# Analyse numérique

Correction examen 2019-2020

## Exercice 1.

1. On introduit la fonction $w$ définie par $w(t) = 9\,e^{-3t} - 6$. On vérifie par le calcul (pas écrit ici) que l'on a bien $w'(t) = -18 - 3w(t)$. On vérifie de plus que $w(0) = 3$. La fonction $w$ vérifie alors l'équation (1).
2. Pas d'astuce particulière pour cette question. En particulier on a $\lim_{t\to+\infty} = -6$.
3. Pour le schéma d'Euler explicite, on a $f(t, v) = -18 - 3\,v$ et
$$v_{n+1} = v_n + h\,f(t_n, v_n) = v_n - 18\,h - 3\,h v_n = -18 + (1 - 3h)\,v_n \qquad \text{for all } n \in \mathbb{N}$$
avec $v_0 = 3$.
4. Pour le schéma d'Euler implicite, on a
$$w_{n+1} = w_n + h\,f(t_{n+1}, w_{n+1}) = w_n - 18\,h - 3\,h w_{n+1} \qquad \text{for all } n \in \mathbb{N}$$
avec $w_0 = 3$. En réorganisant les termes on obtient
$$w_{n+1} = -\frac{18\,h}{1+3h} + \frac{w_n}{1+3h} \qquad \text{for all } n \in \mathbb{N}.$$
5. ▷ Pour le cas explicite on a $c = -18\,h$ et $\beta = 1 - 3\,h$. Or la suite $v_n$ converge si et seulement si $|\beta| < 1$, c'est à dire $-1 < 1 - 3\,h < 1$ et, après quelques calculs, si et seulement si $0 < h < 2/3$. La suite $(v_n)_n$ converge donc si et seulement si $0 < h < 2/3$. Dans ce cas, sa limite est
$$l_1 = \frac{c}{1-\beta} = \frac{-18\,h}{1-(1-3\,h)} = -\frac{18\,h}{3\,h} = -6.$$
▷ Pour le cas implicite on a $c = -\frac{18\,h}{1+3h}$ et $\beta = \frac{1}{1+3h}$. Or la suite $w_n$ converge si et seulement si $|\beta| < 1$, c'est à dire $-1 < \frac{1}{1+3h} < 1$ ce qui est vérifié pour tout $h > 0$. La suite $(w_n)_n$ converge donc sans conditions sur $h$. Dans ce cas, sa limite est
$$l_2 = \frac{c}{1-\beta} = \frac{-\frac{18\,h}{1+3h}}{1-\frac{1}{1+3h}} = -\frac{\frac{18\,h}{1+3h}}{\frac{3h}{1+3h}} = -\frac{18\,h}{3\,h} = -6.$$
Les limites obtenues avec chacun des schémas sont les mêmes que celle de la solution exacte. Ces schémas approchent donc correctement la solution exacte lorsque $t$ est grand lorsque $h < 2/3$ pour le schéma explicite et sans condition pour l'autre.
6. On intègre l'équation (2) sur $[t_n, t_{n+1}]$ : $\int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t)\,dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))\,dt$. Or
$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t)\,dt = y(t_{n+1}) - y(t_n) \quad \text{et} \quad \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t))\,dt \simeq \frac{h}{2}\big(f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))\big).$$
où la dernière égalité est obtenue en utilisant la formule de quadrature des trapèzes. On en déduit :
$$y(t_{n+1}) \simeq y(t_n) + \frac{h}{2}\big(f(t_n, y(t_n)) + f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))\big).$$
Le schéma du trapèze est alors donné par
$$\begin{cases} y_0 \text{ donné} \\ y_{n+1} \simeq y_n + \frac{h}{2}\big(f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1})\big) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

7. Ce schéma est implicite car $y_{n+1}$ ne peut être calculé directement à partir de la connaissance de $y_n$. Ce calcul nécessitera la résolution d'une équation.
8. La difficulté est que le calcul de $y_{n+1}$ à chaque pas de temps nécessitera la résolution d'une équation en utilisant une méthode numérique appropriée comme la méthode de Newton.
9. La méthode de Newton à pour objectif la résolution d'une équation de la forme $g(x) = 0$. C'est la méthode de point fixe suivante

$$\begin{cases} x_0 \text{ donné} \\ x_{n+1} = x_n + \dfrac{g(x_n)}{g'(x_n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

