Exercice 2

$$g(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\frac{a}{x^2} \qquad x \in \mathbb{R}^{+*}$$

1) Étude de g.

On a : $g'(x) = \frac{2}{3} + \frac{a}{3}\left(x^{-2}\right)'$

$$= \frac{2}{3} + \frac{a}{3}\left(-2x^{-3}\right)$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{a}{3}\left(\frac{-2}{x^3}\right) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\frac{a}{x^3}$$

$$= \frac{2}{3}\left(1 - \frac{a}{x^3}\right)$$

On a $g'(x) = 0$ ssi $x^3 = a$ c-à-d

ssi $x = \sqrt[3]{a}$

de plus on a $\lim\limits_{x \to 0} g'(x) = -\infty < 0$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} g'(x) = \frac{2}{3} > 0$

On déduit le tableau de variation suivant :

x	0		$\sqrt[3]{a}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt[3]{a}$	$\nearrow$	$+\infty$

On y ajoute les limites de g

on a $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

et $g(\sqrt[3]{a}) = \cancel{\frac{2}{3}\sqrt[3]{a} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{a}}$

$$= \frac{2}{3}\sqrt[3]{a} + \frac{1}{3}\frac{a}{(\sqrt[3]{a})^2}$$

$$= \frac{2}{3}a^{1/3} + \frac{1}{3}a^{1-\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{2}{3}a^{1/3} + \frac{1}{3}a^{1/3} = a^{1/3}$$

On termine l'étude de g en remarquant qu'elle admet une asymptote oblique d'équation

$y = \frac{2}{3}x$. $\left(\text{car } g(x) - \frac{2}{3}x = \frac{1}{3}\frac{a}{x^2} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 \right)$

2) On compare g à l'identité :

On pose $h(x) = g(x) - x = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\frac{a}{x^2}$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{a}{x^2} - x\right)$$

$$= \frac{x}{3}\left(\frac{a}{x^3} - 1\right)$$

On cherche le signe de h sur $]0, +\infty[$.

On a $h(x) \geq 0$ ssi

$\frac{x}{3}\left(\frac{a}{x^3} - 1\right) \geq 0$ ssi $\left(\frac{a}{x^3} - 1\right) \geq 0$ car $\frac{x}{3} \geq 0$

ssi $\frac{a}{x^3} \geq 1$ ssi $x^3 \leq a$ car $x^3 \geq 0$

ssi $x \leq \sqrt[3]{a}$ (on compose par la fct. $\sqrt[3]{\cdot}$ qui est croissante)

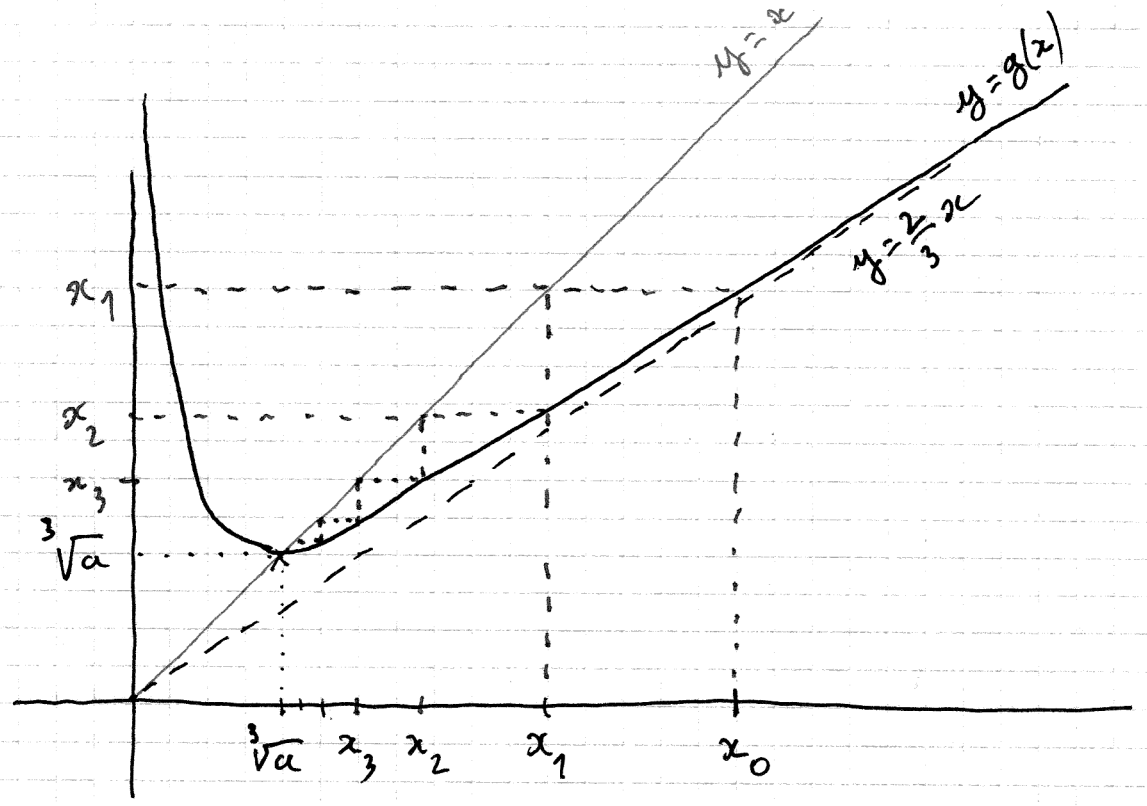
D'où $h(x) \geq 0$ sur $]0, \sqrt[3]{a}[$

