Fiche n$^\circ$1. Séries entières, analyse complexe.

Exercice 1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

(1) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} x^n$;

(2) $\sum_{n\geq 0} \frac{n!}{(2n)!} x^n$;

(3) $\sum_{n\geq 0} (2+ni) z^n$.

Exercice 2. Déterminer le développement en série entière en l'origine de $x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

Exercice 3. Soit f la fonction définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} e^{n^2 ix}$.

(1) Justifier que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.

(2) Montrer que, pour tout entier $k \geq 1$, on a $\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} \geq k^k e^{-k}$.

(3) En déduire que f n'est pas développable en série entière en 0.

Exercice 4. On considère l'équation différentielle $y'' + xy' + y = 1$. On cherche l'unique solution de cette équation vérifiant $y(0) = y'(0) = 0$.

(1) Supposons qu'il existe une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence strictement positif solution de l'équation. Quelle relation de récurrence doit vérifier la suite (a_n) ?

(2) Calculer explicitement a_n pour chaque n. Quel est le rayon de convergence de la série entière obtenue ?

(3) Exprimer cette série entière à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 5. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{N}$. On rappelle que la fonction génératrice de X est la série entière

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n)\, t^n.$$

(1) Démontrer que le rayon de convergence de G_X est supérieur ou égal à 1.

(2) Démontrer que G_X définit une fonction continue sur $[-1, 1]$ et $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$.

(3) Démontrer que si $G_X = G_Y$ sur $]-1, 1[$, alors X et Y ont même loi.

(4) On suppose que X et Y sont indépendantes. Démontrer que, pour tout $t \in]-1, 1[$, on a

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t) G_Y(t).$$

(5) Calculer G_X lorsque X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, puis lorsque X suit une loi binomiale de paramètre (n, p).

(6) Soient X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre (n, p) et Y une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre (m, p). On suppose que X et Y sont indépendantes. Quelle est la loi de $X + Y$?

Exercice 6. On considère la fonction Log définie pour $|z-1|<1$ par

$$\mathrm{Log}(z) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-z)^k}{k}.$$

(1) Montrer que, pour $|z-1| \leq \frac{1}{2}$, on a $|\mathrm{Log}(z)| \leq \ln\left(\frac{1}{1-|z-1|}\right) \leq 2|z-1|$.

(2) Vérifier que, pour $|z-1|<1$, on a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathrm{Log}(z) = \frac{1}{z}$ et $e^{\mathrm{Log}(z)} = z$.

Exercice 7. (1) Pour $R>0$, on note γ_R le cercle de centre 0 et de rayon R parcouru une fois dans le sens direct. Calculer, selon les valeurs de R, l'intégrale suivante :

$$I = \int_{\gamma_R} \frac{1}{2z^2 - 5z + 2} \mathrm{d}z.$$

Préciser les valeurs exclues de R.

(2) Soit $n \geq 2$. Calculer, en intégrant sur le bord du compact

$$K = \left\{\rho e^{i\theta} :\ 0 \leq \rho \leq R \text{ et } 0 \leq \theta \leq 2\pi/n\right\},$$

l'intégrale suivante :

$$J = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^n} \mathrm{d}x.$$