C. R. Acad. Sci. Paris, t. 332, Série I, p. 215–218, 2001
Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Sur certains problèmes elliptiques asymétriques avec poids indéfinis

Margarita ARIAS [a], Juan CAMPOS [a], Mabel CUESTA [b], Jean-Pierre GOSSEZ [c]

[a] **Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Granada, 18071 Granada, Spain**
Courriel : marias@goliat.ugr.es, jcampos@goliat.ugr.es

[b] **LMPA, Université du Littoral, 50, rue F.-Buisson, B.P. 699, 62228 Calais, France**
Courriel : cuesta@lmpa.univ-littoral.fr

[c] **Département de mathématique, C.P. 214, Université Libre de Bruxelles, 1050 Bruxelles, Belgique**
Courriel : gossez@ulb.ac.be

(Reçu le 11 septembre 2000, accepté le 6 novembre 2000)

Résumé. On démontre l'existence d'une première valeur propre non triviale pour le problème (1.2) ci-dessous. Comme application on étudie la solvabilité de (1.1) ci-dessous ainsi que le spectre de Fučik du p-Laplacien avec poids. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

On some asymmetric elliptic problems with indefinite weights

Abstract. *We prove the existence of a first nontrivial eigenvalue for the problem* (1.2) *below. As applications we study the solvability of* (1.1) *below as well as the Fučik spectrum with weights for the p-Laplacien.* © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Introduction

Ce travail est motivé entre autres par l'étude du problème

$$-\Delta_p u = f(x,u) \quad \text{dans } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \tag{1.1}$$

où $\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, $1 < p < \infty$, et où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$. Il est bien connu que le comportement asymptotique de $f(x,s)/|s|^{p-2}s$ et $pF(x,s)/|s|^p$ (où $F(x,s) := \int_0^s f(x,t)\,\mathrm{d}t$) lorsque $s \to +\infty$ et $s \to -\infty$ joue un rôle important dans l'étude de la solvabilité de (1.1). Habituellement, des conditions ponctuelles sont imposées sur les limites de ces quotients. L'un de nos objectifs dans cette Note est de remplacer ces conditions ponctuelles par des conditions plus générales portant sur certaines valeurs propres ayant ces limites comme poids. Cette approche conduit à étudier préalablement le problème aux valeurs propres asymétrique avec poids

$$-\Delta_p u = \lambda\big[m(x)(u^+)^{p-1} - n(x)\,(u^-)^{p-1}\big] \quad \text{dans } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \tag{1.2}$$

Note présentée par Jacques-Louis LIONS.

S0764-4442(00)01784-5/FLA
© 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.

L'étude de (1.2) est classique lorsque $m(x) \equiv n(x)$. Divers travaux ont été consacrés au cas où $m(x)$ et $n(x)$ sont constants et différents, ils ont conduit entre autres à la notion de spectre de Fučik. La situation où $m(x)$ et $n(x)$ sont non constants et différents a été considérée récemment dans le cas $N = 1$: [9,3,12] ($p = 2$, m et $n > 0$), [11] (m et $n > 0$), [1] ($p = 2$, m et n indéfinis). Dans cette Note nous entamons l'étude de (1.2) dans le cas général : $N \geqslant 1$, $1 < p < \infty$, $m(x)$ et $n(x)$ non constants, différents et indéfinis.

Désignons par $\lambda_1(m)$ la première valeur propre positive de $-\Delta_p$ pour le poids m et par φ_m la fonction propre positive correspondante, normalisée par $\int_\Omega m(\varphi_m)^p = 1$. Notre résultat principal concernant (1.2) consiste en la construction d'une valeur propre positive différente de $\lambda_1(m)$ et $\lambda_1(n)$, valeur propre qui se révèle être la première valeur propre positive de (1.2) différente de $\lambda_1(m)$ et $\lambda_1(n)$. Cette valeur propre particulière joue, dans nos problèmes asymétriques, un rôle analogue à celui de la seconde valeur propre des problèmes usuels.

Comme application, nous considérons d'abord le problème (1.1), en suivant l'approche indiquée précédemment. Nous considérons ensuite le spectre de Fučik du p-Laplacien avec poids. Il s'avère que la présence de poids généraux influence de façon substantielle la distribution de ce spectre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ainsi que le comportement asymptotique des premières courbes.

