Analyse numérique

Résolution numérique d'EDO

Exercice 1 Soit $T > 0$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. On souhaite implémenter différentes méthodes permettant d'approcher la solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(x) = f\big(x, y(x)\big), & \forall x \in [0, T] \,, \\ y(0) = y_0 \,, \end{cases} \tag{1}$$

Pour cela on considère une discrétisation uniforme de l'intervale $[0, T]$ de pas $h = \frac{T}{N}$ et donnée par $X = (x_0, x_1, \dots, x_N)$ avec $x_{n+1} = x_n + h$.

1. On fixe $a > 0$ et on considère $y_0 = 1$ et $f(x, y) = -ay$ dans le problème (1).
   a) Calculer la solution exacte du problème (1).
   b) En notant u_n l'approximation de $y(x_n)$ en utilisant le schéma d'Euler explicite, déterminer u_{n+1} en fonction de u_n. En déduire que
   $$u_n = (1 - ah)^n \,.$$
   c) Même question avec v_n l'approximation de $y(x_n)$ utilisant le schéma d'Euler implicite. Montrer que
   $$v_n = \frac{1}{(1 + ah)^n} \,.$$
   d) Etudier la convergence des suites u_n et v_n en fonction de a et h. Comparer avec la limite en $+\infty$ de la solution exacte. Que peut-on en déduire sur l'approximation de la solution ?

Exercice 2 Soit $T > 0$. On s'intéresse à l'évolution de la vitesse d'un objet en chute libre et soumis à la force de gravité ainsi qu'à une force de frottement d'amplitude $\alpha > 0$. Le problème peut ce mettre sous la forme du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} v'(t) = -g - \alpha\, v(t), & \forall t > 0 \,, \\ v(0) = 0 \,, \end{cases} \tag{2}$$

où v est la vitesse inconnue et g la constante de gravité.

1. Vérifier que la solution exacte v est donnée par
$$v(t) = \frac{g}{\alpha}\left(e^{-\alpha t} - 1\right).$$
2. Faire l'étude de la fonction v. En déduire sa limite en $+\infty$.

On souhaite maintenant faire l'analyse numérique de cette EDO afin de voir l'impact de différentes méthodes de discrétisations dans cet exemple particulier. On considère une discrétisation uniforme de pas $h > 0$, donnée par $t_n = nh$ pour $n \in \mathbb{N}$.

3. En notant v_n l'approximation de $v(t_n)$ en utilisant le schéma d'Euler explicite, déterminer v_{n+1} en fonction de v_n.
4. Même question avec w_n l'approximation de $v(t_n)$ utilisant le schéma d'Euler implicite.

5. Pour c et β des réels données, on considère la suite (a_n) défini par récurrence par :

$$\begin{cases} a_0 & \text{donné} \\ a_{n+1} = c + \beta\, a_n & n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On rappelle qu'une telle suite est convergente si et seulement si $|\beta| < 1$ et que, dans ce cas, la limite est $\frac{c}{1-\beta}$. En déduire la convergence des suites v_n et w_n en fonction de α et de h. Comparer avec la limite en $+\infty$ de la solution exacte. Que peut-on en déduire sur l'approximation de la solution ?

Exercice 3 On considère le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} y_1'(t) = -y_2(t) & t \in]0, 2\pi[\\ y_2'(t) = y_1(t) & t \in]0, 2\pi[\end{cases} \quad \text{avec} \quad y_1(0) = 1 \quad \text{et} \quad y_2(0) = 0\,. \tag{3}$$

1. On pose $h = \frac{2\pi}{n}$. Montrer que la méthode d'Euler explicite appliquée à (3) conduit calculer les points P_k de coordonnées $y^k = (y_1^k, y_2^k)^T$ tels que $y^{k+1} = A_h y^k$ avec

$$A_h := \begin{pmatrix} 1 & -h \\ h & 1 \end{pmatrix}$$

2. Montrer que $(y_1^{k+1})^2 + (y_2^{k+1})^2 = (1+h^2)\big((y_1^k)^2 + (y_2^k)^2\big)$. En déduire que les coordonnées de P_k vérifient $\|y^k\|^2 = (1+h^2)^k$. Les points P_k sont-ils sur le cercle $\mathscr{C}$?
3. Montrer que la méthode d'Euler implicite conduit calculer les points Q_k dont les coordonnées vérifient $\|y^k\|^2 = \frac{1}{(1+h^2)^k}$.
4. Utiliser la méthode du trapèze pour approcher (3). Les points M_k obtenus se trouvent-ils sur le cercle ?