BAYREUTHER MATHEMATISCHE SCHRIFTEN

ISSN 0172-1062 Heft 27, 1988

P. Deuring, W. von Wahl, P. Weidemaier

Das lineare Stokes-System in $\mathbf{R}^3$

I. Vorlesungen über das Innenraumproblem

Schriftleitung: Prof. Dr. A. Kerber, Lehrstuhl II für Mathematik
Postfach 3008 8580 Bayreuth, W.-Deutschland

Das lineare Stokes-System in $\mathbb{R}^3$.

I. Vorlesungen über das Innenraumproblem

Paul Deuring
Wolf von Wahl
Peter Weidemaier

Bayreuth 1988

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Ein mathematisches Modell für die Strömung einer zähen, inkompressiblen Flüssigkeit im Raum wird durch das Navier-Stokes-System in $\mathbb{R}^3$ gegeben:

$$
(1)\quad \begin{cases} \partial/\partial_t \vec{u}(x,t) - \nu \cdot \Delta_x \vec{u}(x,t) + \left(\sum_{l=1}^{3} u_l(x,t) \cdot \partial/\partial x_l u_j(x,t) \right)_{1 \le j \le 3} \\ \qquad + \nabla_x \pi(x,t) = f(x,t), \\ \sum_{l=1}^{3} \partial/\partial x_l u_l(x,t) = 0, \\ \text{für } x \in A,\ t \in (0,T). \end{cases}
$$

Hierbei ist A entweder ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^3$ (Innenraumproblem), oder aber das Komplement $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ zum Abschluß eines solchen Gebietes (Außenraumproblem). Gesucht werden die Funktionen $\vec{u}$ und π, wobei der Vektor $\vec{u}(x,t)$ die Geschwindigkeit und der Skalar $\pi(x,t)$ den Druck der Flüssigkeit an der Stelle x zum Zeitpunkt t beschreibt. Man kann (1) für den Fall $T \in (0,\infty)$ betrachten (Lösung für einen endlichen Zeitraum), oder aber den Fall $T = \infty$ untersuchen (Lösung für alle Zeiten; globale Lösung).

Die Funktion $\vec{f}$ ist vorgegeben und steht im Modell für eine äußere Kraft (z.B. die Schwerkraft). ν ist eine feste Zahl aus $(0,\infty)$ und hat die Bedeutung einer physikalischen Konstanten (kinematische Viskosität). Die erste Gleichung in (1) ergibt sich aus der Bewegungsgleichung für ein Flüssigkeitsteilchen. Die zweite Gleichung bringt zum Ausdruck, daß die betrachtete Flüssigkeit inkompressibel ist. Genauere Informationen über die physikalische Bedeutung des Navier-Stokes-Systems findet man etwa in [Gr], S. 203 ff., oder in [Fl], S. 149 ff.

Um das Gleichungssystem (1) sinnvoll lösen zu können, muß für $\vec{u}$ noch eine Rand- und eine Anfangsbedingung vorgeschrieben werden. Als Randbedingung wählt man oft Dirichlet-Null-Randbedingungen:

(2) $\vec{u}|\partial\Omega\times(0,T) = 0.$

Anschaulich besagt Gleichung (2), daß sich die Flüssigkeit am Rande von A nicht bewegt (Haftbedingung).

Als Anfangsbedingung verlangt man, daß zur Zeit t =0 die Geschwindigkeit der Flüssigkeit bekannt ist:

(3) $\vec{u}(x,0) = \vec{u}_0(x)$ für $x \in A$,

für eine vorgegebene Funktion $\vec{u}_0$ auf A.

Als Anfangs-Randwertproblem (1)-(3) bot Anlaß zu zahlreichen mathematischen Untersuchungen; siehe etwa die Literaturangaben in [Wa]. Viele dieser Arbeiten stützen sich auf Ergebnisse, welche das lineare Stokes-System in $\mathbb{R}^3$ betreffen. Dieses System hat folgende Form:

$$(4) \begin{cases} -\nu\cdot\Delta\vec{u}(x) + \nabla\pi(x) = f(x), \\ \sum_{i=1}^{3} \partial/\partial x_i u_i(x) = 0, \text{ für } x \in A. \end{cases}$$

Wiederum ist A gleich Ω oder gleich $\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}$, wobei Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^3$ bezeichnet. Das bedeutet, daß (4) ebenfalls für Innen- und Außenraumfall betrachtet wird. Der Randbedingung (2) entspricht jetzt die Gleichung

(5) $\vec{u}|\partial\Omega = 0.$

Wir bemerken, daß dem System (4) ebenfalls eine physikalische Bedeutung zukommt. Es beschreibt die Strömung einer zähen, inkompressiblen Flüssigkeit, unter der zusätzlichen Annahme, daß die Stromlinien zeitlich unverändert (stationär) bleiben, und daß die Geschwindigkeit (genauer: die Reynoldsche Zahl) klein ist ("schleichende" Strömung; siehe [Gr], S. 205, 381; [Fl], S. 153).

Grundlegende, oft zitierte Ergebnisse zu (4), (5) findet man im Buch von Ladyzhenskaya [L]. Allerdings werden in [L] die Beweise zu diesen Ergebnissen nur skizziert. In einer Vorlesung von Prof. von Wahl, die sich über das Wintersemester 85/86 und das Sommersemester 86 erstreckte, wurden diese Beweise ausgeführt. Ferner wurde die Helmholtz-Zerlegung von $L_p(\mathbb{R}^3)^3$ mittels der Bogovskij-Methode behandelt. Schließlich wurden diese Ergebnisse auf das Navier-Stokes-Problem (1)-(3) angewandt.

In der vorliegenden Arbeit soll nun diese Vorlesung ausgearbeitet werden, soweit sie sich auf das lineare Stokes-System (4), (5) bezieht. Die übrigen Teile der Vorlesung sollen in einer weiteren Arbeit behandelt werden.

Unsere Darstellung ist auf Studenten mittlerer Semester ausgerichtet. Sie setzt jedoch einige Resultate aus der Analysis voraus, die im Mathematikstudium meist nicht angesprochen werden. Wir denken dabei an den Satz von Calderón-Zygmund, die Hardy-Littlewood-Sobolev-Ungleichung, die Ungleichung von Hölder-Korn-Lichtenstein-Giraud, Sätze über den Trace-Operator, sowie L_p-Abschätzungen zum Laplace-Operator über beschränkten Gebieten. Wir werden versuchen, zu diesen Resultaten solche Literaturstellen anzugeben, welche einen möglichst elementaren Zugang ermöglichen. In dieser Hinsicht wird der Fachmann beim letzten Ergebnis - bei den L_p-Abschätzungen zum Laplace-Operator - Bedenken haben. Wir bemerken jedoch, daß Simader, Sohr [SiSo] dieses Ergebnis mit elementaren Hilfsmitteln aufarbeiten.

