Analyse numérique

Recherche de zéros de fonctions réelles

Exercice 1 Déterminer la suite des premiers 3 itérés des méthodes de dichotomie dans l'intervalle $[1,3]$ et de Newton avec $x_0 = 2$ pour l'approximation du zéro de la fonction $f(x) = x^2 - 2$. Combien de pas de dichotomie doit-on effectuer pour améliorer d'un ordre de grandeur la précision de l'approximation de la racine ?

Exercice 2 Le but de cet exercice est de calculer la racine cubique d'un nombre positif a. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$g(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\frac{a}{x^2} \qquad a > 0 \quad \text{fixé.}$$

1. Faire l'étude complète de la fonction g.
2. Comparer g à l'identité.
3. Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad x_0 > 0\,.$$

   À l'aide des graphe de g et de l'identité sur $\mathbb{R}_+^*$, dessiner la suite (x_n) sur l'axe des abscisses. Observer graphiquement la convergence.
4. Justifier mathématiquement la convergence observée graphiquement.
5. Calculer l'ordre de convergence de la suite.
6. Écrire l'algorithme défini par la suite (x_n) qui permet de déterminer $\sqrt[3]{a}$ à une précision de 10^{-6}.
7. Expliciter la méthode de Newton pour la recherche du zéro de la fonction f définie par $f(x) = x^3 - a$. Que remarque-t-on ?

Exercice 3 On veut résoudre l'équation $e^{-\alpha x} = x$ avec avec $0 < \alpha < 1$.

1. Vérifier que cette équation admet une unique solution, notée l_α, dans $\mathbb{R}$.
2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = e^{-\alpha x}$. On définit la suite récurrente

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = g(u_n)\,. \end{cases} \tag{1}$$

   On veut montrer que u_n converge vers l_α. Pour cela, comparer d'abord le graphe de g à celui de l'identité et observergraphiquement la convergence, ensuite justifier mathématiquement la convergence observée.
3. Écrire la méthode de Newton pour résoudre l'équation $e^{-\alpha x} = x$ avec avec $0 < \alpha < 1$. Parmi la méthode de Newton et la méthode de point fixe (1), laquelle faut-il préférer vis-à-vis de la vitesse de convergence ?

Exercice 4 Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{(x^2)} - 4x^2$. On se propose de trouver les racines réelles de f.

1. Situer les 4 racines de f (i.e. indiquer 4 intervalles disjoints qui contiennent chacun une et une seule racine).
2. Montrer qu'il y a une racine α comprise entre 0 et 1.
3. Soit la méthode de point fixe
$$\begin{cases} x_{k+1} = \phi(x_k) \\ x_0 \in]0,1[\,, \end{cases} \tag{2}$$
avec ϕ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\phi(x) = \frac{1}{2}\sqrt{e^{(x^2)}}$. Examiner la convergence de cette méthode et en préciser l'ordre de convergence.
4. Écrire la méthode de Newton pour la recherche des zéros de la fonction f.
5. Entre la méthode de Newton et la méthode de point fixe (2), quelle est la plus efficace? Justifier la réponse.