Calcul Numérique

TP : Résolution d'équations non-linéaires.

On s'intéresse dans ce TP aux diverses méthodes vues en cours et/ou en TD pour la résolution numérique d'équations aux dérivées partielles.

Soit $T > 0$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. On souhaite implémenter différentes méthodes permettant d'approcher la solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(x) = f\big(x, y(x)\big), & \forall x \in [0, T] \,, \\ y(0) = y_0 \,, \end{cases} \tag{1}$$

Pour cela on considère une discrétisation uniforme de l'intervale $[0, T]$ de pas $h = \frac{T}{N}$ et donnée par $X = (x_0, x_1, \ldots, x_N)$ avec $x_{n+1} = x_n + h$.

1. Implémenter en Matlab les schémas d'Euler explicite, de Heun et de Runge-Kutta d'ordre 2 (Euler modifié). On construira une fonction Matlab indépendante pour chacune de ces méthodes. Celle-ci prendra, entre autre, comme argument d'entrée :
   - ▷ la fonction f définissant le problème (elle sera définie dans le script principal en utilisant la syntaxe : f=@(x,y) ...).
   - ▷ le nombre de pas de discrétisation : N.
   - ⋮
2. a) Quelle difficulté rencontre-t-on si l'on souhaite implémenter un schéma implicite dans le cas d'une fonction f générale ?

   b) Indiquer comment peut être utilisée une méthode de résolution non-linéaire (de recherche de zéro) pour approcher u_{n+1} dans chacun des deux schémas implicites proposés.

   c) Implémenter en Matlab les schémas d'Euler implicite et du Trapèze en utilisant la méthode de Newton pour l'approximation de u_{n+1}. On construira une fonction Matlab pour chacune de ces méthodes. Celles-ci prendront, entre autre, comme argument d'entrée :
      - ▷ la fonction f définissant le problème (elle sera définie dans le script principal en utilisant la syntaxe : f=@(x,y) ...).
      - ▷ la dérivée de la fonction f qui interviendra dans la méthode de Newton (attention il s'agit d'une fonction de deux variables et la dérivée n'interviendra pas sur les deux composantes).
      - ⋮

Problème.

On considère le problème suivant

$$\begin{cases} y_1'(t) = -y_2(t) & t \in]0, 2\pi[\\ y_2'(t) = y_1(t) & t \in]0, 2\pi[\end{cases} \quad \text{avec} \quad y_1(0) = 1 \quad \text{et} \quad y_2(0) = 0 \,. \tag{2}$$

1. Adapter les différentes fonctions précédentes pour qu'elles puissent être utilisées dans le cas de fonctions à valeurs vectorielles.
2. Comparer les différents schémas précédents sur cet exemple. L'un d'entre eu est-il conservatif ?