Université du Littoral Côte d'Opale
Probabilités et statistiques
Master 1 TSI
Année 2022-2023

Fiche n°4. Tests paramétriques.

Exercice 1. Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un n-échantillon issu d'une loi normale $\mathcal{N}(\theta, 1)$ de moyenne inconnue $\theta \in \mathbf{R}$. On veut tester $H_0 : \theta \geq 1$ contre $H_1 : \theta < 1$. On décide que l'hypothèse H_0 est rejetée si $\overline{X_n} < 1$, où $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

(1) Déterminer les risques de première et de seconde espèce en fonction de la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite.

(2) En déduire la puissance du test et sa taille.

Exercice 2. Un laboratoire de chimie est chargé de conditionner des flacons d'eau de toilette destinés à une parfumerie. On définit une variable aléatoire X associant à chaque flacon le volume de son contenu exprimé en cm^3. On suppose que X suive une loi normale de moyenne μ (inconnue) et d'écart-type (connu) $\sigma = 0.036$. A l'occasion d'une commande, le parfumeur reçoit du laboratoire un lot de flacons. Il envisage d'effectuer un test de conformité de la moyenne μ de la production, avec la valeur $\mu_0 = 43.041$ annoncée par le fournisseur, à partir d'un échantillon de taille $n = 75$. Dans tout ce qui suit, on oppose l'hypothèse nulle $H_0 : \mu = \mu_0$ à l'hypothèse alternative $H_1 : \mu \neq \mu_0$.

(1) Sous l'hypothèse nulle, quelle est la loi de probabilité suivie par la moyenne d'échantillonnage $\overline{X}$? En préciser les paramètres.

(2) En se plaçant sous l'hypothèse H_0, déterminer la valeur arrondie à 10^{-3} près du réel h tel que $\mathbb{P}\left(\mu_0 - h \leq \overline{X} \leq \mu_0 + h\right) = 0.90$.

(3) En déduire l'intervalle d'acceptation de l'hypothèse H_0 au seuil de risque de 10%.

(4) Enoncer la règle de décision du test.

(5) Pour réaliser ce test d'hypothèse bilatéral, le parfumeur effectue un prélèvement aléatoire, assimilé à un prélèvement avec remise de 75 flacons pris dans le lot reçu. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

volume	$[42.930, 42.970[$	$[42.970, 43.010[$	$[43.010, 43.050[$	$[43.050, 43.090[$	$[43.090, 43.130]$
Effectif	2	7	29	19	18

Peut-on affirmer, au niveau de 10%, que la valeur μ_0 annoncée pour μ est correcte ?

Exercice 3. On souhaite contrôler la qualité de fonctionnement d'une usine produisant des ampoules électriques. On note p la probabilité qu'une ampoule produite soit défectueuse. On considère que la fabrication a un régime normale lorsqu'on a $p \leq 10^{-3}$.

(1) On prélève au hasard 500 ampoules indépendantes et on note X le nombre d'ampoules défectueuses de ce lot. Déterminer la loi de la variable aléatoire X. Donner une approximation de cette loi lorsque le régime est normal.

(2) A l'aide de la variable aléatoire X, construire un test permettant de déterminer si la fabrication a un régime normal ou si elle est détérioriée, sachant que l'on souhaite que la probabilité de conclure à tort que le régime est détérioré soit inférieure à 5%. Quelle est la taille du test ? Que peut-on conclure si on observe $X(\omega) = 3$? Obtient-on la même conclusion avec un niveau de 1% ?

(3) Supposons que p soit en réalité $3 \cdot 10^{-3}$. Quelle est la probabilité de déclarer cependant, à l'issue du test de niveau 5%, que le régime de fabrication est normal ?

Exercice 4. Le nombre de personnes dans une file d'attente donnée est une variable aléatoire de loi de Poisson. On a dénombré à dix dates différentes les personnes attendant au guichet de la banque postale d'une certaine ville, de telle sorte que les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_{10}$ associées soient indépendantes et de même loi $\mathcal{P}(\theta)$, où θ est inconnu.

(1) Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre θ. Quelle est sa loi sous $\mathcal{P}(\theta)$?

(2) Les valeurs observées sont : 3; 0; 1; 4; 2; 3; 1; 4; 0; 2. Peut-on accepter l'hypothèse selon laquelle il y a en moyenne moins d'une personne attendant au guichet de la banque postale au niveau 5% ? *Indication : utiliser le fait que* $\theta \mapsto \mathbb{P}(\mathcal{P}(\theta) \geq a)$ *est croissante.*

(3) Comment construire un test de niveau asymptotique α basé sur l'observation de n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$? *Indication : on pourra utiliser un résultat sur la convergence d'une loi de Poisson de grand paramètre.*

Exercice 5. Le poids indiqué par une balance, lorsqu'on effectue la pesée d'un poids étalonné à 100g est une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(100, \sigma^2)$, où σ^2 est inconnue. On considère que, si la balance est bien réglée, la variance a pour valeur $\sigma^2 \leq 25$ et sinon $\sigma^2 > 25$. On effectue 10 pesées de ce poids et on récolte les données suivantes :

$$94,45;\ 91,67;\ 91,67;\ 116,36;\ 95,72;\ 89,74;\ 105,71;\ 100,41;\ 82,74;\ 104,74.$$

On rappelle que si $(X_1, \ldots, X_n)$ est un n-échantillon de lois normales $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1),$$

où $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X_n})^2$ et $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.

(1) Peut-on conclure que la balance est bien réglée en utilisant un test de niveau 5% ?

(2) Préciser la fonction puissance du test construit.

Exercice 6. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de la loi exponentielle $\operatorname{Exp}(\theta)$, pour un certain paramètre $\theta > 0$ inconnu. Soient θ_0, θ_1 deux valeurs de θ telles que $0 < \theta_0 < \theta_1$. On souhaite tester l'hypothèse $H_0 : \theta = \theta_0$ contre l'hypothèse alternative $H_1 : \theta = \theta_1$.

(1) Déterminer la rapport de vraisemblance.

(2) Déterminer la forme du test de Neyman-Pearson.

(3) Déterminer la zone de rejet associée à ce test au niveau α.

(4) Appliquer le résultat ci-dessus aux valeurs numériques suivantes : $\overline{X_n}(\omega) = 0,43$ et $(\theta_0, \theta_1) = (2, 3)$.