Entgegen den sonst üblichen Konventionen entschlossen wir uns, zu unterscheiden zwischen Lebesgue-meßbaren Funktionen einerseits, und Äquivalenzklassen solcher Funktionen (bezüglich der Relation "fast überall gleich") andererseits. Wir folgen hierin Forster [F3]. Ohne diese Unterscheidung, so hatten wir den Eindruck, würden einige Stellen für den Neuling unglaubwürdig erscheinen. Als Beispiel sei der Beweis von Lemma 7.12 angeführt. Dort verbinden wir L_p-Abschätzungen zum Laplace-Operator und klassisches Maximumprinzip - eine scheinbar unvereinbare Kombination, denn das erste Ergebnis macht Aussagen über Äquivalenzklassen von Funktionen, während das zweite für solche Klassen keinen Sinn ergibt. Selbstverständlich löst sich dieser Widerspruch auf bekannte Art: Die betrachteten Äquivalenzklassen enthalten Repräsentanten, welche genügend glatt sind.

Um das Anfangswertproblem (4), (5) zu lösen, verwendet Ladyzhenskaya [L] die Integralgleichungsmethode. Bei dieser Methode wird eine Lösung $(\vec{u},\pi)$ zu (4), (5) im Innenraumfall so angesetzt:

$$(6)\quad u_j(x) := \int_\Omega \sum_{k=1}^{3} E_{jk}(x-y)\cdot f_k(y)\,dy + \int_{\partial\Omega} \sum_{k,l=1}^{3} (-\delta_{kl}\cdot E_{j4}+\nu\cdot D_k E_{lj}+\nu\cdot D_l E_{kj})(x-y) \cdot\phi_k(y)\cdot n_l(y)\,d\Omega(y),$$

$$(6')\quad \pi(x) := \int_\Omega \sum_{k=1}^{3} E_{4k}(x-y)\cdot f_k(y)\,dy + \int_{\partial\Omega} \sum_{k,l=1}^{3} 2\cdot\nu\cdot D_l E_{4k}(x-y)\cdot\phi_k(y)\cdot n_l(y)\,d\Omega(y),$$

für $1 \le j \le 3$, $x \in \Omega$. Hierbei bezeichnet E_{jk}, für $1 \le j,k \le 3$, eine Funktion aus $C^\infty(\mathbb{R}^3\setminus\{0\})$, die explizit angegeben wird ("Grund-

lösung"). Weiter steht $\vec{n}$ für die äußere Einheitsnormale an Ω. Die Funktion $\vec{\phi}$ schließlich, die auf der rechten Seite von (6) und (6') erscheint, muß eine gewisse Integralgleichung erfüllen. Letzteres erklärt den Namen der hier beschriebenen Methode. Zu der Summe aus Volumenintegral und Doppelschichtpotential, wie sie in (6) und (6') auftritt, kommt im Außenraumfall noch ein weiteres Randintegral - ein Einfachschichtpotential.

Die Volumenintegrale in (6), (6'), als Funktionen $\vec{v},p$ von x aufgefaßt, lösen die Gleichungen in (4) für den Innenraumfall:

$$-\nu\cdot\Delta\vec{v}+\nabla p = \vec{f},\ \operatorname{div}\vec{v} = 0 \text{ auf } \Omega.$$

Im Allgemeinen erfüllt $\vec{v}$ jedoch nicht die Randbedingung (5). Die deshalb notwendige Korrektur der Randwerte wird durch das Doppelschichtpotential in (6) geleistet - bei geeigneter Wahl von $\vec{\phi}$. Die Gültigkeit der Gleichungen in (4) werden durch die Doppelschichtpotentiale in (6), (6') nicht gestört, denn wenn man diese Potentiale als Funktionen $\vec{w},q$ von x auffaßt, so gilt:

$$-\nu\cdot\Delta\vec{w}+\nabla q = 0,\ \operatorname{div}\vec{w} = 0 \text{ in } \Omega.$$

Die so konstruierten Lösungen lassen sich in L_p-Normen abschätzen. Genauer kann man beim Innenraumfall zeigen, daß folgende Abschätzung für eine Lösung $(\vec{u},\pi)$ von (4), (5) gilt:

$$(7)\quad \|\vec{u}\|_{2,p}+\|\pi\|_{1,p} \le c\cdot\|\vec{f}\|_p,$$

wobei c nur von p und Ω abhängt. Die Ausdrücke $\|\ \|_{2,p}$, $\|\ \|_{1,p}$, $\|\ \|_p$ bezeichnen die jeweiligen Normen der Sobolev-Räume $W^{2,p}(\Omega)^3$, $W^{1,p}(\Omega)$, $L_p(\Omega)^3$ (siehe § 1).

Wir werden im folgenden eine Lösung zu (4), (5) für Innen- und Außenraumfall konstruieren, sowie eine Abschätzung vom Typ (7) für den Innenraumfall beweisen. Im Außenraumfall wird sich eine Abschätzung dieser Form im allgemeinen nicht herleiten lassen. Zu diesem Problem, das in [L] nicht behandelt wird, verweisen wir auf [DW].

Wir möchten nicht versäumen, Frau R. Göttgens für die sorgfältige Niederschrift des Manuskripts zu danken, insbesondere auch dafür, daß sie alle nachträglichen Änderungen geduldig eingearbeitet hat.

Bezeichnungen

$\mathbb{R}$ sei die Menge der reellen Zahlen, $\mathbb{C}$ die der komplexen Zahlen. $\mathbb{N}$ stehe für die Menge der natürlichen Zahlen ohne die Null. Es sei $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Zu $a,b \in \mathbb{R}$ sei $a \wedge b := \min\{a,b\}$, $a \vee b := \max\{a,b\}$.

Wie üblich, setzen wir $\delta_{ij} := 0$ für $i,j \in \mathbb{N}$ mit $i \neq j$, $\delta_{ii} := 1$ für $i \in \mathbb{N}$ (Kronecker-Symbol).

Sei A eine Menge. Eine Abbildung $f: \mathbb{N} \to A$, d.h. eine Folge mit Werten in A, schreiben wir in der Form (a_n), wobei $a_n = f(n)$ für $n \in \mathbb{N}$ gelten soll.

Sei $n \in \mathbb{N}$. Zu $i \in \{1,\dots,n\}$ sei $e_i := e_i^{(n)}$ der i-te Einheitsvektor im $\mathbb{R}^n$. Das innere Produkt von zwei Elementen a,b aus $\mathbb{R}^n$ wird mit $\langle a,b \rangle$ bezeichnet, ebenso das innere Produkt von $a,b \in \mathbb{C}^n$. Die euklidische Norm in $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ schreiben wir als $|\ |$.