   Si cette méthode converge, elle converge vers un zéro de $g$.
10. Un algorithme possible est le suivant

```
function y = schemaEulerTrapeze(y0, f, fp, t, eps)
  N = length(t)-1;
  y = zeros(N+1, 1);
  h = t(2) - t(1);
  y(1) = y0;
  for i=1:N
    g  = @(z) z - y(i) - h/2 * ( f(t(i+1),z) + f(t(i),y(i)) );
    gp = @(z) 1 - h/2*fp(t(i+1),z);
    [y(i+1),~] = Newton(y(i),g,gp,eps);
  end
end
```

**Exercice 2.** On a $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (-2, -1, 0, 2)$ et $(y_0, y_1, y_2, y_3) = (1, 0, 0, 3)$.

1. $$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}\frac{(x-x_2)}{(x_0-x_2)}\frac{(x-x_3)}{(x_0-x_3)} \\ &= \frac{1}{4}x(x+1)(x-2) \end{aligned}$$

   Même genre pour les autres ($L_1$,$L_2$ et $L_3$).
2. On a
$$P_3(x) = \sum_{i=0}^{3} y_i L_i(x) = L_0(x) + 3\,L_3(x).$$
3. On a
$$N_0(x) = 1, \quad N_1(x) = (x+2), \quad N_2(x) = (x+2)(x+1) \quad \text{et} \quad N_3(x) = x(x+2)(x+1).$$
4. On commence par calculer les différences divisées.

$$\begin{array}{ccccc} -2 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & & \\ 2 & 3 & & & \end{array}$$

   On obtient
$$P_3(x) = \sum_{i=0}^{3} f[x_0, \ldots, x_i] N_i(x) = N_0(x) - N_1(x) + \frac{1}{2}N_2(x).$$

5. On commence par écrire $P_1$ et $P_2$ dans la base de Newton. On a

$$P_1(x) = \sum_{i=0}^{1} f[x_0,\dots,x_i]N_i(x) = N_0(x) - N_1(x)$$
$$P_2(x) = \sum_{i=0}^{1} f[x_0,\dots,x_i]N_i(x) = N_0(x) - N_1(x) + \frac{1}{2}N_2(x) = P_3(x)$$

On les écrit dans la base canonique :

$$P_1(x) = N_0(x) - N_1(x) = 1 - (x+2) = -x-1$$

$$\begin{aligned} P_2(x) = P_3(x) = N_0(x) - N_1(x) + \frac{1}{2}N_2(x) &= P_1(x) + \frac{1}{2}(x+2)(x+1) \\ &= -x-1+\frac{1}{2}(x^2+3x+2) \\ &= \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x \end{aligned}$$

**Exercice 3.** On comence par remarquer que

$$v(4) = v(4) - v(0) = \int_0^4 v'(t)\,dt = \int_0^4 a(t)\,dt.$$

1. On prend $N=4$, $h=1$ et $t_i = i$ pour $i \in \{0,1,2,3,4\}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} v(4) = \int_0^4 a(t)\,dt \simeq \frac{1}{2}\big(a(0)+a(4)\big) + a(1) + a(2) + a(3) \\ = \frac{1}{2}(10+\frac{1}{2}) + 4 + 3 + 1 = \frac{53}{4} \end{aligned}$$

2. On prend $N=2$, $h=2$ et $t_i = 2\,i$ pour $i \in \{0,1,2\}$. On en déduit :

$$\begin{aligned} v(4) = \int_0^4 a(t)\,dt \simeq \frac{h}{6}\Big(a(0)+a(4)+2a(2)+4\big(a(1)+a(3)\big)\Big) \\ = \frac{1}{3}\big(10+\frac{1}{2}+6+4(4+1)\big) \\ = \frac{61}{6} \end{aligned}$$