Université du Littoral Côte d'Opale
Préparation à l'Oral 1
Master 1 MEEF
Année 2022-2023

---

1. Exemples de dénombrements dans différentes situations

Exercice 1. (1) Enoncer puis démontrer la formule du binôme.

(2) Démontrer que pour tous entiers m, n et p tels que $p \leq m+n$, on a

$$\binom{m+n}{p} = \sum_{k=0}^{p} \binom{m}{k}\binom{n}{p-k}.$$

Indication : utiliser le fait que $(1+x)^{m+n} = (1+x)^m(1+x)^n$ et identifier les coefficients.

Exercice 2. Une classe composée de 18 filles et 16 garçons va élire 4 délégués.

(1) Combien existe-t-il de possibilités pour cette élection ?

(2) Emma dit qu'elle ne souhaite pas être élue si Bastien est élu. Dans ces conditions, combien existe-t-il de possibilités ?

2. Expérience aléatoire, probabilité, probabilité conditionnelle

Exercice 3. Un débutant à un jeu effectue plusieurs parties successives. Pour la première partie, les probabilités de gagner ou perdre sont les mêmes. Pour les autres, on suppose que :
— si une partie est gagnée, la probabilité de gagner la suivante est 0.6 ;
— si une partie est perdue, la probabilité de perdre la suivante est 0.7.
Soit G_n l'événement "Le joueur gagne la partie n", et $u_n = \mathbb{P}(G_n)$.

(1) Montrer que $u_{n+1} = 0.3 + 0.3u_n$.

(2) Que peut-on dire de $\mathbb{P}(G_n)$ au bout d'un grand nombre de parties ?

Exercice 4. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé à valeurs dans $\{0,1\}$, dont la loi jointe est donnée par le tableau suivant :

(x,y)	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$\mathbb{P}(X=x, Y=y)$	$\frac{1}{2}-a$	$a+\frac{1}{3}$	b	$\frac{1}{6}-2a$

(1) Quelles valeurs sont autorisées pour a et b ?

(2) Calculer en fonction de a et b les lois marginales de (X,Y).

(3) Déterminer la loi de $X+Y$.

(4) Quelles valeurs de a et b correspondent à un couple (X,Y) de variables indépendantes ?

3. Variables aléatoires discrètes

Exercice 5. Proposer un univers Ω pour les expériences aléatoires suivantes et dénombrer les résultats possibles.

(1) On lance un dé à 6 faces.

(2) On lance un dé à 6 faces et un autre à 20 faces.

(3) On tire trois cartes (sans remise) dans un jeu de 52 cartes.

Exercice 6. Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme (discrète) sur $\{1,\ldots,n\}$, où $n \in \mathbf{N}^*$.

(1) Calculer l'espérance de X.
(2) Calculer la variance de X.

4. Variables aléatoires réelles à densité

Exercice 7. (1) Soit $a > 0$. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad t < 0, \\ a^2 te^{-at} \quad \text{si} \quad t \geq 0, \end{cases}$$

est une densité de probabilité.

(2) La durée de vie T en heures d'un certain type de transistor est une variable aléatoire de densité f avec $a = 5,5 \cdot 10^{-5}$. Calculer la probabilité p que la durée de vie du transistor soit inférieure à 100 heures.

(3) Pour simplifier, on pose désormais $p = 1,5 \cdot 10^{-5}$. Un écran d'ordinateur portable est formé de 1296000 pixels. Chaque pixel est commandé par un transistor du type ci-dessus. On considère que les durées de vie de chacun de ces transistors sont des variables aléatoires indépendantes T_i de même loi à densité f. On note X la variable aléatoire égale au nombre de pixels défectueux au bout de 100 heures de fonctionnement à l'écran.
 (a) Quelle est la loi de X ?
 (b) Par quelle loi discrète peut-on approximer la loi de X ?
 (c) En utilisant cette approximation, évaluer la probabilité qu'au bout de 100 heures de fonctionnement, l'écran ait au moins 2 pixels défectueux.

Exercice 8. Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que pour tous $t, h \geq 0$, on a

$$\mathbb{P}(X > t + h | X > t) = \mathbb{P}(X > h).$$

5. Statistique à une ou deux variables, représentation et analyse de données

Exercice 9. Le tableau ci-dessous représente la distribution d'effectifs du taux de cholestérol de 100 personnes prélevées au hasard dans une population de taille 100.

Taux de cholestérol	Effectifs	Taux de cholestérol	Effectifs
[90, 110[	1	[190, 210[	17
[110, 130[	2	[210, 230[	12
[130, 150[	18	[230, 250[	4
[150, 170[	26	[250, 270[	2
[170, 190[	16	[270, 290[	2

(1) Donner une valeur approchée de la moyenne.
(2) Déterminer la classe modale et en déduire une valeur approchée du mode.
(3) Déterminer l'intervalle médian puis donner une valeur approchée de la médiane de deux façons : d'abord en prenant lui milieu puis en faisant une interpolation linéaire. Laquelle des deux approximations est la meilleure ?