Ist $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_n) \in \mathbb{N}_0^n$, so setzen wir

$$|\beta|_* := \beta_1 + \dots + \beta_n \quad \text{(Länge von } \beta\text{)}.$$

Für $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, $R \in (0,\infty)$ sei

$$K_R(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| < R\},$$

$$W(x,R) := \{y \in \mathbb{R}^n : |x_i - y_i| < R \text{ für } 1 \le i \le n\}.$$

Für $A,B \subset \mathbb{R}^n$ setzen wir

$$\mathrm{dist}(A,B) := \inf\{|x-y| : x \in A,\ y \in B\}.$$

Zu $A \subset \mathbb{R}^n$ sei $\bar{A}$ der Abschluß, ∂A der Rand von A bezüglich der euklidischen Norm des $\mathbb{R}^n$.

Ist $k \in \mathbb{N}$ und f eine Abbildung von A in $\mathbb{R}^k$ oder $\mathbb{C}^k$, so bezeichne f_i die i-te Koordinatenfunktion von f.

Zu $i \in \{1,2\}$ sei A_i Menge, und f_i bilde A_i in $\mathbb{R}^k$ oder $\mathbb{C}^k$ ab. Dann ist der Definitionsbereich von f_1+f_2, f_1-f_2, $f_1 \cdot f_2$ die Menge $A_1 \cap A_2$. Gilt $A_2 \subset A_1$, so bezeichne $f_1|A_2$ die Restriktion von f_1 auf A_2. Für Mengen A,B,C,D mit $B \subset C$, und für Abbildungen $f:A \to B$, $g:C \to B$, schreiben wir die Verknüpfung von f und g in der Form $g \circ f$.

Sei $m,n \in \mathbb{N}$. Ist A eine $(m \times n)$-Matrix in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, so sei A_{ij} das Element in der i-ten Zeile und in der j-ten Spalte von A. A^T sei die transponierte Matrix zu A. Ist A invertierbar, so wird die inverse Matrix zu A mit A^{-1} bezeichnet. Elemente aus $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ werden als einspaltige Matrizen aufgefaßt.

Sei $n,k \in \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{R}^n$. Für eine Funktion f von A in $\mathbb{R}^k$ oder $\mathbb{C}^k$ setzt man

$$\mathrm{Tr}\, f := \overline{\{x \in A: f(x) \neq 0\}};$$

$$|f|_0 := \sup\{|f(x)|: x \in A\};$$

sowie für $\alpha \in (0,1)$:

$$H_\alpha(f) := \sup\{|f(x)-f(y)| \cdot |x-y|^{-\alpha}: x,y \in A,\ x \neq y\};$$

$$|f|_\alpha := |f|_0 + H_\alpha(f).$$

Wir definieren ferner

$$C^0(A) := \{f:A \to \mathbb{C}: f \text{ stetig}\};$$

$$C^\alpha(A) := \{f:A \to \mathbb{C}: |f|_\alpha < \infty\}.$$

Sei $n \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei f eine Funktion von U in $\mathbb{K}^k \in \{\mathbb{R}^k, \mathbb{C}^k\}$. Wenn für einen Index $i \in \{1,\dots,n\}$ und für ein Element $x \in U$ der Grenzwert $\lim\limits_{h \to 0} (f(x+he_i)-f(x))/h$ existiert, so wird er mit $\partial/\partial x_i f(x)$ bezeichnet. Existiert dieser Grenzwert für alle $x \in U$, so definiert man die Abbildung $D_i f: U \to \mathbb{K}^k$ durch

$$D_i f(x) := \partial/\partial x_i f(x),\ x \in U.$$

Für $l \in \mathbb{N}$, $i_1,\dots,i_l \in \{1,\dots,n\}$ definiert man $D_{i_1} \dots D_{i_l} f$ durch Rekursion. Existieren $D_1 f, D_2 f, \dots, D_n f$, so bezeichnet df/dX die Funktionalmatrix von f, als Funktion von U in $\mathbb{K}^{k \times n}$. Wir setzen $D_i^0 f := f$, für $1 \le i \le n$. Falls $i \in \{1,\dots,n\}$, $l \in \mathbb{N}$, und falls die l-fach iterierte Ableitung $D_i \dots D_i f$ existiert, so schreiben wir diese in der Form $D_i^l f$. Schließlich setzen wir für $a \in \mathbb{N}_0^n$: $D_a f := D_1^{a_1} \dots D_n^{a_n} f$, falls diese Ableitung existiert.

Sei wiederum $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ mit $U \subset A \subset \overline{U}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $k \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{N}_0^n$, $f: A \to \mathbb{K}^k$ Funktion. Die Ableitung $D_a(f|U)$ existiere, sei stetig sowie stetig fortsetzbar auf A. Dann bezeichnet $\underbrace{D_1 \dots D_1}_{a_1\text{-mal}} \dots \underbrace{D_n \dots D_n}_{a_n\text{-mal}} f$ oder $D_1^{a_1} \dots D_n^{a_n} f$ oder $D_a f$ diese stetige Fortsetzung.

Zu $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ setzen wir

$$C^m(U) := \Big\{f \in C^0(U): \text{Zu } a \in \mathbb{N}_0^n \text{ mit } |a|_* \le m \text{ existiert die Ableitung } D_a f \text{ und ist stetig}\Big\};$$

$$C_0^m(U) := \Big\{f \in C^m(U): \mathrm{Tr}\, f \subset U,\ \mathrm{Tr}\, f \text{ kompakt}\Big\}.$$

Ist wiederum $A \subset \mathbb{R}^n$ mit $U \subset A \subset \bar{U}$, so definiert man

$$C^m(A) := \left\{ f \in C^o(A) : f|U \in C^m(U);\ \text{für } a \in \mathbb{N}_o^n \text{ mit } |a|_* \leq m \right.$$
$$\left. \text{ist } D_a(f|U) \text{ stetig fortsetzbar auf } A. \right\}.$$

Weiter sei für $f \in C^m(A)$, im Fall $m < \infty$:

$$|f|_m := \sum_{\substack{a \in \mathbb{N}_o^n \\ |a|_* \leq m}} |D_a f|_o.$$

Ist $f \in C^1(A)$, so schreiben wir anstatt $(D_1 f, \dots, D_n f)$ nur grad f oder ∇f. Für $f \in C^2(A)$ setzen wir $\Delta f := \sum_{i=1}^{n} D_i D_i f$. Entsprechende Schreibweisen sollen für schwache Ableitungen gelten, die in § 1 eingeführt werden.