Signalons enfin que tous les résultats de cette Note sont nouveaux même dans le cas $p = 2$. Les démonstrations détaillées sont données dans [2].

2. Première valeur propre non triviale

On supposera toujours que les poids m et n appartiennent à $\mathrm{L}^r(\Omega)$ (où $r > N/p$ si $p \leqslant N$ et $r = 1$ si $p > N$) et vérifient m^+ et $n^+ \not\equiv 0$. On s'intéresse aux valeurs propres positives de (1.2). Clairement, $\lambda_1(m)$ et $\lambda_1(n)$ sont les seules valeurs propres positives principales et toute valeur propre positive non principale est $> \max\{\lambda_1(m), \lambda_1(n)\}$.

Considérons la fonctionnelle $A(u) := \int_\Omega |\nabla u|^p$ et sa restriction $\widetilde{A}$ à la variété $M_{m,n} := \big\{u \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega) : B_{m,n}(u) := \int_\Omega (m(u^+)^p + n(u^-)^p) = 1\big\}$. Les valeurs propres positives de (1.2) sont alors exactement les valeurs critiques de $\widetilde{A}$.

On commence par montrer que φ_m et $-\varphi_n$ sont des minima locaux stricts de $\widetilde{A}$. Pour trouver un troisième point critique de $\widetilde{A}$, on utilise le théorème du col de la montagne sur une variété C^1. On obtient de cette façon le :

THÉORÈME 2.1. – *Soit* $\Gamma := \{\gamma \in \mathrm{C}([-1,+1], M_{m,n}) : \gamma(-1) = \varphi_m$ *et* $\gamma(+1) = -\varphi_n\}$. *Alors*

$$c(m,n) := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in \gamma[-1,+1]} \widetilde{A}(u) \tag{2.1}$$

est valeur critique de $\widetilde{A}$, *et* $c(m,n) > \max\{\lambda_1(m), \lambda_1(n)\}$.

THÉORÈME 2.2. – *Les premières valeurs propres positives de* (1.2) *sont exactement*

$$\min\big\{\lambda_1(m), \lambda_1(n)\big\} \leqslant \max\big\{\lambda_1(m), \lambda_1(n)\big\} < c(m,n).$$

L'idée de la démonstration du théorème 2.2 est la suivante. On suppose par contradiction l'existence d'une valeur propre λ vérifiant $\max\{\lambda_1(m), \lambda_1(n)\} < \lambda < c(m,n)$. On va construire un chemin $\gamma \in \Gamma$ sur lequel $\widetilde{A}$ reste $\leqslant \lambda$, ce qui contredira (2.1). Pour ce faire, soit $u \in M_{m,n}$ une solution de (1.2) correspondant à λ. On se déplace d'abord de u à $v := u^+/(B_{m,n}(u^+))^{1/p}$ par une espèce de combinaison convexe sur la variété $M_{m,n}$ (comme dans [5]) tout en restant au niveau λ. On descend ensuite par un chemin constitué de fonctions $\geqslant 0$ jusqu'à une fonction v_1 qui vérifie $\widetilde{A}(v_1) < \lambda$. La construction ici utilise le fait que v n'est pas point critique de la restriction de A à la variété $M_{m,m}$ ainsi que l'observation que $|w| \in M_{m,m}$ si $w \in M_{m,m}$. Pour poursuivre à partir de v_1, on construit d'abord un poids $\hat{n}$ tel que $\lambda_1(\hat{n}) > \lambda$ et $\hat{n} \leqslant m$;

il s'ensuit que le seul point critique dans $\mathcal{O} := \{u \in M_{m,\hat{n}} : A(u) < \lambda\}$ de la restriction de A à $M_{m,\hat{n}}$ est φ_m. On applique alors une variante du lemme 3.6 de [5] à l'ensemble $\mathcal{O}$, ce qui fournit un chemin ν dans $\mathcal{O}$ allant de v_1 à φ_m. On se ramène ensuite à un chemin de v_1 à φ_m dans la variété initiale $M_{m,n}$ en normalisant le chemin $|\nu|$, et on vérifie enfin que ce nouveau chemin reste aussi à des niveaux $< \lambda$. Une construction analogue de u vers $-\varphi_n$ conduit finalement au chemin cherché.