Exercice 10. Le tableau ci-dessous représente la distribution en fréquences du nombre de véhicules par ménages français en 1980 et 2010 (source INSEE).

(1) Calculer les moyennes, premiers et troisièmes quartiles du nombre de véhicules par ménage pour chaque année.
(2) Calculer les variances et les écart-types.
(3) Déterminer les étendues et les étendues inter-quartiles.

Nombre de véhicules	1980	2010
0	29.2%	16.5%
1	54.3%	47.6%
2	14.8%	30.7%
3	1.7%	5.2%

6. Pourcentages et taux d'évolution. Applications

Exercice 11. Le prix d'une certaine quantité augmente de 15% en 1 an. Déterminer le taux mensuel moyen.

Exercice 12. Un chef d'état souhaiterait que la croissance du PIB de son pays atteigne 2% sur l'année. Les études comparables montrent que le PIB a augmenté de 0.5% au premier trimestre, diminue de 0.2% au deuxième trimestre puis augmenté de 1.1% au troisième trimestre. Quelle doit être l'évolution minimale au cours du dernier trimestre de l'année pour que le chef d'état atteigne ses objectifs ?

7. Fonctions polynômes du second degré. Équations et inéquations du second degré. Applications.

Exercice 13. Décomposer dans $\mathbf{R}$ et dans $\mathbf{C}$ les polynômes suivants :

(1) $P = 2X^4 + X^2 - 3$;

(2) $Q = X^4 + 1$.

Exercice 14. Soient f et g les applications définies respectivement par $f(x) = \frac{x^2}{2} - x - 1$ et $g(x) = x + 1$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. Désignons par $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbres représentatives des fonctions f et g. Quelles sont les coordonnées du (des) point(s) d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$?

8. Suites numériques. Limites

Exercice 15. Montrer que toute suite de nombres réels croissante et majorée converge.

Exercice 16. Démontrer, en utilisant la définition de la limite d'une suite, que :

(1) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$;

(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n-3} = 2$;

(3) $\lim_{n\to\infty} \frac{n-5}{2n+5} = \frac{1}{2}$;

(4) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n-1}{2n+3} = \frac{3}{2}$.

9. Suites définies par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Applications

Exercice 17. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue et soit (u_n) une suite définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que si (u_n) converge vers une limite ℓ alors $f(\ell) = \ell$.

Exercice 18. Prenons la suite

$$u_0 = 1 \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{3}{u_n}\right).$$

(1) Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $u_n \geq \sqrt{3}$.

(2) Montrer que la suite est décroissante à partir du rang $n = 1$.

(3) Conclure que la suite est convergente et déterminer sa limite.

10. Limite d'une fonction réelle de variable réelle

Exercice 19. Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbf{R}$ par $f(x) = \frac{x}{1+e^{1/x}}$ et soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote en $+\infty$.

Exercice 20. Considérons la fonction h définie sur $]0, 1]$ par $h(x) = xE(\frac{1}{x})$. Montrer que l'on peut prolonger h par continuité en 0.

11. Théorème des valeurs intermédiaires. Applications

Exercice 21. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $f([0, 1]) \subset [0, 1]$. Montrer qu'il existe au moins un nombre réel x_0 dans $[0, 1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Exercice 22. Montrer que l'équation $\ln x - x + 2 = 0$ possède deux solutions, puis déterminer la première décimale de chacune de ces solutions.

12. Nombre dérivé. Fonction dérivée. Applications

Exercice 23. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \neq 0$, et $f(0) = 0$.

(1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbf{R}$.

(2) Montrer que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$.

Exercice 24. Soit λ un nombre réel et soit $f_\lambda : [0, 1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x} & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2}; \\ 2x + \lambda x^2 & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

(1) Déterminer, s'il existent, les valeurs de λ pour lesquelles f_λ est continue sur $[0, 1]$.

(2) Déterminer, s'il existent, les valeurs de λ pour lesquelles f_λ est dérivable sur $[0, 1]$.

13. Intégrales, primitives

Exercice 25. Calculer $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\mathrm{d}x$ après avoir justifié que l'intégrale existe.

Exercice 26. Soient u et v deux fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$ et f une fonction continue sur $\mathbf{R}$.

(1) On pose $\phi(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\mathrm{d}t$. Montrer que ϕ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et calculer sa dérivée.

(2) Calculer la dérivée de la fonction ψ définie par $\psi(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{1+t^2+t^4}\mathrm{d}t$.