Für $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0,1)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^m(\bar{U})$ setzen wir

$$|f|_{m,\alpha} := |f|_m + \sum_{a \in \mathbb{N}_o^n, |a|_* = m} H_\alpha(D_a f).$$

Es sei

$$C^{m,\alpha}(\bar{U}) := \left\{ f \in C^m(\bar{U}) : |f|_{m,\alpha} < \infty \right\}.$$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Der Rand $\partial\Omega$ von Ω sei so glatt, daß Lebesgue-Integration über $\partial\Omega$ möglich ist (siehe etwa [RT3] §§ 63,84). Dann bezeichnet $\int_{\partial\Omega} f\, d\Omega$, oder $\int_{\partial\Omega} f(x)\, d\Omega(x)$, das Integral einer Funktion $f: \partial\Omega \to \mathbb{K}$ (mit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$), falls dieses Integral existiert. Im Fall $f \equiv 1$ bezeichnen wir dieses Integral mit $\mathrm{Vol}(\partial\Omega)$. Ist Ω

eine Kugel $K_R(x)$ in $\mathbb{R}^n$, so schreiben wir Integrale über $\partial\Omega$ in der Form $\int_{\partial K_R(x)} f(y)\, do_y$. Unter $\mathrm{Vol}(\Omega)$ verstehen wir das Integral $\int_\Omega dx$.

Alle Vektorräume, insbesondere alle Hilbert- und Banachräume, sind als Vektorräume über $\mathbb{C}$ zu verstehen.

§ 1. Das lineare Stokes-System im $\mathbb{R}^3$

Wir wiederholen zunächst einige Ergebnisse über schwache Ableitungen und Sobolev-Räume.

Sei $\| \ \|$ eine Abbildung von einem Vektorraum $\mathcal{B}$ in $[0,\infty]$. Dann definiert man

$$\| \ \|^{(3)}: \mathcal{B}^3 \ni (b_1,b_2,b_3) \to (\|b_1\|^2+\|b_2\|^2+\|b_3\|^2)^{1/2} \in [0,\infty],$$

wobei $\infty^{1/2} := \infty$ zu setzen ist. Wir werden allerdings den Index $^{(3)}$ meist weglassen.

Es ist $\|b_i\| \le \|b\|$ für $b \in \mathcal{B}^3$, $i \in \{1,2,3\}$. Wenn $(\mathcal{B},\| \ \|)$ ein Banachraum ist, so gilt dies auch für $(\mathcal{B}^3,\| \ \|)$. Speziell im Fall, daß $\mathcal{B}$ ein Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist mit Skalarprodukt $(\ , \ )$, so ist auch $\mathcal{H}^3$ ein Hilbertraum, wenn man $\mathcal{H}^3$ mit dem Skalarprodukt

$$(a,b)^{(3)} := \sum_{i=1}^{3} (a_i,b_i) \qquad (a,b \in \mathcal{H}^3)$$

versieht. Die zum Skalarprodukt $(\ , \ )^{(3)}$ gehörende Norm ist gerade $\| \ \|^{(3)}$. Wir werden meist nur $(\ , \ )$ statt $(\ , \ )^{(3)}$ schreiben.

Sei $N \in \mathbb{N}$, $B \subset \mathbb{R}^N$ offen. Auf dem $\mathbb{C}$-Vektorraum

$$\mathcal{F}_B := \{f: B \to \mathbb{C}: f \text{ Lebesgue-meßbar}\}$$

definiert man eine Äquivalenzrelation $\sim$, indem man für $f,g \in \mathcal{F}_B$ festsetzt: $f \sim g$ genau dann, wenn $f = g$ f.ü.

Zu $f \in \mathcal{F}_B$ sei $[f] := [f]_B$ die zu f gehörende Äquivalenzklasse bzgl. $\sim$. Das bedeutet:

$$[f] = \{g \in \mathcal{F}_B: f-g = 0 \text{ f.ü.}\}.$$

$\mathcal{F}_B \setminus \sim$ bezeichne den zu $\sim$ gehörenden Restklassenraum.

Zu $\vec{f}: B \to \mathbb{C}^3$ mit $f_1,f_2,f_3 \in \mathcal{F}_B$ sei

$$[\vec{f}] := ([f_1],[f_2],[f_3]).$$

Sei $p \in [1,\infty)$. Setze

$$\| \ \|_p: \mathcal{F}_B \ni f \to \Big(\int_B |f|^p \, dx\Big)^{1/p} \in [0,\infty],$$

wobei $\infty^{1/p} = \infty$ zu verstehen ist. Weiter definieren wir

$$\mathcal{L}_p(B) := \{f \in \mathcal{F}_B: \|f\|_p < \infty\}.$$

Für $F \in \mathcal{F}_B \setminus \sim$ gilt: Für alle $g \in F$ nimmt $\|g\|_p$ denselben Wert an. Somit kann man für F aus dem Restklassenraum $\mathcal{F}_B \setminus \sim$ definieren: $\|F\|_p^* := \|f\|_p$, wobei f ein beliebiges Element aus F ist. Im Folgenden schreiben wir $\| \ \|_p$ statt $\| \ \|_p^*$. Wir setzen

$$L_p(B) := \{[f]: f \in \mathcal{L}_p(B)\}.$$

$L_p(B)$ ist ein Unterraum von $\mathcal{F}_B \setminus \sim$ und $(L_p(B), \| \ \|_p | L_p(B))$ ist ein Banachraum.

Wir definieren ferner

$$\mathcal{L}_{p,loc}(B) := \{f \in \mathcal{F}_B: \text{Für alle offenen Mengen } A \text{ in } \mathbb{R}^N \text{ mit } \bar{A} \subset B \text{ ist } f|A \in \mathcal{L}_p(A)\}.$$

Für $F \in \mathcal{F}_B \setminus \sim$ gilt: $f \in \mathcal{L}_{p,loc}(B)$ für ein $f \in F$ genau dann, wenn $f \in \mathcal{L}_{p,loc}(B)$ für alle $f \in F$. Deshalb ist klar, wie der Unterraum $L_{1,loc}(B)$ von $\mathcal{F}_B \setminus \sim$ zu definieren ist.

Weiter erinnern wir an den Begriff der schwachen Ableitung: Sei $F \in L_{1,loc}(B)$, $\beta \in \mathbb{N}_0^N$. Wenn es $h \in \mathcal{L}_{1,loc}(B)$ gibt mit

$$\int_B f\cdot D_\beta\phi\,dx = (-1)^{|\beta|}\cdot\int_B h\cdot\phi\,dx \text{ für alle } f\in F,\ \phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N),$$

so heißt $D_\beta F := [h]$ "die schwache Ableitung der Ordnung β von F". Es ist sinnvoll, von "der" schwachen Ableitung von F zu sprechen, da es nur eine Äquivalenzklasse $H\in F_B$ gibt, so daß obige Bedingung für eine, und damit für jede Funktion $h\in H$ zutrifft.

Sei $f\in\mathcal{L}_{1,loc}(B)$, $\beta\in\mathbb{N}_0^N$. Dann benutzen wir die Sprechweise: "Die schwache Ableitung $D_\beta f$ existiert". Damit meinen wir, daß die schwache Ableitung $D_\beta[f]$ existiert und daß $D_\beta f\in D_\beta[f]$.

