Examen d'analyse numérique

21/05/2019

Exercice 1.

Le but de cet exercice est de calculer la racine cinquième d'un nombre positif a. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$g(x) = \frac{4}{5}x + \frac{1}{5}\frac{a}{x^4} \qquad a > 0 \quad \text{fixé.}$$

1. Faire l'étude complète de la fonction g (sens de variation, limites, asymptotes).
2. Faire une représentation graphique des fonctions g et $I(x) = x$ (sur le même graphique).
3. Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{R}}$ définie par :

$$\begin{cases} x_{n+1} = g(x_n), \\ x_0 > 0 \quad \text{donné.} \end{cases}$$

   Utiliser les graphes de g et de l'identité pour dessiner approximativement les 3 premiers itérés de la suite (x_n) sur l'axe des abscisses pour $x_0 = 3$.
4. On sait que si la suite $(x_n)_n$ converge, sa limite est un point fixe de g. Montrer que, dans ce cas, cette limite est bien $\sqrt[5]{a}$.
5. Écrire un algorithme définissant la suite $(x_n)_n$ et qui permet de déterminer $\sqrt[5]{a}$ à une précision de ε donnée.
6. Quel est l'ordre de la méthode de point fixe donnée dans la question 3.

Exercice 2.

Soit le polynôme $P(x) = 1 - x + x^2$.

1. Décomposer P dans la base de Lagrange relative aux points : $x_0 = -1$, $x_1 = 2$ et $x_2 = 3$.
2. Même question, par rapport à la base de Newton.

Exercice 3.

Soit $T > 0$. On s'intéresse au problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = f\big(t, y(t)\big), & \forall x \in [0, T] \\ y(0) = y_0 \,, \end{cases} \tag{1}$$

où $f = f(x, y)$ est une fonction régulière et y_0 un réel. On considère de plus une discrétisation uniforme de l'intervalle $[0, T]$, de pas $h = \frac{T}{N}$ avec $N \in \mathbb{R}^*$ fixé, et donnée par $x_n = nh$ pour $n \in \{0, \dots, N\}$.

1. Donner le schéma explicite approchant le problème (1).
2. Écrire une fonction Matlab (ou autre) prennant, entre autre, comme argument d'entrée :
   ▷ la fonction f définissant le problème.
   ▷ le nombre de pas de discrétisation N
   ▷ ...
   et qui renvoie un vecteur y dont chaque composante y_n est une approximation de la solution au point x_n calculée à l'aide de la méthode d'Euler explicite.
3. Donner le schéma du trapèze pour l'approximation numérique du problème (1).
4. Ce schéma est-il explicite ou implicite ?
5. Quelle difficulté rencontre-t-on si l'on souhaite implémenter un schéma implicite dans le cas d'une fonction f générale ?
6. Rappeler la méthode de Newton pour la recherche de zéro d'une fonction donnée.
7. Écrire une fonction Matlab (ou autre) prenant, entre autre, comme argument d'entrée :
   ▷ la fonction f définissant le problème.
   ▷ le nombre de pas de discrétisation N
   ▷ ...
   et qui renvoie un vecteur y dont chaque composante y_n est une approximation de la solution au point x_n calculée à l'aide de la méthode du trapèze. Si la question (3) n'a pas été traitée, implémenter le schéma suivant :

$$\begin{cases} y_0 \text{ donné} \\ y_{n+1} = y_n + h\, f(x_{n+1}, y_{n+1}). \end{cases}$$