Université du Littoral Côte d'Opale
Probabilités
M1 mathématiques
Année 2022-2023

Fiche n°4. Espérance conditionnelle.

Exercice 1. (1) Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $\{-2,-1,1,2\}$ et $Y = |X|$. Montrer que X et Y ne sont pas indépendantes mais que $\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X]$ p.s..

(2) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}$. Posons $Z = XY$. Montrer que $Z \neq 0$ p.s. mais que $\mathbb{E}[Z|X] = \mathbb{E}[Z|Y] = 0$ p.s..

(3) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. Posons $Z = X + Y$. Montrer que $\mathbb{E}[X|Z]$ et $\mathbb{E}[Y|Z]$ ne sont pas indépendantes.

Exercice 2. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit $\{B_1, \ldots, B_n\}$ une partition de Ω, telle que $\mathbb{P}(B_i) \neq 0$ pour tout $i \leq n$. Posons $\mathcal{B} = \sigma(\{B_1, \ldots, B_n\})$.

(1) Décrire la tribu $\mathcal{B}$.

(2) Soit Z une variable aléatoire réelle $\mathcal{B}$-mesurable.

  (a) Soit $\omega_i \in B_i$, $i \leq n$, et $z_i = Z(\omega_i)$. Montrer que $B_i \subset Z^{-1}(\{z_i\})$.

  (b) En déduire qu'il existe $z_1, \ldots, z_n \in \mathbf{R}$ tels que $Z = \sum_{i=1}^n z_i \mathbf{1}_{B_i}$.

(3) En déduire que, pour toute variable aléatoire X dans L^1, on a

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{B}] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X|B_i] \mathbf{1}_{B_i} \text{ p.s..}$$

Exercice 3. Soient $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$ deux variables aléatoires, et soit $h : E \times F \to \mathbf{R}_+$ une application mesurable.

(1) Supposons que E et F soient dénombrables. Calculer $\mathbb{E}[h(X,Y)|Y]$ en fonction de la loi du couple (X,Y) et de la loi de Y.

(2) Supposons que $E = \mathbf{R}^m$ et $F = \mathbf{R}^n$ et que (X,Y) admette une densité $f_{X,Y}$. Calculer $\mathbb{E}[h(X,Y)|Y]$ en fonction de $f_{X,Y}$ et de la densité f_Y de la variable aléatoire Y.

Exercice 4. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbf{R}^m$ et $\mathbf{R}^n$ respectivement. Soit $h : \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}_+$ une application mesurable. Montrer que

$$\mathbb{E}[h(X,Y)|Y] = \int_{\mathbf{R}^m} h(x,Y) \, \mathrm{d}\mathbb{P}_X(x).$$

Exercice 5. Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires ayant pour loi jointe la loi de densité $f_{X,Y}$ définie, pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, par

$$f_{X,Y}(x,y) = x(y-x)e^{-y}\mathbf{1}_{0 \leq x \leq y}.$$

Calculer $\mathbb{E}[X|Y]$ et $\mathbb{E}[Y|X]$.

Exercice 6. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $X : \Omega \to \mathbf{R}$ une variable aléatoire réelle de carré intégrable. Soit $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$. Notons

$$\mathbb{V}[X|\mathcal{B}] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{B}])^2 |\mathcal{B}\right].$$

Montrer que $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{V}[X|\mathcal{B}]] + \mathbb{V}[\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]]$.

Exercice 7. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $X : \Omega \to \mathbf{R}$ une variable aléatoire réelle dans L^2. Soit $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$. Posons $Y = \mathbb{E}[X|\mathcal{B}]$ et supposons que Y ait la même loi que X.

(1) Justifier que Y est dans L^2.

(2) Montrer que $X = Y$ p.s. *(Indication : considérer la variable aléatoire $(X - Y)^2$).*

Exercice 8. Soit $(Y, X_1, \ldots, X_d)$ un vecteur gaussien centré. Notons Z la projection orthogonale de Y, pour le produit scalaire de L^2, sur le sous-espace vectoriel $\mathrm{vect}(X_1, \ldots, X_d)$ (c'est-à-dire $\mathrm{cov}(Y - Z, X_j) = 0$ pour tout $j \leq d$).

(1) Montrer que $\mathbb{E}[Y|X_1, \ldots, X_d] = Z$ p.s..

(2) Soit $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ une fonction mesurable bornée. Calculer $\mathbb{E}[h(Y)|X_1, \ldots, X_d]$.

Exercice 9. Soit (W_n) une suite croissante de variables aléatoires positives telle que $W_0 = 0$. Pour tout entier n, posons $T_n = W_n - W_{n-1}$. Supposons que les variables aléatoires T_n, $n \geq 1$, soient i.i.d. de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Posons $X_0 = 0$ et

$$X_t = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_{W_n \leq t},$$

pour tout $t > 0$. La famille de variables aléatoires $(X_t)_{t \in \mathbf{R}_+}$ s'appelle un *processus de Poisson* d'intensité λ.

(1) Soient s et t tels que $0 \leq s < t$. Calculer par récurrence l'intégrale définie pour tout $n \geq 1$ par

$$I_n(s,t) = \int_{\mathbf{R}^n} \mathbf{1}_{s \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq t} \, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n.$$

(2) Calculer, pour tout $n \geq 1$ et pour toute famille $(f_j)_{j \leq n}$ de fonctions mesurables positives bornées sur $\mathbf{R}$, la quantité

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{X_t = n} \prod_{j=1}^{n} f_j(W_j)\right].$$

En déduire la loi de X_t et la loi conditionnelle de $(W_1, \ldots, W_n)$ sachant l'événement $\{X_t = n\}$.

(3) Soit $0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k = t$ une suite finie de nombres réels. Déterminer la loi de la variable aléatoire $(X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_k} - X_{t_{k-1}})$ et justifier l'indépendance des variables aléatoires X_{t_1}, $X_{t_2} - X_{t_1}$, $\ldots$, $X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$.

(4) Quelle est, pour tous s et t tels que $0 \leq s < t$, la loi de la variable aléatoire $X_t - X_s$? En déduire $\mathbb{E}[X_t - X_s]$.

(5) Soit $k \geq 1$ tel que $1 \leq k \leq n$. Déterminer la loi conditionnelle de W_k sachant l'événement $\{X_t = n\}$.