Als nächstes erläutern wir unsere Bezeichnungen für Sobolevräume:

Sei $m\in\mathbb{N}$, $F\in L_{1,loc}(B)$. Die schwachen Ableitungen $D_\alpha F$ für $\alpha\in\mathbb{N}_0^N$ mit $1\le|\alpha|\le m$ sollen existieren. Dann setzt man

$$\|F\|_{m,p} := \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N,\,|\alpha|\le m}\|D_\alpha F\|_p,$$

wobei $D_0F := F$ zu verstehen ist.

Sei $f\in\mathcal{L}_{1,loc}(B)$, so daß $D_\alpha f$ existiert für $\alpha\in\mathbb{N}_0^N$ mit $1\le|\alpha|\le m$. Dann definiert man

$$\|f\|_{m,p} := \|[F]\|_{m,p};$$

das heißt:

$$\|f\|_{m,p} = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^N,\,|\alpha|\le m}\|D_\alpha f\|_p, \text{ mit } D_0f := f.$$

Weiter sei

$W^{m,p}(B) := \{F\in L_{1,loc}(B)$: Die schwachen Ableitungen $D_\alpha F$ existieren für $\alpha\in\mathbb{N}_0^N$ mit $1\le|\alpha|\le m$, und es ist $\|F\|_{m,p}<\infty.\}$,

$$\mathcal{W}^{m,p}(B) := \{f\in\mathcal{L}_{1,loc}(B): [f]\in W^{m,p}(B)\}.$$

$(W^{m,p}(B), \|\ \|_{m,p}|W^{m,p}(B))$ ist ein Banachraum. Dieser Banachraum wird als "Sobolevraum der Ordnung m zum Exponenten p" bezeichnet. (Zum Beweis der bisher aufgeführten Ergebnisse siehe etwa [A].)

Schließlich wollen wir noch bemerken, wie wir die Faltung zweier Funktionen bezeichnen: Seien $f,g:\mathbb{R}^N\to\mathbb{C}$ meßbare Funktionen; für fast alle $x\in\mathbb{R}^N$ soll das Integral $\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\cdot g(y)dy$ existieren. Dann definieren wir die Faltungsabbildung $f*g:\mathbb{R}^N\to\mathbb{C}$ durch

$f*g(x) := \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)\cdot g(y)dy$, falls dieses Integral existiert;

$f*g(x) := 0$ sonst.

Im Folgenden beweisen oder zitieren wir technische Hilfsmittel, die wir anschließend benötigen, um Lösungen zum linearen Stokes-Problem im $\mathbb{R}^3$ zu konstruieren.

Lemma 1.1: Sei $N\in\mathbb{N}$, $B\subset\mathbb{R}^N$ offen, $r\in[1,\infty]$, $s\in[1,r]$, $f\in\mathcal{L}_1(B)\cap\mathcal{L}_r(B)$. Dann ist $f\in\mathcal{L}_s(B)$ und $\|f\|_s\le\|f\|_1+\|f\|_r$.

Beweis: Siehe [GT] (7.10). □

Satz 1.1: Zu $N\in\mathbb{N}$, $\gamma\in\mathbb{R}$ sei definiert:

$$G_{N,\gamma}: \mathbb{R}^N\setminus\{0\}\ni z\to|z|^\gamma\in\mathbb{R}.$$

Sei $N\in\mathbb{N}$, $\alpha\in(0,N)$, $p\in(1,N/(N-\alpha))$. Setze $q := (\alpha/N-1+1/p)^{-1}$. Zu $f\in\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^N)$ existiert dann die Faltung $G_{N,-\alpha}*f$, und es gibt eine Konstante $P_1(N,\alpha,p)>0$, so daß für $f\in\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^N)$ gilt:

$$\|f*G_{N,-\alpha}\|_q \le P_1(N,\alpha,p)\cdot\|f\|_p$$

(Hardy-Littlewood-Sobolev-Abschätzung).

Beweis: Siehe [J], Aufgabe 11.7, [BJS], S. 242 ff. □

L $r\in(1,3/2)$,

H-l

Lemma 1.2: ~~Sei $r\in[6/5,\infty)$~~ Zu $f\in\mathcal{L}_r(\mathbb{R}^3)$ existiert dann $f*G_{3,-1}$ und $f*G_{3,-2}$. L zu $r\in(1,3)$, $f\in\mathcal{L}_r(\mathbb{R}^3)$ existiert

Setze $P_2(s):=P_1(3,1,(1/s+2/3)^{-1})$, $P_3(s):=P_1(3,2,(1/s+1/3)^{-1})$, für $s>1$, mit P_1 aus Satz 1.1.

H$(1,\infty)$

Sei $r\in$ ~~$[6/5,\infty]$~~, $f\in\mathcal{L}_r(\mathbb{R}^3)\cap\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^3)$.

Dann gilt im Fall $r\ge 3/2$ für $s\in(3,\infty)$, im Fall $r<3/2$ für $s\in(3,(1/r-2/3)^{-1}]$:

$$\|f*G_{3,-1}\|_s \le P_2(s)\cdot\|f\|_{(1/s+2/3)^{-1}}$$

Für $t\in(3/2,(1/r-1/3)^{-1}]$ ist L im Fall $r<3$, $t\in(3/2,\infty)$ im Fall $r\geq 3$

$$\|f*G_{3,-2}\|_t \le P_3(t)\cdot\|f\|_{(1/t+1/3)^{-1}}.$$

$\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$

Beweis: Sei $s\in(3,\infty)$, falls $r\ge 3/2$, und $s\in(3,(1/r-2/3)^{-1}]$ im Fall $r<3/2$. Dann ist $(1/s+2/3)^{-1}\in[1,r]$, so daß $f\in\mathcal{L}_{(1/s+2/3)^{-1}}$ L nach Lemma 1.1. Weiterhin ist $(1/s+2/3)^{-1}$ aus $(1,3/2)$ und

$$s=(1/3-1+1/(1/s+2/3))^{-1},$$

so daß aus Satz 1.1 folgt: $f*G_{3,-1}$ existiert,

$$\|f*G_{3,-1}\|_s \le P_1(3,1,(1/s+2/3)^{-1})\cdot\|f\|_{(1/s+2/3)^{-1}}.$$

L im Fall $r<3$, $t\in(3/2,\infty)$ im Fall $r\geq 3$

LL

Sei $t\in(3/2,(1/r-1/3)^{-1}]$ L. Dann ist $(1/t+1/3)^{-1}\in[1,r]$, so daß $f\in\mathcal{L}_{(1/t+1/3)^{-1}}(\mathbb{R}^3)$ (Lemma 1.1), und es ist

