\mathbb{P}_g)$. Comme $\mathbb{E}|g_k| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$, on en déduit que (11) est plus petite que :

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathbb{E}_\omega\mathbb{E}_\epsilon\mathbb{E}_g \sup_{M,N,l,\alpha}\left|\frac{\sum_{k\in I_m^h(M,N-h)}\epsilon_k|g_k|a_{k+h}a_k e^{2i\pi l\alpha S_k^h(\omega)}}{Q_h(l,N,M)}\right|.$$

Puis comme les suites de variables aléatoires $(\epsilon_k|g_k|)_{k\geq 1}$ et $(g_k)_{k\geq 1}$ sont identiquement distribuées, on obtient que (11) est inférieur ou égale à

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathbb{E}_\omega\mathbb{E}_g \sup_{M,N,l,\alpha}\left|\frac{\sum_{k\in I_m^h(M,N-h)}g_k a_{k+h}a_k e^{2i\pi l\alpha S_k^h(\omega)}}{Q_h(l,N,M)}\right|.$$

On sépare ensuite partie réelle et partie imaginaire, il nous suffit de montrer que les deux quantités suivantes sont finies :

$$\mathbb{E}_\omega\mathbb{E}_g \sup_{M,N,l,\alpha}\left|\frac{\sum_{k\in I_m^h(M,N-h)}g_k a_{k+h}a_k \cos(2\pi l\alpha S_k^h(\omega))}{Q_h(l,N,M)}\right|,$$

$$\mathbb{E}_\omega\mathbb{E}_g \sup_{M,N,l,\alpha}\left|\frac{\sum_{k\in I_m^h(M,N-h)}g_k a_{k+h}a_k \sin(2\pi l\alpha S_k^h(\omega))}{Q_h(l,N,M)}\right|.$$

Notons $(g'_k)$ une autre suite de variables aléatoires gaussiennes, indépendantes de $(S_k^h)_k$ et de $(g_k)_k$. Comme $\mathbb{E}(g'_k)=0$, on détermine les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{k\in I_m^h(M,N-h)} g_k a_{k+h}a_k\cos(2\pi l\alpha S_k^h(\omega))\right| \\
\leq &\left|\sum_{k\in I_m^h(M,N-h)} a_{k+h}a_k\Big(g_k\cos(2\pi l\alpha S_k^h(\omega))+\mathbb{E}_{g'}g'_k\sin(2\pi l\alpha S_k^h(\omega)\Big)\right| \\
\leq &\,\mathbb{E}_{g'}\left|\sum_{k\in I_m^h(M,N-h)} a_{k+h}a_k(g_k\cos(2\pi l\alpha S_k^h(\omega))+g'_k\sin(2\pi l\alpha S_k^h(\omega))\right|
\end{aligned}$$

En répétant le même processus sur la partie en sinus, il nous suffit de montrer que

$$\mathbb{E}_{\omega,g,g'}\sup_{M,N,l,\alpha}\left|\frac{\sum_{k\in I_m^h(M,N-h)}a_{k+h}a_k\Big(g_k cos(2\pi l\alpha S_k^h(\omega))+g'_k sin(2\pi l\alpha S_k^h(\omega))\Big)}{Q_h(l,N,M)}\right|$$

est finie. Ce qui met fin à la randomisation gaussienne.

**Etape 3 :** Outils gaussiens

On va utiliser dans cette étape, le théorème 7.1 qui est énoncé dans l'annexe, ce théorème est remarquable : il permet de majorer $\mathbb{E}\sup$ par $\sup\mathbb{E}$. On commence par regarder la suite de vecteurs gaussiens. On rappelle que $h \in \mathbb{N}^*$ , $m \in \{1, \cdots, h\}$ et $\omega \in \Omega$ sont fixés. Pour tout $(M, N) \in \mathbb{N}^2$, avec $N - h > M$, on note $G(\alpha, l, N, M, \omega_g, \omega_{g'})$ :

$$Q_h(l,N,M)^{-1} \sum_{k \in I_m^h(M,N-h)} a_{k+h}a_k \left( g_k(\omega_g)\cos(2\pi l\alpha S_k^h(\omega)) + g'_k(\omega_{g'}) sin(2\pi l\alpha S_k^h(\omega)) \right).$$

On omettra parfois $\omega_g$ et $\omega_{g'}$.

On veut ensuite utiliser le théorème 7.1, pour cela il nous faut tout d'abord déterminer la suite de vecteurs gaussiens (ici la suite est indexée par $(l, N, M) \in \mathbb{N}^3$ et il nous faut une suite indexée par $\mathbb{N}$), pour cela on va faire une composition de fonctions numérotants $\mathbb{N}^2, \mathbb{Z}^*$ et $\{(M,N) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}, N-h > M\}$. On rappelle les fonctions permettant de numéroter $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{Z}^*$ sont

$$\theta(i, j) = \frac{1}{2}(i + j)(i + j + 1) + i$$

qui numérote $\mathbb{N}^2$ et pour tout $j \in \mathbb{Z}^*$,

$$\rho(j) = \begin{cases} 2j & \text{si } j \in \mathbb{N}^* \\ -2j - 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

qui numérote $\mathbb{Z}^*$. Occupons nous maintenant de $\{(M, N) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, N - h > M\}$ :

$$\begin{array}{rcl} \Upsilon_h : \{(M,N) \in \mathbb{N}^2, N - h > M\} & \to & \mathbb{N} \\ (M, N) & \mapsto & k = \frac{1}{2}(N - h)^2 + \frac{N - h}{2} - M \end{array}$$

