Université du Littoral Côte d'Opale
Probabilités et statistiques
Master 1 TSI
Année 2022-2023

Fiche n°2. Théorèmes limites.

---

1. Loi des grands nombres

Exercice 1. (1) Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de paramètre p. Vers quoi converge $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$?

(2) On lance 1000 fois une pièce qui a une probabilité $p = 0.49$ de tomber sur pile. Donner une approximation du nombre de fois que l'on obtient pile.

Exercice 2. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, de carré intégrable (i.e. $\mathbb{E}\left[X_1^2\right] < \infty$). On pose :

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k, \quad V_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n (X_k - \overline{X_n})^2.$$

(1) Vérifier que $V_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k^2 - (\overline{X_n})^2$.

(2) Montrer que V_n converge presque sûrement vers $\mathbb{V}[X_1]$ lorsque n tend vers l'infini.

(3) Montrer que $\mathbb{E}[V_n] = \frac{n-1}{n}\mathbb{V}[X_1]$.

2. Théorème central limite

Exercice 3. (1) Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. Justifier que

$$(\overline{X_n} - p) \times \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} U \quad \text{en loi},$$

où U est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

(2) On lance 1000 fois une pièce qui a une probabilité $p = 0.49$ de tomber sur pile et on désigne par N le nombre de fois que l'on a obtenu pile. Donner une approximation de la probabilité que N soit compris entre 480 et 500.

Exercice 4. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

(1) Vers quoi converge $\overline{X_n}$?

(2) Justifier que

$$\left(\overline{X_n} - \frac{1}{\lambda}\right) \times \sqrt{\lambda^2 n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} U \quad \text{en loi},$$

où U est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

(3) Prenons $\lambda = 1$. Donner une approximation de $\mathbb{P}\left(\overline{X_n} \leq 2\right)$.

Exercice 5. Un assureur assure n automobilistes (numérotés de 1 à n) contre les accidents. Les assurés versent une prime le 1er janvier. Au cours de l'année, l'assureur devra verser la somme X_i à l'assuré numéro i. Les X_i sont supposées être des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. La prime versée par chaque assuré est $\mathbb{E}[X_1] + m$, où $m \in \mathbf{R}$. On suppose que $\mathbb{V}[X_1] = 1$.

(1) En appliquant le théorème central limite, donner une valeur approchée de la probabilité que l'assureur fasse faillite, autrement dit de $\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \geq n(\mathbb{E}[X_1] + m))$, pour $n = 100$ et $m = 0,1$.

(2) On suppose toujours que $m = 0,1$. Déterminer un entier n' tel que si $n \geq n'$, alors $\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \geq n(\mathbb{E}[X_1] + m)) \leq 0,05$.

Exercice 6. On considère un récipient hermétique séparé en deux parties symétriques "gauche" et "droite" par une cloison hermétique. Dans une des deux parties se trouve un litre d'oxygène, dans l'autre un litre d'azote. On retire la cloison et on la remet au bout d'un temps suffisamment long. On constate expérimentalement que dans la partie gauche il y a aurant d'azote que d'oxygène. Le but de cet exercice est l'étude d'un modèle simple permettant de prévoir ce phénomène.

On dispose de n molécules d'oxygène et n d'azote ; les molécules d'oxygène étant indexées de 1 à n et celles d'azote de $n+1$ à $2n$. On note X_i la variable de Bernoulli indicatrice de l'événement *la i-ième molécule se trouve dans la partie gauche après fermeture de la cloison.* On suppose que les X_i sont indépendantes et on pose : $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et $T_n = \sum_{i=n+1}^{2n} X_i$.

(1) Quelle est la loi de S_n, son espérance et sa variance (en fonction de n) ? Mêmes questions pour T_n.

(2) Soit $x > 0$. On considère l'événement suivant :
$$A = \left\{ \frac{n}{2} - \frac{x}{2}\sqrt{n} \leq S_n \leq \frac{n}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{n} \right\}.$$
En utilisant le théorème central limite, montrer que l'on peut approximer $\mathbb{P}(A)$ par $2\Phi(x) - 1$, où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

(3) On désigne par B l'événement défini de la même façon que A en remplaçant S_n par T_n. On suppose de plus que $n - x\sqrt{n} > 0$ et on s'intéresse à l'événement suivant :
$$C = \left\{ \frac{n - x\sqrt{n}}{n + x\sqrt{n}} \leq \frac{T_n}{S_n} \leq \frac{n + x\sqrt{n}}{n - x\sqrt{n}} \right\}.$$
Montrer que $A \cap B \subset C$.

(4) En négligeant l'erreur due à l'approximation gaussienne, proposer à l'aide de $\Phi(x)$ une majoration de $\mathbb{P}(A^c \cup B^c)$. En déduire une minoration de $\mathbb{P}(C)$. On exprimera le résultat final en fonction de la quantité $R(x) = (1 - \Phi(x))$.

(5) Appliquer le résultat ci-dessus en prenant $n = 10^{22}$ et $x = 10$ en utilisant la formule d'encadrement de $1 - \Phi(x)$ pour les grandes valeurs de x. Commenter le résultat obtenu.