L $t=(2/3-1+1/(1/t+1/3))^{-1}$. L $(1/t+1/3)^{-1}\in(1,3)$ und

Jetzt folgt aus Satz 1.1: $f*G_{3,-2}$ existiert; es ist

$$\|f*G_{3,-2}\|_t \le P_1(3,2,(1/t+1/3)^{-1})\cdot\|f\|_{(1/t+1/3)^{-1}}.$$ □

Lemma 1.3: Sei $N\in\mathbb{N}$, $\theta_N\in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ mit $\theta_N(\mathbb{R}^N)\subset\mathbb{R}$, $\operatorname{Tr}\theta_N\subset K_1(0)$, $\theta_N\ge 0$, $\int_{\mathbb{R}^N}\theta_N\,dy=1$ (siehe etwa [RT2], S. 228). Zu $\varepsilon>0$ sei $\theta_N^\varepsilon:\mathbb{R}^N\ni x\to\varepsilon^{-N}\cdot\theta_N(\varepsilon^{-1}x)\in\mathbb{R}$. Sei $B\subset\mathbb{R}^N$ offen. Zu $\varepsilon>0$, $h\in\mathcal{L}_{1,loc}(B)$ sei $h_\varepsilon:\mathbb{R}^N\ni x\to\int_{\mathbb{R}^N}\theta_N^\varepsilon(x-y)\cdot\tilde{h}(y)\,dy\in\mathbb{C}$ (Friedrichsche Glättung), wobei $\tilde{h}$ die triviale Fortsetzung von h auf $\mathbb{R}^N$ bezeichnet.

Es ist $h_\varepsilon\in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ für $h\in\mathcal{L}_{1,loc}(B)$.

Ist f eine Funktion von B in $\mathbb{R}^N$, so sei $f_\varepsilon:=((f_1)_\varepsilon,\dots,(f_N)_\varepsilon)$, für $\varepsilon>0$.

Sei $\beta\in\mathbb{N}_0^N$, $s\in[1,\infty)$, $h\in\mathcal{L}_{1,loc}(\mathbb{R}^3)$; die schwache Ableitung $D_\beta h$ existiere und sei aus $\mathcal{L}_s(\mathbb{R}^3)$. Dann gilt:

(1.1) $\|D_\beta h_\varepsilon - D_\beta h\|_s\to 0$ $(\varepsilon\downarrow 0)$, $D_\beta h_\varepsilon=(D_\beta h)_\varepsilon$ für $\varepsilon>0$.

(1.2) Sei $\alpha\in(0,1)$, $f\in C_\alpha(\mathbb{R}^N)$ mit kompaktem Träger, (ε_n) Folge in $(0,\infty)$ mit $\varepsilon_n\to 0$. Dann gibt es eine streng monoton wachsende Abbildung $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ mit $\|f-f_{\varepsilon_{\sigma(n)}}\|_{\alpha/2}\to 0$ $(n\to\infty)$.

Zu $\varepsilon > 0$, $h \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^N)$ sei

$$h_{(\varepsilon)}: \mathbb{R}^N \ni x \to \int_{\mathbb{R}^N} \theta_N^{\varepsilon}(x-y) \cdot h(y) \cdot \chi_{K_{1/\varepsilon}(0)}(y)\, dy \in \mathbb{C}.$$

(1.3) Sei $s \in [1,\infty)$, $h \in L_s(\mathbb{R}^N)$. Dann ist $h_{(\varepsilon)} \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ für $\varepsilon > 0$, und es gilt: $\|h-h_{(\varepsilon)}\|_s \to 0 \quad (\varepsilon \downarrow 0)$.

(1.4) Seien $A, A' \subset \mathbb{R}^N$ offen mit $A \subset A'$. Sei $u \in L_{1,loc}(A')$ und $\beta \in \mathbb{N}_0^N$. Die schwache Ableitung $D_\beta u$ existiere. Dann existiert auch die schwache Ableitung $D_\beta(u|A)$, und es ist $D_\beta(u|A) = (D_\beta u)|A$ f.ü.

Beweis:

Zu (1.1): Siehe [F], S. 13/ 14.

Zu (1.2): Für alle $n \in \mathbb{N}$, $x,y \in \mathbb{R}^N$ ist

$$|f_{\varepsilon_n}(x) - f_{\varepsilon_n}(y)| = \left|\int_{\mathbb{R}^N} \theta_N^{\varepsilon_n}(z) \cdot (f(x-z) - f(y-z))\, dz\right|$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^N} \theta_N^{\varepsilon_n}(z)\, dz \cdot H_\alpha(f) \cdot |x-y|^\alpha = H_\alpha(f) \cdot |x-y|^\alpha.$$

Weil außerdem

$$|f_{\varepsilon_n}(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} \theta_N^{\varepsilon_n}(z)\, dz \cdot |f|_0 = |f|_0, \text{ folgt:}$$

(1.5) $|f_{\varepsilon_n}|_\alpha \leq |f|_\alpha$ für $n \in \mathbb{N}$.

Es gibt $R > 0$ mit $\operatorname{Tr} f \subset K_R(0)$. O.E. sei $\varepsilon_n \leq 1$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\operatorname{Tr} f_{\varepsilon_n} \subset K_{R+1}(0)$ für $n \in \mathbb{N}$.

Weil $\overline{K_{R+2}(0)}$ kompakt und $|f_{\varepsilon_n}|\overline{K_{R+2}(0)}|_\alpha \leq |f|_\alpha$ für $n \in \mathbb{N}$ (wegen (1.5)), gibt es eine streng monoton wachsende Abbildung $\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und eine Funktion $g \in C_{\alpha/2}(\overline{K_{R+2}(0)})$ mit $|f_{\varepsilon_{\sigma(n)}}|\overline{K_{R+2}(0)} - g|_{\alpha/2} \to 0$ $(n \to \infty)$ (siehe [A], 1.31). Wegen $f \in C^0(\mathbb{R}^N)$ gilt andererseits: $|(f_{\varepsilon_{\sigma(n)}} - f)|K_{R+2}(0)|_0 \to 0$ $(n \to \infty)$ (siehe [A], 2.18). Somit: $|(f_{\varepsilon_{\sigma(n)}} - f)|K_{R+2}(0)|_{\alpha/2} \to 0$ $(n \to \infty)$. Weil $\operatorname{Tr} f_{\varepsilon_{\sigma(n)}}$, $\operatorname{Tr} f \subset K_{R+1}(0)$, folgt hieraus: $|f_{\varepsilon_{\sigma(n)}} - f|_{\alpha/2} \to 0$ $(n \to \infty)$.

Zu (1.3): Für $\varepsilon > 0$ ist

$$\|h-h_{(\varepsilon)}\|_r = \|h-h_\varepsilon\|_r + \|h_\varepsilon - h_{(\varepsilon)}\|_r.$$

Nun gilt aber: $\|h-h_\varepsilon\|_r \to 0$ $(\varepsilon \downarrow 0)$ ([A], 2.18); ferner:

$$\|h_\varepsilon - h_{(\varepsilon)}\|_r = \|(h \cdot (1-\chi_{K_{1/\varepsilon}(0)}))_\varepsilon\|_r \leq \|h \cdot (1-\chi_{K_{1/\varepsilon}(0)})\|_r$$

für $\varepsilon > 0$ (zur letzten Abschätzung siehe [A], 2.18), wobei $\|h \cdot (1-\chi_{K_{1/\varepsilon}(0)})\|_r \to 0$ $(\varepsilon \downarrow 0)$. Somit hat man: $\|h-h_{(\varepsilon)}\| \to 0$ $(\varepsilon \downarrow 0)$.