$\Upsilon_h$ permet de numéroter le dernier ensemble. En composant ces trois applications, on obtient $\Xi_h(j, M, N) = \theta(\rho(j), \Upsilon_h(M, N))$, qui numérote $\{(l, M, N) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}, N - h > M\}$. Pour $h \geq 1$, on a

$$\begin{array}{rcl} \Xi_h : \{(l, M, N) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}, N - h > M\} & \to & \mathbb{N} \\ (l, M, N) & \mapsto & k \end{array}$$

où

$$k = \begin{cases} l + \frac{1}{4}((N-h)^2 + N - h - 2M + 2l - 2)((N-h)^2 + N - h - 2M + 2l - 1) & l \in \mathbb{N}^* \\ l + \frac{1}{4}((N-h)^2 + N - h - 2M - 2l + 1)((N-h)^2 + N - h - 2M - 2l + 2) & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette application permet d'envoyer par bijection l'ensemble $\{(M, N) \in \mathbb{N}^2, N - h > M\}$ sur un sous-ensemble de $\mathbb{N}$. Notons pour tout $k \geq 1$,

$$G_i(\alpha, l, N, M) = G(\alpha, \Xi_h^{-1}(i)).$$

$(G_i)_{i\geq 1}$ est une suite de vecteurs gaussiens à valeurs dans $C([-R, R], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $[-R, R]$ dans $\mathbb{R}$ (on munit cet espace de la norme supérieure) qui est un espace de Banach. On peut ainsi appliquer le théorème 7.1, on aboutit à :

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E} \sup_i \sup_{\alpha,l} \left| G(\alpha, \Xi_h^{-1}(i)) \right| \\
\leq \quad & K \mathbb{E}_X \sup_i \mathbb{E}_{g,g'} \sup_{\alpha,l} \left| G(\alpha, \Xi_h^{-1}(i)) \right| + K \mathbb{E} \sup_i |\lambda_i \sigma_i|
\end{aligned} \tag{12}
$$

où $(\lambda_i)$ est une suite isonormale, K une constante universelle, et

$$
\begin{aligned}
\sigma_i &= \sup_{f \in B', \|f\| \leq 1} \left( \int |\langle G(\alpha, \Xi_h^{-1}(i), \omega_g), f \rangle|^2 d\mathbb{P}_g(\omega_g) \right)^{1/2} \\
&= Q_h(\Xi_h^{-1}(i))^{-1} \sup_{f \in B', \|f\| \leq 1} \left( \int | \sum_{k \in I_m^h(M, N-h)} a_{k+h} a_k \right. \\
& \qquad \left. \langle g_k \cos(2\pi l \alpha S_k^h(\omega)) + g_k' sin(2\pi l \alpha S_k^h(\omega)), f \rangle |^2 d\mathbb{P}_{g,g'} \right)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

On majore succesivement $\langle \cos(2\pi l \alpha S_k^h(\omega)), f \rangle$ par $\|f\| \sup_\alpha |\cos(2\pi l \alpha S_k^h(\omega))|$, puis $\|f\|$ et $\sup_\alpha |\cos(2\pi l \alpha S_k^h(\omega))|$ par 1. On obtient de la même faon : $\langle sin(2\pi l \alpha S_k^h), f \rangle \leq \|f\|$, on en déduit :

$$
\sigma_i \leq \left( \int |Q_h(\Xi_h^{-1}(i))^{-1} \sum_{k \in I_m^h(M, N-h)} a_{k+h} a_k (g_k + g_k')|^2 d\mathbb{P}_{g,g'} \right)^{1/2}.
$$

On développe, on utilise les propriétés d'indépendance, on détermine l'inégalité suivante :

$$
\sigma_i \leq Q_h(\Xi_h^{-1}(i))^{-1} \left( \sum_{k \in I_m^h(M, N-h)} |a_{k+h} a_k|^2 \right)^{1/2}.
$$

On peut majorer $\Xi_h(l, N, M)$ par $4l^2 N^4$, ce qui nous permet de prouver que $\sigma_i \sqrt{\log(|i|)} = \mathcal{O}(1)$. En effet,

$$
\sqrt{\log(|i|)} Q_h(\Xi_h^{-1}(i))^{-1} \left( \sum_{k \in I_m^h(M, N-h)} |a_{k+h} a_k|^2 \right)^{1/2} \leq \sqrt{\frac{\log(4l^2 N^4)}{\log(h+2)\log(N+2)\log(R+2)\log(|l|+2)}}.
$$

On vient donc de prouver, à l'aide de (12), qu'il suffit d'avoir $\mathbb{E}_X \sup_i \mathbb{E}_{g,g'} \sup_{\alpha,l} \left| G(\alpha, \Xi_h^{-1}(i)) \right| < +\infty$, pour avoir $\mathbb{E} \sup_i \sup_{\alpha,l} \left| G(\alpha, \Xi_h^{-1}(i)) \right| < +\infty$.

On cherche donc maintenant à montrer que :

$$
\mathbb{E}_X \sup_i \mathbb{E}_{g,g'} \sup_{\alpha,l} \left| G(\alpha, \Xi_h^{-1}(i)) \right| < +\infty.
$$

Pour se faire, on utilise le second théorème 7.2 de l'annexe.

