Université du Littoral Côte d'Opale
Probabilités
M1 mathématiques
Année 2022-2023

Fiche n°3. Vecteurs gaussiens.

Exercice 1. Soient Y_1 et Y_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi normale centrée réduite. Posons

$$X = (1 + Y_1 + 2Y_2, -1 + Y_1).$$

Montrer que X est un vecteur gaussien et préciser sa moyenne et sa matrice de covariance.

Exercice 2. Soit $X = (X_1, X_2, X_3)$ un vecteur gaussien de moyenne $m = (1, 1, 0)$ et de matrice de covariance $\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

(1) Montrer que $X_2 - X_3 = 1$ p.s..
(2) Le vecteur (X_1, X_2) admet-il une densité dans $\mathbf{R}^2$? Si oui, l'expliciter.
(3) Quel est le support dans $\mathbf{R}^3$ de la loi de X ?

Exercice 3. Soit (X_1, X_2, X_3) un triplet de variables aléatoires indépendantes de loi normale centrée réduite. Soient $U = X_1 - X_2 + X_3$, $T_1 = X_1 + X_2$, $T_2 = X_2 + X_3$, $T_3 = X_1 - X_3$.

(1) Déterminer la loi de U.
(2) Montrer que U est indépendante du vecteur (T_1, T_2, T_3).

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire réelle de loi normale centrée réduite. Posons $Y = (X, -X)$ et $Z = (X, X)$. Soit μ la mesure de probabilité sur $\mathbf{R}^2$ définie par $\mu = \frac{\mathbb{P}_Y + \mathbb{P}_Z}{2}$. Soient π_1 et π_2 les projections coordonnées, c'est-à-dire définies par $\pi_1(x, y) = x$ et $\pi_2(x, y) = y$ pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Notons, enfin, $\mu_1 = \pi_1(\mu)$ et $\mu_2 = \pi_2(\mu)$ les marginales de μ, c'est-à-dire les mesures images de μ par π_1 et π_2.

(1) Montrer que μ_1 et μ_2 sont égales à la loi normale centrée réduite.
(2) Calculer la fonction caractéristique de μ.
(3) En déduire que μ n'est pas gaussienne.

Exercice 5. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles, admettant un moment d'ordre deux, indépendantes et de même loi μ telle que

$$\int_{\mathbf{R}} x \, \mathrm{d}\mu(x) = 0 \text{ et } \int_{\mathbf{R}} x^2 \, \mathrm{d}\mu(x) = 1.$$

(1) Démontrer que si μ est la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, alors la variable aléatoire $\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ a pour loi $\mathcal{N}(0, 1)$.
(2) Inversement, supposons que la variable aléatoire $\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ a pour loi μ.
   (a) Montrer que, pour tout réel t et tout entier n, on a

$$\varphi_\mu(t) = \left(\varphi_\mu \left(\frac{t}{2^n} \right) \right)^{4^n}$$

   et en déduire que $\varphi_\mu(t) \neq 0$.
   (b) En déduire que μ est égale à la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Exercice 6. Le but de cet exercice est de démontrer une version simplifiée du *théorème de Cochran.* Soit X un vecteur gaussien de $\mathbf{R}^n$ de loi $\mathcal{N}(0_{\mathbf{R}^n}, I_n)$ et F un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ de dimension d. Notons $F^\perp$ l'orthogonal de F et $P_F, P_{F^\perp}$ les matrices des projections orthogonales sur F et $F^\perp$.

(1) Montrer que les vecteurs aléatoires $P_F X$ et $P_{F^\perp} X$ sont indépendants et de lois respectives $\mathcal{N}(0_{\mathbf{R}^n}, P_F)$ et $\mathcal{N}(0_{\mathbf{R}^n}, P_{F^\perp})$.

(2) Montrer que les variables aléatoires réelles $|P_F X|^2$ et $|P_{F^\perp} X|^2$ sont indépendantes et de lois respectives $\chi^2(d)$ et $\chi^2(n-d)$.

Exercice 7. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, avec $m \in \mathbf{R}$ et $\sigma^2 > 0$. Notons

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \text{ et } \widehat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - \overline{X_n})^2$$

la moyenne empirique et la variance empirique respectivement.

(1) Montrer que $\overline{X_n} \sim \mathcal{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

(2) Montrer que $\overline{X_n}$ et $\widehat{\sigma}_n^2$ sont indépendantes.

(3) Montrer que $\frac{(n-1)\widehat{\sigma}_n^2}{\sigma^2}$ suit la loi $\chi^2(n-1)$.

Exercice 8. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$. Posons $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Pour des réels $0 < t_1 < \cdots < t_k$, notons

$$B_{t_i}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} S_{\lfloor nt_i \rfloor}, \ i \leq k$$

(1) Montrer que $B_{t_1}^{(n)}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, t_1)$ et que $B_{t_{i+1}}^{(n)} - B_{t_i}^{(n)}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, t_{i+1} - t_i)$ pour tout $i \leq k-1$.

(2) Justifier que les variables aléatoires $B_{t_1}^{(n)}, B_{t_2}^{(n)} - B_{t_1}^{(n)}, \dots, B_{t_k}^{(n)} - B_{t_{k-1}}^{(n)}$ sont indépendantes.

(3) En déduire que le vecteur aléatoire $(B_{t_1}^{(n)}, B_{t_2}^{(n)} - B_{t_1}^{(n)}, \dots, B_{t_k}^{(n)} - B_{t_{k-1}}^{(n)})$ converge en loi vers un vecteur gaussien $(Z_1, \dots, Z_k)$ dont on explicitera les paramètres.

(4) En déduire que que le vecteur aléatoire $(B_{t_1}^{(n)}, B_{t_2}^{(n)}, \dots, B_{t_k}^{(n)})$ converge en loi vers un vecteur gaussien et calculer la matrice de covariance du vecteur gaussien.