Université du Littoral Côte d'Opale
Probabilités & Statistiques
Ing 1
Année 2023-2024

Fiche n°2. Evénements, variables aléatoires.

---

1. Evénements

Exercice 1. Proposer un univers Ω pour les expériences aléatoires suivantes et dénombrer les résultats possibles.

(1) On lance un dé à 6 faces.

(2) On lance un dé à 6 faces et un autre à 20 faces.

(3) On tire trois cartes (sans remise) dans un jeu de 52 cartes.

Exercice 2. Soit Ω un univers et soient A, B, C trois événements de Ω. Traduire en termes ensemblistes (en utilisant uniquement les symboles d'union, d'intersection et de passage au complémentaire, ainsi que A, B et C) les événements suivants :

(1) seul A se réalise ;

(2) les événements A et B se réalisent, mais pas C ;

(3) les trois événements se réalisent ;

(4) au moins l'un des trois événements se réalise ;

(5) au moins deux des trois événements se réalisent ;

(6) aucun ne se réalise ;

2. Indépendance, probabilités conditionnelles

Exercice 3. La famille Potter comporte deux enfants. Considérons les événements A : "il y a deux enfants de sexes différents chez les Potter" et B : "la famille Potter a au plus une fille". On suppose que le sexe de chaque enfant est équiprobable et indépendant de celui des autres.

(1) Les événements A et B sont-ils indépendants ?

(2) Même question si la famille Potter comporte trois enfants.

(3) Même question si la famille Potter comporte n enfants, $n \geq 1$.

Exercice 4. En cas de migraine trois patients sur cinq prennent de l'aspirine (ou équivalent), et deux sur cinq prennent un autre médicament M.

— avec l'aspirine, 75% des patients sont soulagés ;
— avec le médicament M, 90% des patients sont soulagés.

(1) Quelle est la proportion de personnes soulagées ?

(2) Quelle est la probabilité pour un patient d'avoir pris de l'aspirine sachant qu'il est soulagé ?

3. Variables aléatoires discrètes

Exercice 5. Un joueur lance trois fois une pièce de monnaie non truquée. Il gagne deux euros si le résultat est "pile" et perd un euro si le résultat est "face". On désigne par X le gain (ou la perte) du joueur au bout des trois lancés.

(1) Donner l'univers Ω associé à l'expérience.

(2) Préciser l'ensemble des valeurs possibles de X.

(3) Calculer la loi de X.

Exercice 6. Un commercial doit rendre visite à 4 clients. Chaque client a une probabilité 0,3 de passer une commande, la décision de chaque client étant indépendante des autres clients. On désigne par X le nombre de clients qui ont passé une commande.

(1) Quelle loi suit X ? Donner son espérance et sa variance.

(2) Quelle est la probabilité pour le commercial d'obtenir exactement trois commandes ?

(3) Quelle est la probabilité pour le commercial de n'obtenir aucune commande ?

Exercice 7. Désignons par X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.

(1) Déterminer $\mathbb{P}(X > k)$, pour tout $k \geq 1$.

(2) En déduire que, pour tous $k, n \geq 1$

$$\mathbb{P}(X > k + n | X > k) = \mathbb{P}(X > n).$$

Que peut-on dire de X ?

4. Variables aléatoires à densité

Exercice 8. (1) Soit $a > 0$. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0, \\ a^2 t e^{-at} & \text{si} \quad t \geq 0, \end{cases}$$

est une densité de probabilité.

(2) La durée de vie T en heures d'un certain type de transistor est une variable aléatoire de densité f avec $a = 5,5 \cdot 10^{-5}$. Calculer la probabilité p que la durée de vie du transistor soit inférieure à 100 heures.

Exercice 9. Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2$.

(1) Calculer $\mathbb{P}(X \leq 1)$ et $\mathbb{P}(X > 3)$.

(2) Déterminer la fonction de répartition de X.

(3) Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 10. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ et soit X la variable aléatoire définie par $X = -\frac{1}{p}\log(U)$, où $p > 0$.

(1) Calculer la fonction de répartition de X.

(2) En déduire que X suit une loi exponentielle et déterminer son espérance et sa variance.

Exercice 11. Une machine fabrique des résistances chauffantes en grande série. On admet que la variable aléatoire X égale à la longueur, en mm, d'une résistance est distribuée suivant une loi normale de moyenne 400 et de variance σ^2. Une pièce est déclarée acceptable si sa longueur est comprise entre 392,5 et 407,5mm.

(1) Dans cette question, on suppose que $\sigma = 5$. En utilisant une table de la loi normale centrée réduite,

(a) calculer les probabilités $\mathbb{P}(X > 410)$, $\mathbb{P}(X < 385)$ et $\mathbb{P}(390 < X < 410)$;

(b) déterminer la probabilité pour qu'une résistance choisie au hasard soit défectueuse.

(2) Donner une valeur approchée de σ^2 pour qu'une résistance prise au hasard ait 10% de chance d'être défectueuse.