On applique le théorème 7.2 sur $G$, un simple calcul nous permet de déterminer la mesure spectrale $m$ associée à $G$ :

$$Q_h(l,N,M)^{-2}\sum_{k\in I_m^h(M,N-h)}|a_{k+h}a_k|^2\,\delta_{|S_k^h|}.$$

$\sup_{h\geq 1}\sup_{m=1,\cdots,h}\mathbb{E}_X\sup_M\sup_{N-h>M}\mathbb{E}_{g,g'}\sup_{l,\alpha}G(\alpha)$ est finie dès qu'on a

$$\sup_{h\geq 1}\sup_{m=1,\cdots,h}\mathbb{E}_X\sup_M\sup_{N-h>M}Q_h(l,N,M)^{-1}\sqrt{\sum_{k\in I_m^h(M,N-h)}|a_{k+h}a_k|^2\min(2R|l|(S_k^h)^2,1)}<+\infty \tag{13}$$

$$\sup_{h\geq 1}\sup_{m=1,\cdots,h}\mathbb{E}_X\sup_M\sup_{N-h>M}Q_h(l,N,M)^{-1}\int_0^{+\infty}\sqrt{\sum_{k\in I_m^h(M,N-h)}|a_{k+h}a_k|^2\,\mathbf{1}_{\left\{x,|S_k^h|\frac{e^{x^2}}{2R|l|}\right\}}}dx<+\infty. \tag{14}$$

La condition (13) est triviallement satisfaite.
En remarquant que pour tout $k\in I_m^h(M,N-h)$,

$$\{y,|S_k^h|\geq\frac{e^{y^2}}{2R|l|}\}\subset\{y,\sup_{k\in I_m^h(M,N-h)}|S_k^h|\geq\frac{e^{y^2}}{2R|l|}\},$$

(14) devient :

$$\sup_{h\geq 1}\sup_{m=1,\cdots,h}\mathbb{E}_X\sup_M\sup_{N-h>M}Q_h(l,N,M)^{-1}\sqrt{\sum_{k\in I_m^h(M,N-h)}|a_{k+h}a_k|^2\log^+(2R|l|\sup_{k\in I_m^h(M,N-h)}\left|S_k^h\right|)}<+\infty.$$

On utilise la définition de $Q_h(l,N,M)$, pour simplifier cette expression, on en déduit :

$$\sup_{h\geq 1}\sup_{m=1,\cdots,h}\mathbb{E}_X\sup_M\sup_{N-h>M}\sqrt{\frac{\log^+(2R|l|\sup_{M\leq k\leq N-h)}\left|S_k^h\right|)}{\log(h+2)\log(N+2)\log(R+2)\log(|l|+2)}}.$$

Pour finir on majore directement les $\left|S_k^h\right|$ par $h\sup_{i\leq k+h}|X_i|$. Pour montrer que (14) est vraie, il suffit de prouver :

$$\mathbb{E}_X\sup_{M\geq 1}\sup_{N-h>M}\sqrt{\frac{\log^+(2R|l|\sup_{i\leq N}|X_i|)}{\log(N+2)\log(R+2)\log(|l|+2)}}<+\infty.$$

Puis en se servant des propriétés du logarithme, on détermine une nouvelle condition suffisante pour que (14) soit vraie :

$$\mathbb{E}_X\sup_{M\geq 1}\sup_{N-h>M}\sqrt{\frac{\log^+\Big(\sup_{i\leq N}|X_i|\Big)}{\log(N+2)}}<+\infty.$$

Le membre de gauche de l'inégalité précédente est majorée par :

$$\mathbb{E}_X \sup_{N>0} \sqrt{\frac{\log^+\left(\sup_{i\leq N}|X_i|\right)}{\log(N)}} \sup_{M\geq 1} \sup_{N-h>M} \sqrt{\frac{\log(N)}{\log(N+2)}}.$$

Le premier terme : $\mathbb{E}_X \sup_{N>0} \sqrt{\frac{\log^+\left(\sup_{i\leq N}|X_i|\right)}{\log(N)}}$ est fini grce à la condition de moment sur $(X_n)_{n\geq 0}$ : $\exists \rho > 0, \mathbb{E}|X_1|^\rho < +\infty$ (pour plus de détail [**7**]). Le second membre $\sup_{M\geq 1}\sup_{N-h>M}\sqrt{\frac{\log(N)}{\log(N+2)}}$ est majoré par 1.■

## 4. Preuve de la convergence de $\sum_{n\geq 1} a_n f(\alpha S_k(\omega))$

### 4.1. Enoncé du théorème 1.1. —

***Théorème 4.1***. — *Supposons que la suite $(a_n)$ vérifie les hypothèses (6) et (7), que $X_1$ vérifie (2).*

*Alors il existe un ensemble mesurable $\Omega_0$ avec $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ tel que pour tout $f \in A_0(\mathbb{T}, \xi)$, pour tout $\omega \in \Omega_0$ :*

- *Si $X_1$ vérifie (2) et (3), $\xi = \sqrt{\log(|\cdot|+2))}$ : pour tout $\eta > 0$, la série $F(.,\omega)$ converge uniformément sur $\mathbb{R} \setminus [-\eta,\eta]$, et elle est donc continue sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.*

- *Si $X_1$ est discret et vérifie (4), $\xi = |\cdot|^{1+\epsilon}$ : la série $F(.,\omega)$ converge presque partout sur $\mathbb{R}$. Quand $f$ est un polynôme trigonométrique, pour tout $\frac{1}{2l} > \eta > 0$, $F$ converge uniformément sur les compacts de $]-\frac{1}{2l},\frac{1}{2l}[\setminus]-\eta,\eta($.*