et $h(x) \leq 0$ sur $]\sqrt[3]{a}, +\infty[$

i.e. $g(x) \geq x$ sur $]0, \sqrt[3]{a}[$

et $g(x) \leq x$ sur $]\sqrt[3]{a}, +\infty[$

On fait une représentation graphique de g, de l'identité et de l'asymptote oblique.



3) On fait la question 3 sur le dessin précédent :

- (a) on choisit $x_0 \in \mathbb{R}^{+*}$, on cherche $x_1 = g(x_0)$

(b) On place facilement x_1 sur l'axe des ~~ord~~ ordonnées

(c) On souhaite ~~trouver x_1 se~~ placer x_1 sur l'axe des abscisses. On utilise la droite $y = x$

(d) on recommence à l'aide de x_1.

On remarque ensuite que l'on obtient la même chose si le point de départ x_0 est ~~choisit~~ fixé dans $]0, \sqrt[3]{a}[$. Dans ce cas on a en fait que $x_1 \in]\sqrt[3]{a}, +\infty[$ et le reste de la suite à le même comportement que dans le cas précédent.

4) Nous allons utiliser le théorème de convergence globale (p 16). On doit vérifier les hypothèses du th. pour la fonction g.

On a :

- Si $x \in [\sqrt[3]{a}, +\infty[$, $\varphi(x) \in [\sqrt[3]{a}, +\infty[$ (voir tableau de variation.

- De plus, $\varphi'(x) = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{a}{x^3}\right)$

Ainsi ~~$\varphi'(x) = \varphi'(x)$~~

On $x \geq \sqrt[3]{a}$ ~~et~~ d'où $x^3 \geq a$

d'où $1 \geq \frac{a}{x^3}$ et donc $1 - \frac{a}{x^3} \geq 0$

et puisque $x \geq 0$ on a $-\frac{a}{x^3} \leq 0$

et $1 - \frac{a}{x^3} \leq 1$ d'où $\frac{2}{3}\left(1 - \frac{a}{x^3}\right) \leq \frac{2}{3}$

Ainsi, $|g'(x)| = g'(x) \leq \frac{2}{3} < 1 \quad \forall x \in [\sqrt[3]{a}, +\infty[$

D'où, d'après le théorème p 17, on a g est contractante

~~D'après~~

Les deux hypothèses du théorème de ~~contraction~~ convergence globales sont satisfaites.

On a donc que $(x_n)_n$ def par $\begin{cases} x_{n+1} = g(x_n) & \forall n \geq 0 \\ x_0 \text{ donné} \end{cases}$

converge dès que $x_0 \in [\sqrt[3]{a}, +\infty[$.

Si $x_0 \in]0, \sqrt[3]{a}[$ alors on a que $x_1 \in [\sqrt[3]{a}, +\infty[$ à partir de là on est dans le cas précédent et on a donc la convergence de la suite.

Finalement la suite converge pour tout $x_0 \in]0, +\infty[$.

6) Laissé en exo.

7) _____