Université du Littoral Côte d'Opale
Probabilités et statistiques
Master 1 TSI
Année 2022-2023

Fiche n°1. Variables aléatoires.

Exercice 1. Un joueur lance trois fois une pièce de monnaie non truquée. Il gagne deux euros si le résultat est "pile" et perd un euro si le résultat est "face". On désigne par X le gain (ou la perte) du joueur au bout des trois lancés.

(1) Préciser l'ensemble des valeurs possibles de X.

(2) Calculer la loi de X.

(3) Déterminer l'espérance et la variance de X.

Exercice 2. (1) Soit $a > 0$. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad t < 0, \\ a^2 t e^{-at} \quad \text{si} \quad t \geq 0, \end{cases}$$

est une densité de probabilité.

(2) La durée de vie T en heures d'un certain type de transistor est une variable aléatoire de densité f avec $a = 5,5 \cdot 10^{-5}$. Calculer la probabilité p que la durée de vie du transistor soit inférieure à 100 heures.

(3) Pour simplifier, on pose désormais $p = 1,5 \cdot 10^{-5}$. Un écran d'ordinateur portable est formé de 1296000 pixels. Chaque pixel est commandé par un transistor du type ci-dessus. On considère que les durées de vie de chacun de ces transistors sont des variables aléatoires indépendantes T_i de même loi à densité f. On note X la variable aléatoire égale au nombre de pixels défectueux au bout de 100 heures de fonctionnement à l'écran.

(a) Quelle est la loi de X ?

(b) Par quelle loi discrète peut-on approximer la loi de X ?

(c) En utilisant cette approximation, évaluer la probabilité qu'au bout de 100 heures de fonctionnement, l'écran ait au moins 2 pixels défectueux.

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que $\mathbb{E}[X] = \lambda$.

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2$.

(1) Calculer $\mathbb{P}(X \leq 1)$ et $\mathbb{P}(X > 3)$.

(2) Déterminer la fonction de répartition de X.

(3) Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 5. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ et soit X la variable aléatoire définie par $X = -\frac{1}{p}\log(U)$, où $p > 0$.

(1) Calculer la fonction de répartition de X.

(2) En déduire que X suit une loi exponentielle et déterminer son espérance et sa variance.

Exercice 6. Soit X une variable aléatoire réelle dont la fonction de répartition est donnée par : $F_X(x) = e^{-e^{-x}}$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

(1) Déterminer la densité de probabilité de X.

(2) Déterminer la médiane et le premier quartile de X.

(3) Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi que X, et soit $Y_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\} - \log(n)$, où $n \geq 1$.

   (a) Calculer la fonction de répartition de Y_n.

   (b) Montrer que Y_n a la même loi que X_1.

Exercice 7. Une machine fabrique des résistances chauffantes en grande série. On admet que la variable aléatoire X égale à la longueur, en mm, d'une résistance est distribuée suivant une loi normale de moyenne 400 et de variance σ^2. Une pièce est déclarée acceptable si sa longueur est comprise entre 392,5 et 407,5mm.

(1) Dans cette question, on suppose que $\sigma = 5$. En utilisant une table de la loi normale centrée réduite,

   (a) calculer les probabilités $\mathbb{P}(X > 410)$, $\mathbb{P}(X < 385)$ et $\mathbb{P}(390 < X < 410)$;

   (b) déterminer la probabilité pour qu'une résistance choisie au hasard soit défectueuse.

(2) Donner une valeur approchée de σ^2 pour qu'une résistance prise au hasard ait 10% de chance d'être défectueuse.

Exercice 8. Soit X une variable aléatoire réelle strictement positive de densité f. Déterminer la loi de X^{-1}.