- *Si $X_1$ est discret et vérifie (5), $\xi = |\cdot|^{1+\epsilon}$ : la série $F(.,\omega)$ converge converge sur les rationnels, sur les irrationnels algébriques et sur $\mathcal{I}$.. Quand $f$ est un polynôme trigonométrique, pour tout $\eta > 0$, $F$ converge uniformément sur $\mathbb{R}\setminus[-\eta,\eta]$.*

### 4.2. Convergence uniforme dans le cas discret. —

On commence par étudier la convergence uniforme des polynômes trigonométriques sur les compacts de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ dans les cas discret. En majorant $I_{1,2}$, on obtient :

$$I_{1,2} \leq 2\frac{(N-M+H)(N-M)}{(H+1)(N-M-H)} \sum_{k=M}^{N-h-1} |a_k|^2 \sum_{h=1}^{H} |\phi_{X_1}(l\alpha)|.$$

Pour le cas péridodique, on prend $K$ un compact contenu dans $]-\frac{T}{2},\frac{T}{2}[\setminus\{0\}$, sur ce compact, la fonction caractéristique n'est jamais égalle à 1, on a donc :

$$I_{1,2} \leq 2l\frac{(N-M+H)(N-M)}{(H+1)(N-M-H)}\sum_{k=M}^{N-h-1}|a_k|^2\sup_{\alpha\in K}\frac{1}{1-|\phi_{X_1}(l\alpha)|}$$

On en déduit une majoration de $I_{1,2}$ indépendamment de $\alpha$.

Pour le cas apériodique, on a l'inégalité suivante :

$$I_{1,2} \leq 2\frac{(N-M+H)(N-M)}{(H+1)(N-M-H)}\sum_{k=M}^{N-1}|a_k|^2\frac{1}{1-|\phi_{X_1}(l\alpha)|^2}.$$

$1-|\phi_{X_1}(l\alpha)|^2 = \sum_{n\geq 0}p_n\sin^2(\pi y_n l\alpha)$ est nul si et seulement si pour tout $n\geq 0$, $y_n l\alpha\in\mathbb{Z}$, c'est à dire si $\alpha\in\bigcap_{n\geq 0}\frac{1}{ly_n}\mathbb{Z}$. Comme $X_1$ prend une valeur rationnelle non nulle et une valeur irrationnelle,on en déduit que $1-|\phi_{X_1}(l\alpha)|^2$ n'est nul qu'en $\alpha=0$. Pour tous $\alpha$ appartenant à un compact K de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, on majore $\frac{1}{1-|\phi_{X_1}(l\alpha)|^2}$ par $\sup_{\alpha\in K}\frac{1}{1-|\phi_{X_1}(l\alpha)|^2}$ qui est non nul. On détermine donc l'inégalité suivante :

$$I_{1,2} \leq K_{X_1}\frac{(N-M+H)(N-M)}{(H+1)(N-M-H)}\sum_{k=M}^{N-1}|a_k|^2$$

où $K_{X_1}$ est une constante ne dépendant que de $X_1$.

On obtient au final, une majoration d'un polynôme trigonométrique qui ne dépend pas de $\alpha$

**4.3. Convergence de la série.** — La démonstration de la convergence de la série se fait de la même manière dans les trois cas. On montre que la série converge en faisant de la sommation par paquets et en contrôlant les oscillations du reste de la fonction. En effet soit $N\geq 1$ un entier, on a l'égalité suivante :

$$\sum_{k=1}^{N}a_k e^{2i\pi S_k} = \sum_{k=1}^{2^{N_0}}a_k e^{2i\pi S_k} + \sum_{k=2^{N_0}+1}^{N}a_k e^{2i\pi S_k}$$

où $N_0$ est l'entier tel que $2^{N_0}\leq N<2^{N_0+1}$. Il suffit, pour avoir la convergence de $F$, de montrer qu'on a la convergence en sommant par paquets de $2^N$ et contrôler le reste. Le reste est borné si

$$\sup_{2^N+1\leq i<2^{N+1}}\left|\sum_{k=2^N+1}^{i}\frac{1}{k^\beta}e^{2i\pi S_k}\right| < +\infty$$

(dans le cas où $a_k=\frac{1}{k^\beta}$). Pour prouver que cette quantité est majorée, il suffit d'utiliser les théorèmes 2.1, 2.3 avec $M=2^{N_0}, H=(N-2^{N_0})^\gamma$ et $1>\gamma>2(1-\beta)$.

Soient $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite croissante d'entiers naturels, notons

$$p_k(\alpha) = \sum_{j=N_k}^{N_{k+1}-1} a_j e^{2i\pi\alpha S_j(\omega)}.$$

Il suffit, pour obtenir le théorème 1.1, dans le cas continu de montrer qu'étant donné $K_R$ un compact de $\mathbb{R}$ tel que $0 \notin K_R$,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sup_{\alpha\in K_r} |p_k(\alpha)| < +\infty. \tag{15}$$

Dans le cas discret, il suffit de montrer que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |p_k(\alpha)| < +\infty,$$

On prend ensuite les majorations obtenus dans les théorèmes 2.2, 2.3 et les majorations obtenus précédemment pour la convergence uniforme des polynômes trigonométriques dans le cas discret. Puis on va obtenir, en faisant des sommations par paquets, des conditions sur la suite $(a_k)_{k\geq 0}$.

