Fiche n°5. Martingales.

Exercice 1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et (M_n) une martingale adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)$. Supposons que $\mathbb{E}\left[M_n^2\right] < \infty$ pour tout entier n. On appelle *processus croissant* associé à (M_n) le processus, noté $(\langle M \rangle_n)$, défini par $\langle M \rangle_0 = 0$ et

$$\langle M \rangle_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[(M_k - M_{k-1})^2 | \mathcal{F}_{k-1}\right], \ \forall n \in \mathbf{N}.$$

Notons $\langle M \rangle_\infty \in \overline{\mathbf{R}_+}$ la limite $\langle M \rangle_\infty = \lim_{n\to\infty} \langle M \rangle_n$.

(1) (a) Montrer que

$$\mathbb{E}\left[(M_{n+p} - M_n)^2 | \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[M_{n+p}^2 | \mathcal{F}_n\right] - M_n^2, \ \forall n, p \in \mathbf{N}.$$

(b) Montrer que $\langle M \rangle_n$ est $\mathcal{F}_{n-1}$ mesurable et que $Z_n = M_n^2 - \langle M \rangle_n$ est une martingale.

(c) Montrer qu'avec $\langle M \rangle_0 = 0$, les propriétés ci-dessus caractérisent le processus $(\langle M \rangle_n)$, c'est-à-dire que si V_n est un processus prévisible tel que $V_0 = 0$ et tel que $M_n^2 - V_n$ est une martingale, alors $V_n = \langle M \rangle_n$ p.s..

(2) Soit τ un temps d'arrêt. Montrer que la suite $(\langle M \rangle_{n\wedge\tau})$ est le processus croissant associé à la martingale (M_n^τ) définie par $M_n^\tau = M_{n\wedge\tau}$.

(3) Soit $a > 0$. Montrer que

$$\tau_a = \inf\{n \geq 0 : \langle M \rangle_{n+1} > a\}$$

est un temps d'arrêt.

(4) Montrer que la martingale $(M_{n\wedge\tau_a})$ converge p.s. et dans L^2.

(5) Montrer que sur l'événement $\{\langle M \rangle < \infty\}$, la suite (M_n) converge p.s..

Exercice 2. Un joueur joue à pile ou face avec une pièce non nécessairement équilibrée. On note p la probabilité d'obtenir pile lors d'un jet. Il reçoit un euro de la banque s'il obtient pile et en donne un à la banque s'il obtient face. Sa fortune initiale est de $a \in \mathbf{N}^*$ euros et celle de la banque de $b \in \mathbf{N}^*$ euros. Le joueur joue jusqu'à sa ruine ou celle de la banque. On modélise ce jeu de la manière suivante : (Y_n) est une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes, de même loi $p\delta_1 + q\delta_{-1}$, où $q = 1 - p$. On note S_n la fortune du joueur après n parties pour un jeu qui ne s'arrêterait pas ; on pose

$$S_0 = a \text{ et } S_n = a + \sum_{k=1}^{n} Y_k.$$

En posant $Y_0 = a$, les filtrations naturelles $(\mathcal{F}_n)$ des processus Y et S sont les mêmes. On note T le temps d'arrêt du jeu, c'est-à-dire

$$T = \inf\{n \geq 1 : S_n = 0 \text{ ou } a + b\}.$$

On se pose les trois questions suivantes : quelle est la probabilité $\mathbb{P}(T < \infty)$ que le jeu s'arrête ? Quelle est la probabilité $\rho = \mathbb{P}(S_T = a + b)$ que le joueur gagne ? Quel est le temps moyen $\mathbb{E}[T]$ d'arrêt du jeu ?

(1) Déterminer la nature du processus $S = (S_n)$ suivant les valeurs de ρ.

(2) *Etude du cas $p \neq q$.* On suppose que $p > q$.

(a) Ecrire la décomposition de Doob de la sous-martingale S et préciser son processus croissant prévisible A.

(b) En déduire que $\mathbb{E}[T] < \infty$, préciser la valeur de $\mathbb{P}(T < \infty)$ et donner une expression de $\mathbb{E}[T]$ en fonction de ρ.

(c) On définit, pour $s > 0$, le processus $U = (U_n)$ par $U_n = s^{S_n}$ pour tout entier n. Déterminer s pour que U soit une martingale non constante ; vérifier qu'alors la martingale arrêtée $U^T := (U_{n\wedge T})$ converge p.s. et dans L^1 vers U_T. En déduire les valeurs de ρ et $\mathbb{E}[T]$.

(3) *Etude du cas* $p = \frac{1}{2}$.

(a) Vérifier que S est une martingale de carré intégrable et déterminer son processus croissant prévisible B.

(b) En déduire que $\mathbb{E}[T] < \infty$; préciser alors la valeur de $\mathbb{P}(T < \infty)$.

(c) Vérifier que la martingale arrêtée S^T converge p.s., dans L^1 et dans L^2, vers S_T.

(d) En déduire les valeurs de $\mathbb{E}[S_T]$, ρ et $\mathbb{E}[T]$.

Exercice 3. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires réelles définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes de même loi $p\delta_1 + q\delta_{-1}$, où $q = 1 - p$. On note S_n la fortune d'un joueur après n parties de pile ou face. On suppose que la règle de gain est telle que

$$S_0 = a \text{ et } S_n = a + \sum_{k=1}^{n} Y_{k-1}Y_k.$$

Les processus considérés seront tous relatifs à la filtration naturelle $(\mathcal{F}_n)$ du processus Y.

(1) Calculer la probabilité $\mathbb{P}(S_n > S_{n-1})$ et vérifier qu'elle est strictement supérieure à $\frac{1}{2}$ si $p \neq q$.

(2) (a) Calculer, pour $n \geq 1$, l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}[S_n|\mathcal{F}_{n-1}]$.

(b) Quelle est la nature du processus S lorsque $p = \frac{1}{2}$?

(c) Etudier la convergence de la suite de terme général $\mathbb{E}[S_n]$.

(3) Soit $s > 0$ et $u = s + \frac{1}{s}$.

(a) Calculer, pour $n \geq 1$, l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}\left[s^{S_n}|\mathcal{F}_{n-1}\right]$.

(b) Démontrer que le processus $\left(\frac{s^{S_n}}{u^n}\right)$ est une sur-martingale positive.

(c) Etudier les convergences p.s. et dans L^1 de la suite $\left(\frac{s^{S_n}}{u^n}\right)$.

(4) (a) Démontrer que S s'écrit de manière unique comme somme d'une martingale de carré intégrable W et d'un processus intégrable prévisible T tel que $T_0 = 0$.

(b) Calculer le processus croissant prévisible $\langle W\rangle$ de la martingale W.

(c) Etudier la convergence p.s. de la suite $\left(\frac{S_n}{n}\right)$.

(d) En déduire, dans le cas où $p \neq q$, la convergence p.s. de la suite (S_n).