Zu (1.4): Die Behauptung folgt sofort aus der Definition der schwachen Ableitung. □

Lemma 1.4: Sei $N \in \mathbb{N}$, $r,s \in [1,\infty)$, $G \subset \mathbb{R}^N$ offen, $u, u_n \in L_r(G)$ für $n \in \mathbb{N}$, mit $\|u-u_n\|_r \to 0$ $(n \to \infty)$. Sei $\beta \in \mathbb{N}_0^N$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ soll die schwache Ableitung $D_\beta u_n$ existieren, mit $D_\beta u_n \in L_s(\mathbb{R}^N)$. Es gebe $v \in L_s(G)$ mit $\|D_\beta u_n - v\|_s \to 0$ $(n \to \infty)$.

Dann existiert die schwache Ableitung $D_\beta u$, und es ist $D_\beta u = v$ f.ü.

Beweis: Sei $\phi \in C_o^\infty(G)$. Dann ist

$$\int_G u\cdot D_\beta\phi\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_G u_n\cdot D_\beta\phi\, dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty}(-1)^{|\beta|}\cdot\int_G D_\beta u_n\cdot\phi\, dx = (-1)^{|\beta|}\int_G v\cdot\phi\, dx.$$

Hier gilt die erste und vierte Gleichung, weil $\|u_n-u\|_r \to 0$, $\|D_\beta u_n - v\|_s \to 0 \quad (n\to\infty)$. □

Lemma 1.5: Sei $N\in\mathbb{N}$, $r,r'\in(1,\infty)$ mit $1/r+1/r' = 1$. Sei $v\in L_{2,loc}(\mathbb{R}^n)$, $w\in L_{r',loc}(\mathbb{R}^N)\cap L_{2,loc}(\mathbb{R}^N)$. Zu $k\in\{1,\dots,N\}$ sollen die schwachen Ableitungen $D_k v$, $D_k w$ existieren, mit $D_k v\in L_r(\mathbb{R}^N)$, $D_k w\in L_{2,loc}(\mathbb{R}^N)$.

Sei $\xi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^N)$. Dann gilt für $k\in\{1,\dots,N\}$:

$$\int_{\mathbb{R}^N} D_k v\cdot w\cdot\xi\, dx = -\int_{\mathbb{R}^N} v\cdot D_k w\cdot\xi\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} v\cdot w\cdot D_k\xi\, dx.$$

Beweis: Sei $k\in\{1,\dots,N\}$. Für $n\in\mathbb{N}$ ist

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} D_k v\cdot w\cdot\xi\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} D_k v\cdot(w\cdot\xi)_{1/n}\, dx\right|$$

$$\le \int_{\mathbb{R}^N} |D_k v|\cdot|w\cdot\xi-(w\cdot\xi)_{1/n}|\, dx$$

$$\le \|D_k v\|_r\|w\cdot\xi-(w\cdot\xi)_{1/n}\|_{r'}.$$

Da $w\cdot\xi\in L_{r'}(\mathbb{R}^N)$, gilt: $\|w\cdot\xi-(w\cdot\xi)_{1/n}\|_{r'}\to 0 \quad (n\to\infty)$. Somit hat man:

$$(1.6)\quad \int_{\mathbb{R}^N} D_k v\cdot w\cdot\xi\, dx = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} D_k v\cdot(w\cdot\xi)_{1/n}\, dx$$

$$= \lim_{n\to\infty}(-1)\cdot\int_{\mathbb{R}^N} v\cdot D_k((w\cdot\xi)_{1/n})\, dx.$$

Die letzte Gleichung gilt nach Definition der schwachen Ableitung.

Weil $\xi\in C_o^\infty(\mathbb{R}^N)$, existiert die schwache Ableitung $D_k(w\cdot\xi)$, und es ist

$$(1.7)\quad D_k(w\cdot\xi) = D_k w\cdot\xi + w\cdot D_k\xi.$$

Gemäß (1.1) gilt für $n\in\mathbb{N}$:

$$D_k((w\cdot\xi)_{1/n}) = (D_k(w\cdot\xi))_{1/n}.$$

Somit folgt aus (1.6):

$$(1.8)\quad \int_{\mathbb{R}^N} D_k v\cdot w\cdot\xi\, dx = \lim_{n\to\infty}(-1)\cdot\int_{\mathbb{R}^N} v\cdot(D_k(w\cdot\xi))_{1/n}\, dx.$$

Wegen (1.7), und weil $\xi\in C_o^\infty(\mathbb{R}^N)$, $D_k w, w\in L_{2,loc}(\mathbb{R}^N)$, haben wir: $D_k(w\cdot\xi)\in L_2(\mathbb{R}^N)$, und daraus:

$$\|D_k(w\cdot\xi)-(D_k(w\cdot\xi))_{1/n}\|_2 \to 0 \qquad (n\to\infty).$$

Jetzt ergibt sich wegen $v\in L_{2,loc}(\mathbb{R}^N)$:

$$(1.9)\quad \int_{\mathbb{R}^N} v\cdot D_k(w\cdot\xi)\, dx = \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N} v\cdot(D_k w\cdot\xi)_{1/n}\, dx.$$

Aus (1.8) und (1.9) folgt:

$$\int_{\mathbb{R}^N} D_k v\cdot w\cdot\xi\, dx = -\int_{\mathbb{R}^N} v\cdot D_k(w\cdot\xi)\, dx.$$

Wegen (1.7) ist dies die Behauptung. □

<u>Lemma 1.6:</u> <u>Sei eine Funktion</u> $j_o \in C_o^\infty(\mathbb{R})$ <u>mit</u> $j_o(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, $0 \le j_o \le 1$, $j_o|[-1,1] = 1$, $j_o|\mathbb{R}\setminus[-2,2] = 0$ <u>fest gewählt</u>.

<u>Zu</u> $k \in \mathbb{N}$ <u>sei</u> $\zeta_k : \mathbb{R}^3 \ni x \to j_o(|x|/k) \in \mathbb{R}$. <u>Dann ist</u> $\zeta_k \in C_o^\infty(\mathbb{R}^3)$ <u>mit</u> $\operatorname{Tr} \zeta_k \subset K_{2k}(0)$ <u>und</u> $\zeta_k|K_k(0) = 1$ $(k \in \mathbb{N})$.