On détermine les conditions dans le cas (2), (3) car dans le cas discret, les majorations obtenues dans les théorèmes 2.2, 2.3 ne différent que d'un terme, terme qui disparat quand on prend un $\alpha$ non nul. Montrons que l'inégalité (15) est vraie. On applique le théorème 2 avec $N = 2^{k+1}$ et $M = 2^k$. En remplaant $N$ et $M$ dans l'inégalité, les conditions obtenues pour la convergence de la série sont :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{2^k}{H_k} \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}} |a_i|^2} < +\infty$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt{H_k \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}} |a_i|^2} < +\infty$$

$$\exists \epsilon > 0, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} H_k^{(1+\epsilon)/2} \sqrt{2^k k} \left( \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}} |a_i|^4 \right)^{1/4} < +\infty.$$

On choisit de prendre $H_k = 2^{k\gamma}$ où $\gamma \in ]0,1[$ les conditions deviennent :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{k(1-\gamma)/2} \sqrt{\sum_{i=2^k}^{2^{k+1}} |a_i|^2} < +\infty$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{k\gamma/2} \sqrt{\sum_{i=2^k}^{2^{k+1}} |a_i|^2} < +\infty$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{k(1+\gamma+\gamma\epsilon)/2}\sqrt{k}\left(\sum_{i=2^k}^{2^{k+1}} |a_i|^4\right)^{1/4} < +\infty.$$

(Dans la suite, on note $\epsilon$ au lieu de $\epsilon/2$.) Puis on utilise l'équivalent suivant :

$$2^{k(1-\gamma)/2} \approx \sum_{l=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{l^{(1+\gamma)/2}}$$

qui est obtenu en comparant série et intégrale, d'où

$$\begin{aligned} 2^{k(1-\gamma)/2}\sqrt{\sum_{i=2^k}^{2^{k+1}} |a_i|^2} &\leq C\sum_{l=2^k}^{2^{k+1}-1} l^{-(1+\gamma)/2}\sqrt{\sum_{i=2^k}^{2^{k+1}} |a_i|^2} \\ &\leq C\sum_{l=2^k}^{2^{k+1}-1} l^{-(1+\gamma)/2}\sqrt{\sum_{i\geq 2^{\left[\frac{\log l}{\log 2}\right]}} |a_i|^2} \end{aligned}$$

où $[.]$ désigne la partie entière. Puis en sommant sur k, il en découle :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{k(1-\gamma)/2}\sqrt{\sum_{i=2^k}^{2^{k+1}} |a_i|^2} \leq C\sum_{n\geq 2} n^{-(1+\gamma)/2}\sqrt{\sum_{i\geq 2^{\left[\frac{\log l}{\log 2}\right]}} |a_i|^2}.$$

La seconde condition devient de la même faon :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{k\gamma/2}\sqrt{\sum_{i=2^k}^{2^{k+1}} |a_i|^2} \leq C\sum_{n\geq 2} n^{-1+\gamma/2}\sqrt{\sum_{i\geq 2^{\left[\frac{\log l}{\log 2}\right]}} |a_i|^2}$$

Pour la dernière condition, on a

$$2^{k(1+\gamma+\gamma\epsilon)/2}\sqrt{k} \approx \sum_{l=2^k}^{2^{k+1}-1} l^{(\gamma+\gamma\epsilon-1)/2}\left(\frac{1+\gamma+\gamma\epsilon}{2}\sqrt{\ln(l)} + \frac{1}{2\sqrt{\ln(l)}}\right)$$

d'où

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{k(1+\gamma+\gamma\epsilon)/2}\sqrt{k}\left(\sum_{i=2^k}^{2^{k+1}} |a_i|^4\right)^{1/4} \leq C\sum_{n\geq 2} n^{(\gamma+\gamma\epsilon-1)/2}\sqrt{\ln(n)}\left(\sum_{i\geq 2^{\left[\frac{\log l}{\log 2}\right]}} |a_i|^4\right)^{1/4}$$

Les deux premières conditions sont symétriques en $\gamma$ par rapport à $1/2$. En étudiant la dernière condition, on s'aperoit qu'il faut prendre un $\gamma$ le plus petit possible. Les conditions sont donc :

$$\sum_{n\geq 2} \sqrt{\frac{\sum_{i\geq 2^{\left[\frac{\log l}{\log 2}\right]}} |a_i|^2}{n^{1+\gamma}}} < +\infty$$

et

$$\sum_{n\geq 2} n^{(\gamma+\gamma\epsilon-1)/2} \sqrt{\ln(n)} \left( \sum_{i\geq 2^{\left[\frac{\log l}{\log 2}\right]}} |a_i|^4 \right)^{1/4} < +\infty. \qquad \blacksquare$$

Soit $a_k = \frac{1}{k^\delta}$, avec $\delta < 1$, montrons que $\frac{7}{8}$ est la valeur inférieure. on obtient alors trois conditions sur $\delta$ :

$$\begin{aligned} \delta &> 1 - \frac{\gamma}{2} \\ \delta &> \frac{1+\gamma}{2} \\ \delta &> \frac{3}{4} + \gamma\frac{1+\epsilon}{2} \end{aligned}$$

Comme $\delta < 1$, on en déduit par la troisième condition que $\gamma < 1/(2(1+\epsilon)) = \gamma_0$. Prenons $\gamma = \gamma_0 - \eta$ (où $\eta$ est un réel strictement positif proche de zéro). Les trois conditions sont alors :

$$\delta > 1 - \frac{\gamma_0}{2} + \frac{\eta}{2} \tag{16}$$

$$\delta > \frac{1+\gamma_0}{2} - \frac{\eta}{2} \tag{17}$$

$$\delta > 1 - \eta\frac{1+\epsilon}{2}. \tag{18}$$

On observe que (17) est une conséquence de (16). On cherche le plus petit $\delta$ qui convient, pour cela on optimise les deux équations (16) et (18). Elles sont identiques quand $\eta = \frac{1}{2(1+\epsilon)(2+\epsilon)}$. Avec cette valeur, on obtient :

$$\delta > \frac{7+4\epsilon}{8+4\epsilon},$$

c'est à dire que $\delta > \frac{7}{8}$ convient.

