Calcul numérique

Feuille 1 : Interpolation polynômiale

Exercice 1

1. On considère le polynôme P défini par $P(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x$.
   a) Calculer $P(1)$, $P'(1)$ et $P''(1)$.
   b) Trouver toutes les racines de P.
   c) Factoriser P.
2. On considère les 3 ploynômes suivants : $P_0(x) = 3, \quad P_1(x) = x - 2, \quad$ et $\quad P_2(x) = (x-1)^2$.
   a) Montrer que la famille $\mathscr{B}$ constituée des 3 polynômes P_0, P_1 et P_2 est une base de $\mathscr{P}_2$.
   b) Exprimer chaque élément de la base canonique $\mathscr{B}_c = \{1, x, x^2\}$ de $\mathscr{P}_2$ dans cette base $\mathscr{B}$.

Exercice 2

On a $t_0 = 1$, $t_1 = 2$, $t_2 = 3$, $f(t_0) = 1$, $f(t_1) = 3$ et $f(t_2) = 4$.

1. Écrire le polynôme P_0 de degré 0 qui interpole f en t_0.
2. Écrire le polynôme P_1 de degré 1 qui interpole f en t_0, t_1.
3. Écrire le polynôme P_2 de degré 2 qui interpole f en t_0, t_1, t_2.

Exercice 3

Soit f la fonction polynômiale donnée par $f(x) = x^3$ et définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère le support $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ et $x_3 = 2$. On note P_i le polynôme de $\mathscr{P}_i$ qui interpole f sur le support $\{x_0, \ldots, x_i\}$.

1. Calculer P_1, P_2 et P_3. Les écrire dans la base canonique de $\mathscr{P}^3$.
2. Donner puis tracer les polynômes $L_i(x)$ formant les éléments de la base de Lagrange associée au support $\{x_0, \ldots, x_3\}$.
3. Ecrire P_1, P_2 et P_3 dans la base de Lagrange.

Exercice 4

Déterminer le polynôme de degré 2 qui passe par les points $M_0(1,3)$, $M_1(2,5)$ et $M_2(3,-1)$

- ▷ dans la base canonique
- ▷ dans la base de Lagrange
- ▷ dans la base de Newton

Exercice 5

Soit le polynôme $P(x) = 1 - x + x^2$.

1. Décomposer P dans la base de Lagrange relative aux points : $x_0 = -1$, $x_1 = 2$ et $x_2 = 3$.
2. Même question, par rapport à la base de Newton.

Exercice 6

On considère la fonction intégrale, $I(k) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1 - \sin^2 k \sin^2 x)^{1/2}}\, dx$. Donner une valeur approchée de $I(7/2)$ sachant que

$$I(1) = 1{,}5709\,, \qquad I(4) = 1{,}5727 \quad \text{et} \quad I(6) = 1{,}5751\,,$$

1. en utilisant la formule d'interpolation de Lagrange,

2. en utilisant la formule de Newton.

Exercice 7

On considère une fonction $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$. Soit p le polynôme de degré 1 qui interpole f sur le support $\{x_0, x_1\} \subset [-1,1]$. On rappelle que l'erreur d'interpolation est donnée par :

$$e_n(x) := f(x) - P_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}\Big(\prod_{j=0}^{n}(x - x_j)\Big) f^{(n+1)}(\xi_x)$$

1. Étudier la fonction $x \mapsto (x-1)(x+1)$ pour $x \in [-1,1]$.
2. Même question pour la fonction $x \mapsto (x - \frac{\sqrt{2}}{2})(x + \frac{\sqrt{2}}{2})$.
3. Pour réaliser une interpolation numérique de la fonction f, quel points support $\{x_0, x_1\}$ est-il préférable de choisir : $\{x_0, x_1\} = \{-1, 1\}$ ou $\{x_0, x_1\} = \{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\}$? Justifier.
4. Déterminer le polynôme d'interpolation de degré 1 de $x \mapsto x^3$ qui interpole f sur $\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\}$ et donner une majoration de l'erreur pour tout $x \in [-1,1]$.
5. Pour une interpolation à trois points, que choisir parmi les supports suivant :

$$\{-1, 0, 1\}, \qquad \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}, \qquad \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}.$$