Université du Littoral Côte d'Opale
Probabilités & Statistiques
Ing 1
Année 2023-2024

Fiche n°3. Théorèmes limites.

1. Loi des grands nombres

Exercice 1. (1) Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de paramètre p. Vers quoi converge $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$?

(2) On lance 1000 fois une pièce qui a une probabilité $p = 0.49$ de tomber sur pile. Donner une approximation du nombre de fois que l'on obtient pile.

2. Théorème central limite

Exercice 2. (1) Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. Justifier que

$$(\overline{X_n} - p) \times \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} U \quad \text{en loi,}$$

où U est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

(2) On lance 1000 fois une pièce qui a une probabilité $p = 0.49$ de tomber sur pile et on désigne par N le nombre de fois que l'on a obtenu pile. Donner une approximation de la probabilité que N soit compris entre 480 et 500.

Exercice 3. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

(1) Vers quoi converge $\overline{X_n}$?

(2) Justifier que

$$\left(\overline{X_n} - \frac{1}{\lambda}\right) \times \sqrt{\lambda^2 n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} U \quad \text{en loi,}$$

où U est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

(3) Prenons $\lambda = 1$. Donner une approximation de $\mathbb{P}\left(\overline{X_n} \leq 1.1\right)$ lorsque $n = 100$.