## 5. En dimension supérieure

Tous les résultats énoncés peuvent se prolonger en dimension supérieure : pour $\alpha \in \mathbb{R}^d$ et pour des vecteurs aléatoires $(X_k)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Précisons un peu plus les choses : soit $(X_k)$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ dont les coordonnées sont indépendantes entre elles, et $(S_k)_{k\geq 1}$ la marche aléatoire associée. On note $<\cdot,\cdot>$ le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^d$. On étudie donc la continuité de série du type :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n f(<\alpha, S_k>).$$

Le seul point de démonstration qui différe avec ce qui a été fait précédemment est la majoration de $I_2$. La différence se trouve quand on veut majorer le terme : $\mathbb{E}_X \sup_i \mathbb{E}_{g,g'} \sup_{\alpha,l} \left|G(\alpha, \Xi_h^{-1}(i), \omega_g)\right|$. On ne peut plus appliquer directement le théorème 7.2 car ce théorème s'applique avec $\alpha \in \mathbb{R}$. On utilise alors un théorème obtenu par Fernique dans [**2**] qui permet de se ramener en dimension 1.

***Théorème 5.1***. — *Soient $T$ un ensemble fini de cardinal $n$, $X$ et $Y$ deux vecteurs gaussiens à valeurs dans $\mathbb{R}^T$, $d_X$ et $d_Y$ les écarts associés (par exemple $d_Y(s,t) = \sqrt{\mathbb{E}\left|Y(s) - Y(t)\right|^2}$, pour $s$ et $t$ deux éléments de $T$). Supposons que :*

$$\forall (s,t) \in T^2, d_Y(s,t) \leq d_X(s,t).$$

*On a alors*

$$\mathbb{E} \sup_{t\in T} Y(t) \leq \mathbb{E} \sup_{t\in T} X(t).$$

Par stationnarité de G, on a l'inégalité :

$$d_G(s,t) \leq \sqrt{d}\sqrt{\sum_{j=1}^{d}\left((d_G^{(j)}(s_j,t_j)\right)^2}$$

où $d_G^{(j)}(s_j,t_j)$ désigne la distance hilbertienne déterminant la loi de la fonction aléatoire gaussienne $G^{(j)}(\alpha^{(j)}, N, M, \omega_g, \omega_{g'})$ est égale à

$$Q_h(l,N,M)^{-1} \sum_{k\in I_m^h(M,N-h)} a_{k+h} a_k \left( g_{(j),k}(\omega_g) \cos(2\pi l \alpha^{(j)} S_k^h(\omega)^{(j)}) + g'_{(j),k}(\omega_{g'}) sin(2\pi l \alpha^{(j)} S_k^h(\omega)^{(j)}) \right)$$

où $g_{(j),k}, g'_{(j),k}$ sont des copies mutuellement indépendantes de $g_k$. En utilisant les lois marginales de dimension 1 et le théorème 5.1, on en déduit des théorèmes de convergence sur la série $F$ identique à ceux vu précédemment.

## 6. Cas où la marche aléatoire est non homogéne dans le temps

Soit $E$ un compact métrisable, $T : E \to X$ une application continue. $T$ est uniquement ergodique si et seulement si il existe une unique mesure $\mu$ invariante telle que pour toute application continue $f : E \to \mathbb{C}$,

$$\sup_x \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(T^k x) - \int f d\mu \right| \to 0.$$

Pour plus de détails sur l'unique ergodicité, on peut consulter [**8**].

On peut comparer cette propriété au théorème de Birkhoff qui s'énonce de la faon suivante : Soit $g \in L^1(E, \beta, \mu)$, si la mesure est $T$-invariante ( c'est à dire pour tout $B \in \mathfrak{B}, \mu(B) = \mu(T^{-1}B)$), alors

$$\mu \left\{ x \in E, \lim_{n \to +\infty} |\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g(T^i x) - \mathbb{E}(g|I)| = 0 \right\} = 1.$$

On a un exemple de sytème dynamique uniquement ergodique (voir [**5**]). Notons $\mathbb{T}^1$ le tore $\beta(\mathbb{T}^1)$ sa tribu, $\lambda$ la mesure de Lebesque sur le tore. Soit $T_\alpha$ est une rotation irrationnelle d'angle $\alpha$ sur cet espace alors $T$ est uniquement ergodique.

Soit $g$ une fonction continue de $E$ dans $]0, 1[$. On définit, sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P})$, une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_k)_{k \geq 1}$ de la faon suivante : soit $x \in E$, pour tout $k \geq 1$,

$$\mathbb{P}(X_k = 1) = g(T^k x) = 1 - \mathbb{P}(X_k = -1).$$

***Théorème 6.1***. — *Pour presque tout $\omega \in \Omega$, pour tout $\epsilon > 0$, pour tout $f \in A_0(\mathbb{T}, |\cdot|^{1+\epsilon})$ de norme 1, pour Lebesgue presque tout $\alpha \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, pour tout $\sigma$ rationnel strictement positif, il existe une constante $K_\sigma > 0$ telle que*

$$\left| \sum_{k=M}^{N-1} a_k f(\alpha S_k(\omega)) \right|^2 \leq K_g \left[ \frac{N - M + H}{H + 1} \sum_{k=M}^{N-1} |a_k|^2 \right.$$
$$\left. + K_\sigma N H^{\sigma+1} log(N) \sqrt{\sum_{k=M}^{N-1} |a_k|^4} \right]$$