La valeur propre $c(m,n)$ jouit de diverses propriétés. Elle dépend continûment de $(m,n) \in \mathrm{L}^r(\Omega) \times \mathrm{L}^r(\Omega)$ et est monotone au sens suivant : si $m \leqslant \hat{m}$ et $n \leqslant \hat{n}$, alors $c(m,n) \geqslant c(\hat{m},\hat{n})$, et si en plus $\int_\Omega (\hat{m}-m)(u^+)^p + \int_\Omega (\hat{n}-n)(u^-)^p > 0$ pour au moins une fonction propre u associée à $c(m,n)$, alors $c(m,n) > c(\hat{m},\hat{n})$. Cette monotonie stricte est importante dans les applications, de même que la propriété suivante : si $0 < s < \hat{s}$, alors $c(sm,n) > c(\hat{s}m,n)$ et $c(m,sn) > c(m,\hat{s}n)$.

La démonstration des propriétés précédentes utilise entre autres un lemme disant que dans la situation du théorème du col de la montagne (comme dans (2.1)), tout chemin minimisant contient nécessairement un point critique de niveau égal à celui du col.

Remarque 2.3. – L'existence d'autres valeurs propres positives de (1.2) lorsque $N \geqslant 2$ (par exemple une suite tendant vers $+\infty$) est une question ouverte (même lorsque $p = 2$ et les poids sont constants mais différents).

3. Application à la non-résonance

Soit f une fonction de Carathéodory vérifiant $|f(x,s)| \leqslant a(x)|s|^{p-1} + b(x)$, où $a \in \mathrm{L}^r(\Omega)$ avec r comme précédemment et où $b \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega)$. Appelons $\gamma_\pm(x)$ et $\Gamma_\pm(x)$ (resp. $\delta_\pm(x)$ et $\Delta_\pm(x)$)) les limites inférieures et supérieures de $f(x,s)/|s|^{p-2}s$ (resp. $pF(x,s)/|s|^p$) lorsque $s \to \pm\infty$, ces limites étant supposées uniformes par rapport à x.

THÉORÈME 3.1. – *Supposons* $\lambda_1(\gamma_+) \leqslant 1$, $\lambda_1(\gamma_-) \leqslant 1$, $c(\Gamma_+,\Gamma_-) \geqslant 1$ *ainsi que* $\lambda_1(\delta_+) < 1$, $\lambda_1(\delta_-) < 1$, $c(\Delta_+,\Delta_-) > 1$. *Alors le problème* (1.1) *admet au moins une solution* $u \in \mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$.

Ce résultat se situe dans la ligne de ceux de [4,6,5]. L'amélioration provient de ce que dans ces travaux, les hypothèses sur $\gamma_\pm$, $\Gamma_\pm$, $\delta_\pm$, $\Delta_\pm$ prennent la forme d'inégalités ponctuelles dans Ω. Des conditions de non-résonance portant comme dans le théorème 3.1 sur des valeurs propres avec poids ont déjà été considérées dans [10,7,8]. En particulier, le résultat du théorème 3.1 pour $p = 2$ et sous l'hypothèse plus forte $\lambda_1(\min\{\gamma_+,\gamma_-\}) \leqslant 1$, $\lambda_2(\max\{\Gamma_+,\Gamma_-\}) \geqslant 1$, $\lambda_1(\min\{\delta_+,\delta_-\}) < 1$, $\lambda_2(\max\{\Delta_+,\Delta_-\}) > 1$ a été obtenu dans [8] (λ_2 désigne ici la seconde valeur propre positive du Laplacien avec poids).

Le théorème 3.1 garantit en particulier l'existence d'une solution pour le problème

$$-\Delta u = m(x)u^+ - n(x)u^- + h(x) \quad \text{dans } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

où $h \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, si $\lambda_1(m) < 1$, $\lambda_1(n) < 1$ et $c(m,n) > 1$. On peut montrer que cette solution est unique lorsque $\lambda_1(\min\{m,n\}) < 1$ et $\lambda_2(\max\{m,n\}) > 1$; mais il n'y a pas nécessairement unicité lorsque $\lambda_1(m) < 1$, $\lambda_1(n) < 1$ et $\lambda_2(\max\{m,n\}) > 1$, ou lorsque $\lambda_1(\min\{m,n\}) < 1$ et $c(m,n) > 1$.

La démonstration du théorème 3.1 est basée sur l'application du théorème du col de la montagne à la fonctionnelle $p^{-1}\int_\Omega |\nabla u|^p - \int_\Omega F(x,u)$ sur l'espace $\mathrm{W}_0^{1,p}(\Omega)$.

