Analyse numérique

Chapitre 2 : Formules de quadrature

Exercice 1

On lance une fusée verticalement du sol et l'on mesure son accélération γ durant les 80 premières secondes. On obtient

t (en s)	0	10	20	30	40	50	60	70	80
γ (en m/s^2)	30	31.63	33.44	35.47	37.75	40.33	43.29	46.70	50.67

Calculer la vitesse V de la fusée à l'instant $t = 80s$ à l'aide de la méthode des trapèzes puis de Simpson.

Exercice 2

Soit la formule de quadrature :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = A_0 f\Big(-\frac{1}{2}\Big) + A_1 f(0) + A_2 f\Big(\frac{1}{2}\Big) + E(f)\ .$$

Calculer A_0, A_1 et A_2 pour que cette formule de quadrature soit exacte sur l'espace des polynômes de degré le plus élevé possible.

Exercice 3

1. Soit $g \in \mathscr{C}^4([-1,1])$. Calculer A_0, A_1, x_0, x_1 et K pour que la formule de quadrature suivante soit exacte sur l'espace des polynômes de degré le plus élevé possible.

$$\int_{-1}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t = A_0 g(x_0) + A_1 g(x_1) + K g^{(4)}(\tau)\ , \qquad \tau \in]-1,1[$$

On considère un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et $x_i = a + ih$, $i \in \{0,\dots,N\}$, $h = \frac{b-a}{N}$ et $f \in \mathscr{C}^4([a,b])$.

2. Effectuer un changement de variable pour ramener $[x_i, x_{i+1}]$ à $[-1,1]$ puis appliquer la formule de quadrature précédente.
3. En déduire la formule composite associée à la formule précedente pour approcher l'intégrale de f sur $[a,b]$.

Exercice 4

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1([-1,1])$ et p le polynôme interpolateur d'Hermite (de degré ≤ 3) de f vérifiant

$$p(-1) = f(-1), \qquad p'(-1) = f'(-1), \qquad p(1) = f(1) \quad \text{et} \quad p'(1) = f'(1)\ .$$

On rappelle qu'un tel polynôme peut s'écrire sous la forme

$$p(x) = \sum_{i=0}^{1} f(x_1)\,A_i(x) + \sum_{i=0}^{1} f'(x_1)\,B_i(x).$$

Avec pour tout $i \in \{0,\dots,1\}$ et $x \in \mathbb{R}$

$$A_i(x) = \Big(1 - 2(x - x_i)L_i'(x_i)\Big)\Big(L_i(x)\Big)^2 \qquad \text{et} \qquad B_i(x) = (x - x_i)\Big(L_i(x)\Big)^2.$$

1. Écrire le polynôme p.

2. En déduire la méthode d'intégration numérique élémentaire

$$\int_{-1}^{1} f(s)\,ds \simeq f(-1) + f(1) + \frac{1}{3}\Big(f'(-1) - f'(1)\Big)\,.$$

3. Connaissant la formule sur $[-1;1]$, en déduire la formule de quadrature (dite des trapèzes-Hermite) sur un intervale $[a,b]$, on pourra utiliser le changement de variable $y = a + (x+1)\frac{b-a}{2}$.
4. En déduire une extension composite de cette formule sur une discrétisation à n points d'un intervale $[a,b]$.
5. Ecrire l'algorithme d'une fonction calculant numériquement l'approximation de l'intégrale

$$I = \int_a^b f(x)\,dx\,,$$

en utilisant la méthode des trapèzes-Hermite composite à n points (vous pouvez utiliser le langage de votre choix).

6. On considère la fonction $f :]0,1] \to \mathbb{R}^+$ définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

   a) Calculer la valeur de

   $$I := \int_0^1 f(x)\,dx\,.$$

   b) Peut-on utiliser la méthode des trapèzes-Hermite composite pour l'approximation de I ?