*où le $K_g$ est constante dépendant uniquement de $g$.*

*Preuve* : La différence par rapport à la démonstration du théorème 2.1 se trouve dans la majoration de $I_1$. On rappelle que $I_1$ vaut :

$$2 \frac{N - M + H}{(H + 1)^2} \sum_{h=1}^{H} (H + 1 - h) \sum_{k=M}^{N-h-1} \Re \left( a_{k+h} a_k \int_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \phi_{S_k^h}(l\alpha) d\nu(\alpha) \right)$$

où la mesure $\nu$ est la mesure de Dirac en un point non nul. Notons $\Delta$ la fonction définie de la manière suivante : $\Delta : x \mapsto 4x(1 - x)$, cette fonction envoie tout élément de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$. Par l'indépendance des $(X_k)_{k \geq 1}$, on a $\phi_{S_k^h}(l\alpha) = \prod_{i=0}^{k} \phi_{X_{k+i}}(l\alpha)$. Comme $|\phi_{X_{k+i}}(l\alpha)|^2$ est égal à $(1 - \Delta(p_{k+i}) \sin^2(2\pi l\alpha))$ (où $p_k = \mu(X_k = 1)$), on en déduit que

$$\phi_{S_k^h}(l\alpha) = \exp \left[ \sum_{i=k}^{k+h} \log \left( (1 - \Delta(p_i) \sin^2(2\pi l\alpha)) \right) \right].$$

Ce qui donne en majorant le log :

$$\phi_{S_k^h}(l\alpha) \leq \exp\Big[-\sum_{i=k}^{k+h} \Delta(p_i)\sin^2(2\pi l\alpha)\Big].$$

On fait apparatre dans l'exponentielle précédente : $(h+1)\int \log\Big(1 - \Delta(g(y))\sin^2(2\pi l\alpha)\Big)d\mu(y)$, en l'ajoutant et le retranchant, puis on utilise l'hypothèse d'unique ergodicité :

$$\Big|\sum_{i=0}^{h} \log\Big((1-\Delta(g(T^{i+k}y))^2\sin^2(2\pi l\alpha))\Big) \\ -(h+1)\int \log\Big(1-\Delta(g(y))\sin^2(2\pi l\alpha)\Big)d\mu(y)\Big| = o(h),$$

de plus le $o$ ne dépend pas de $k$ car la convergence est uniforme. On en déduit qu'il existe une constante $K >, 0$ telle que

$$\phi_{S_k^h}(l\alpha) \leq K\exp\Big(-(h+1)\int \Delta(g(y))d\mu(y)\sin^2(2\pi l\alpha)\Big),$$

puis en faisant la somme, on trouve :

$$\sum_{h=1}^{H}(H+1-h)\phi_{S_k^h}(l\alpha) \leq 8H\Big[1-\exp\Big(-\int \Delta(g(y))d\mu(y)sin^2(2\pi l\alpha)\Big)\Big]^{-1}.$$

Notons $\{x\}$ la distance entre $x$ et le plus proche entier. Comme pour tout $x$ réel, on a $\sin^2(2\pi l\alpha) = \sin^2(\pi\{2l\alpha\})$ on trouve :

$$\Big(1-\exp-\int \Delta(g(y))d\mu(y)\sin^2(2\pi l\alpha)\Big)^{-1} = \Big(1-\exp-\int \Delta(g(y))d\mu(y)\sin^2(\pi\{2l\alpha\})\Big)^{-1}.$$

Comme

$$\Big[1-\exp\Big(-\int \Delta(g(y))d\mu(y)\sin^2(x)\Big)\Big]^{-1} \sim_{x\to 0} \frac{1}{x^2\int \Delta(g(y))d\mu(y)},$$

on en déduit que

$$\Big(1-\exp-\int \Delta(g(y))d\mu(y)\sin^2(2\pi l\alpha)\Big)^{-1} \leq K\frac{H}{\{l\alpha\}^2},$$

où K est une constante dépendant de $g$. D'après le théorème de Thue-Siegel-Roth, pour presque tout $\alpha$, on a pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante

$c(\alpha,\epsilon) > 0$ tel que

$$\{l\alpha\} \geq \frac{c(\alpha,\epsilon)}{l^{1+\epsilon}}.$$

On en déduit donc que $\alpha$-presque partout suivant la mesure de Lebesgue :

$$\sum_{h=1}^{H}(H+1-h)\phi_{S_k^h}(l\alpha) \leq c^{-1}(\alpha,\epsilon)H|l|^{2+2\epsilon}.$$

Ce qui permet de majorer $I_1$ par

$$2|l|^{2+2\epsilon}\frac{N-M+H}{H+1}\sum_{k=M}^{N-1}|a_k|^2.\blacksquare$$

Avec les variables aléatoires défines au début du paragraphe et avec le système dynamique uniquement ergodique, on obtient le théorème suivant :

***Théorème 6.2***. — *Soit $\beta > 7/8$, et la suite $(a_k)_k$ de terme général $1/k^{\beta}$. Alors il existe un ensemble mesurable $\Omega_0$ avec $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ tel que pour tout $f \in A_0(\mathbb{T}, |\cdot|^{1+\epsilon})$, pour tout $\omega \in \Omega_0$, $F(\cdot,\omega)$ converge presque partout sur $\mathbb{R}$.*

## 7. Annexe

**7.1. Le théorème de Thue-Siegel-Roth.** — Introduisons tout d'abord la définition du type diophantien d'un nombre irrationnel. Un irrationnel $x$ est dit de type diophantien $\eta$ si pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante $C(x,\epsilon)$, pour tout $h \in \mathbb{N}$,

$$\{hx\} \geq \frac{C(x,\epsilon)}{h^{\eta+\epsilon}}$$

où $\{\cdot\}$ est la distance au plus proche entier. Le théorème de Thue-Siegel-Roth (voir [**1**] pour plus de détail) nous donne le résultat suivant : presque tout $x \in \mathbb{R}$ est de type diophantien 1, et qu'en particulier les irrationnels algébriques sont de type 1.