4. Spectre de Fučik avec poids

Ce spectre est défini comme l'ensemble $\Sigma(m,n)$ des $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$-\Delta_p u = \alpha m(x)(u^+)^{p-1} - \beta n(x)(u^-)^{p-1} \quad \text{dans } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

a une solution non triviale u. On désignera par $\Sigma^*(m,n)$ l'ensemble $\Sigma(m,n)$ amputé des droites $\lambda_1(m) \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \times \lambda_1(n)$ (et éventuellement $\lambda_{-1}(m) \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \times \lambda_{-1}(n)$, où λ_{-1} désigne la première valeur propre négative du p-Laplacien avec poids).

Il suit facilement des théorèmes 2.1 et 2.2 que pour chaque $s > 0$, la droite $\beta = s\alpha$ intersecte $\Sigma^* \cap (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$ et que le premier point d'intersection est donné par $\alpha(s) = c(m, sn)$ et $\beta(s) = s\alpha(s)$. En laissant varier s, on obtient de cette façon une *première courbe* $\mathcal{C}$ dans $\Sigma^* \cap (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$. Les propriétés de $c(m, n)$ entraînent que cette courbe est de type hyperbole : elle est continue, strictement décroissante, avec des asymptotes $\alpha_\infty \times \mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \times \beta_\infty$. Les niveaux de ces asymptotes sont donnés par la :

PROPOSITION 4.1. – *Si $p \leqslant N$, alors $\alpha_\infty = \lambda_1(m)$ et $\beta_\infty = \lambda_1(n)$. Si $p > N$, alors $\alpha_\infty = \lambda_1(m)$ si le support de n^+ intersecte $\partial\Omega$, mais $\alpha_\infty > \lambda_1(m)$ si le support de n^+ est compact dans Ω. Résultat analogue pour β_∞, qui fait intervenir le support de m^+.*

Considérons finalement la distribution de $\Sigma(m, n)$ dans les autres quadrants.

PROPOSITION 4.2. – *Si m et n changent chacun de signe dans Ω, alors $\Sigma(m, n)$ contient une première courbe de type hyperbole dans chaque quadrant.*

Notons que les résultats des propositions 4.1 et 4.2 ont été obtenus récemment lorsque $N = 1$, $p = 2$ dans [1] par une méthode de shooting.

Références bibliographiques

[1] Alif M., Gossez J.-P., On the Fučik spectrum with indefinite weights, Differ. Int. Eq. (to appear).
[2] Arias M., Campos J., Cuesta M., Gossez J.-P., Asymmetric elliptic problems with indefinite weights, (to appear).
[3] Campos J., Espectro de Fučik para operadores elipticos, Thèse, Universidad de Granada, 1996.
[4] Costa D., Oliveira A., Existence of solutions for a class of semilinear problems at double resonance, Boll. Soc. Bras. Mat. 19 (1988) 21–37.
[5] Cuesta M., De Figueiredo D., Gossez J.-P., The beginning of the Fučik spectrum of the p-Laplacian, J. Differ. Eq. 159 (1999) 212–238.
[6] De Figueiredo D., Gossez J.-P., On the first curve of the Fučik spectrum of an elliptic operator, Differ. Int. Eq. 7 (1994) 1285–1302.
[7] De Figueiredo D., Massabo I., Semilinear elliptic equations with the primitive of the nonlinearity interacting with the first eigenvalue, J. Math. Anal. Appl. 156 (1991) 381–394.
[8] De Figueiredo D., Miyagaki O., Semilinear elliptic equations with the primitive of the nonlinearity away from the spectrum, Nonlin. Anal., TMA 17 (1991) 1201–1219.
[9] Drabek P., Solvability and Bifurcations of Nonlinear Equations, Pitman Research Notes in Mathematics, Vol. 264, 1992.
[10] Fonda A., Gossez J.-P., Semicoercive variational problems at resonance: an abstract approach, Differ. Int. Eq. 3 (1990) 695–708.
[11] Reichel W., Walter W., Sturm–Liouville type problems for the p-Laplacian under asymptotic nonresonance conditions, J. Differ. Eq. 156 (1999) 50–70.
[12] Rynne B., The Fučik spectrum of general Sturm–Liouville problems, J. Differ. Eq. 161 (2000) 87–109.