L'ensemble des réels de type 1 (noté $I$) est presque partout égal à $\mathbb{R}$, alors pour tout $q > 0$, l'ensemble $qI$ est aussi presque partout égal à $\mathbb{R}$. Pour démontrer ce point, il suffit de considérer la mesure $\mu$ définie de la faon suivante : pour tout ensemble $C$ borélien,

$$\mu(C) = \frac{\lambda(qC)}{q}$$

où $\lambda$ est la mesure de Lebesgue. Cette mesure positive $\mu$ est invariante par translation et $\mu([0,1]) = 1$ donc $\mu$ est égal à $\lambda$. Comme $\complement qI = q\complement I$, on en déduit que $\lambda(\complement qI) = \lambda(q\complement I) = q\lambda(\complement I)$. La mesure du complémentaire de $I$ est nulle, on en déduit donc que la mesure du complémentaire de $qI$ est elle aussi nulle, c'est à dire que $qI$ est égal à $\mathbb{R}$ presque partout.

L'ensemble $\mathcal{I} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k} I$ est de mesure pleine : notons $\lambda$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, on a alors :

$$\lambda(\complement\mathcal{I}) = \lambda(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \complement\frac{1}{k}I) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda(\complement\frac{1}{k}I) = 0.,$$

puisque $\frac{1}{k}I$ est de mesure pleine. Cet ensemble $\mathcal{I}$ contient les irrationnels algébriques.

Dans le cas où la variable aléatoire est discrète et $|\phi_{X_1}|$ est apériodique, $X_1$ prend une valeur rationnelle non nulle $y_0$ et une valeur irrationnelle $y_1$ appartenant à $\mathcal{I}$.

**7.2. Les théorèmes de Fernique.** — Dans la démonstration des théorèmes 2.1, 2.2, 2.3, on a utilisé deux théorèmes de Fernique, qui se trouve dans [**3**] et [**4**], dont voici les énoncés :

***Théorème 7.1.*** — *Soit $(G_k)_{k\geq 1}$ une suite de vecteurs gaussiens à valeurs dans un espace de Banach $(B, \|.\|)$, alors :*

$$\mathbb{E}\sup_{k\in\mathbb{N}} \|G_k\| \leq K \left( \sup_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\,\|G_k\| + \mathbb{E}\sup_{k\in\mathbb{N}} |\lambda_k\sigma_k| \right),$$

*où $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ est une suite isonormale et $K$ une constante universelle, et pour tout $k \in \mathbb{N}$,*

$$\sigma_k = \sup_{f\in B', \|f\|\leq 1} \|\langle G_k, f\rangle\|_2 .$$

Ce théorème est remarquable, dans le sens où il permet de majorer $\mathbb{E}\sup$ par $\sup\mathbb{E}$.

[**4**]

***Théorème 7.2.*** — *Soit $g$ une fonction aléatoire gaussienne à valeurs réelles, stationnaire, séparable et continue en moyenne quadratique. Notons $m$ sa mesure spectrale associée sur $\mathbb{R}^+$ telle que*

$$\mathbb{E}\left(|g(s) - g(t)|^2\right) = 2\int_0^{+\infty} 1 - \cos(2\pi u(s-t))dm(u),$$

*alors il existe une constante $K$ telle que :*

$$\mathbb{E}\sup_{\alpha\in[-R,R]} g(\alpha) \leq K\left( \sqrt{\int_0^{+\infty} \min(2Ru^2, 1)dm(u)} + \int_0^{+\infty} \sqrt{m\left(\left]\frac{e^{x^2}}{2R}, +\infty\right[\right)}dx \right).$$

## Références


[1] M. Drmota et R.F. Tichy Sequences, Discrepancies and Applications, Series : Lecture Notes in Mathematics , Vol. 1651 1997, X

[2] X. Fernique, Régularité de trajectoires de fonctions aléatoires gaussiennes, Lect. Note, **480** 1-97, (1974).

[3] X. Fernique, Une majoration des fonctions aléatoires gaussiennes à valeurs vectorielles, C. R. Acad. Sci. Paris, **300** 315-318 (1985).

[4] X. Fernique, Régularité de fonctions aléatoires gaussiennes stationnaires, Proba. Th. Rel. Fields, **88**, 521-536 (1991).

[5] N. Guillotin et D. Schneider, Ergodic theorems for dynamic random walks, Mathematical Inequalities and Application.

[6] R. Salem, A. Zygmund, Some properties of trigonometric series whose terms have random signs. Acta Math. **91**, 245-301 (1954).

[7] D. Schneider, Théorèmes ergodiques perturbées, Israel J. Math. **101** 157-178 (1997).

[8] P. Walters, An introduction to ergodic theory Graduate Texts in Mathematics, 79. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.


---

THOMAS LANGLET & DOMINIQUE SCHNEIDER