<u>Zu</u> $p \in [1,\infty)$ <u>gibt es</u> $P_4(p) > 0$, <u>so daß</u>

$$\int_{\mathbb{R}^3} |D_l\zeta_k|^p \, dx \le P_4(p)\cdot k^{-p+3}$$

<u>und</u> $|D_l\zeta_k|_o \le P_4(1)\cdot k^{-1}$ $(k \in \mathbb{N},\ l \in \{1,2,3\},\ p \in [1,\infty))$.

<u>Beweis:</u> Sei $p \in [1,\infty)$, $k \in \mathbb{N}$, $l \in \{1,2,3\}$. Dann ist für $x \in \mathbb{R}^3\setminus\{0\}$:

$$|D_l\zeta_k(x)|^p = |j_o'(|x|/k)\cdot x_k/(k\cdot|x|)|^p$$

$$\le k^{-p}\cdot|j_o'(|x|/k)|^p,$$

wobei $j_o'(|x|/k) = 0$, falls $|x| < k$ oder $|x| \ge 2k$. Damit folgt:

$$\int_{\mathbb{R}^3} |D_l\zeta_k(x)|^p \, dx \le \int_{K_{2k}(0)\setminus K_k(0)} k^{-p}\cdot|j_o'(|x|/k)| \, dx$$

$$\le k^{-p}\cdot|j_o'|_o\cdot 4\pi\cdot\frac{1}{3}\cdot((2k)^3-k^3)$$

$$= P_4(p)\cdot k^{-p+3},$$

mit $P_4(p) := |j_o'|_o\cdot 28\pi/3$. Beachte, daß

$|D_l\zeta_k|_o \le k^{-1}\cdot|j_o'|_o \le P_4(1)$, für $l \in \{1,2,3\}$, $k \in \mathbb{N}$. □

Von nun an sei ν eine fest gewählte Zahl aus $(0,\infty)$.

<u>Lemma 1.7:</u> <u>Zu</u> $j,k \in \{1,2,3\}$ <u>sei</u>

$$E_{jk} : \mathbb{R}^3\setminus\{0\} \ni z \to (8\cdot\pi\cdot\nu)^{-1}\cdot(\delta_{jk}\cdot|z|^{-1} + z_j\cdot z_k\cdot|z|^{-3}) \in \mathbb{R},$$

$$E_{4k} : \mathbb{R}^3\setminus\{0\} \ni z \to (4\cdot\pi)^{-1}\cdot z_k\cdot|z|^{-3} \in \mathbb{R}.$$

<u>Für</u> $j,k \in \{1,2,3\}$ <u>ist</u>

$$(1.10)\quad -\nu\cdot\Delta E_{jk} + D_jE_{4k} = 0, \qquad \sum_{l=1}^{3} D_lE_{lk} = 0.$$

<u>Für</u> $j,k,l \in \{1,2,3\}$, $x \in \mathbb{R}^3\setminus\{0\}$, $\varepsilon > 0$ gilt:

$$(1.11)\quad D_lE_{jk}(\varepsilon\cdot x) = \varepsilon^{-2}\cdot D_lE_{jk}(x),\quad E_{4k}(\varepsilon\cdot x) = \varepsilon^{-2}\cdot E_{4k}(x).$$

Ferner haben wir für $j,k \in \{1,2,3\}$:

$$(1.12)\quad \int_{\partial K_1(0)} \{(-\nu)\cdot\sum_{l=1}^{3}(y_l\cdot D_lE_{jk}(y)) + y_j\cdot E_{4k}(y)\}\, do_y = \delta_{jk}.$$

(1.13) <u>Es gibt eine Konstante</u> $P_5 > 0$, <u>so daß</u>

$|E_{jk}(z)| \le P_5\cdot|z|^{-1}$, $|D_lE_{jk}(z)| + |E_{4k}(z)| \le P_5\cdot|z|^{-2}$,

$|D_mD_lE_{jk}(z)| + |D_lE_{4k}(z)| \le P_5\cdot|z|^{-3}$ $, |D_nD_mD_lE_{jk}(z)| + |D_mD_lE_{4k}(z)| \le P_5\,|z|^{-4}$

<u>für</u> $z \in \mathbb{R}^3\setminus\{0\}$, j,k,l,m $, n$ $\in \{1,2,3\}$.

<u>Beweis:</u> (1.10)-(1.12) bestätigt man durch Nachrechnen. Beim Beweis von (1.10) kann man ausnutzen, daß $\Delta_z(|z|^{-1}) = 0$ für $z \in \mathbb{R}^3\setminus\{0\}$. Zum Beweis von (1.11) verwende man, daß für $j,k \in \{1,2,3\}$ gilt:

$$\int_{\partial K_1(0)} \eta_j \cdot \eta_k \, do_\eta = (\delta_{jk}/3) \cdot \int_{\partial K_1(0)} do_\eta = \delta_{jk} \cdot 4 \cdot \pi/3.$$

Hl Durch Ausrechnen der Ableitungen ~~$D_1E_{jk}, D_1D_mE_{jk}, D_1E_{4k}$ $(1 \le j,k,l,m \le 3)$~~ bestätigt man, daß (1.13) mit

Hl ~~$P_5 := (8 \cdot \pi \cdot \nu)^{-1} \cdot 36 + \pi^{-1}$~~ erfüllt ist. □

H(1,∞) **Lemma 1.8:** Zu $r \in$ ~~$[6/5,\infty)$~~, $j,k,l \in \{1,2,3\}$, $f \in L_r(\mathbb{R}^3)$ $\cap L_1(\mathbb{R}^3)$ existieren $E_{jk}*f$, $D_lE_{jk}*f$ und $E_{4k}*f$.

Setze $P_6(s) := P_5 \cdot P_2(s)$, $P_7(s) := P_5 \cdot P_3(s)$ für $s > 1$, mit P_5 aus Lemma 1.7, P_2, P_3 aus Lemma 1.2.

H(1,∞) Sei $r \in$ ~~$[6/5,\infty)$~~, $f \in L_r(\mathbb{R}^3) \cap L_1(\mathbb{R}^3)$.

Dann gilt im Fall $r \ge 3/2$ für $s \in (3,\infty)$, im Fall $r < 3/2$ für $s \in (3,(1/r-2/3)^{-1}]$, sowie für $1 \le j,k \le 3$:

$$\|E_{jk}*f\|_s \le P_6(s) \cdot \|f\|_{(1/s+2/3)^{-1}}.$$

Weiter ist für $t \in (3/2,(1/r-1/3)^{-1}]$ im Fall $r<3$, $t \in (3/2,\infty)$ im Fall $r \ge 3$, $1 \le j,k,l \le 3$:

$$\|D_lE_{jk}*f\|_t + \|E_{4k}*f\|_t \le P_7(t) \cdot \|f\|_{(1/t+1/3)^{-1}}.$$

Beweis: Für $j,k,l \in \{1,2,3\}$, $x,y \in \mathbb{R}^3$ mit $x \neq y$ ist nach (1.13):

$$|E_{jk}(x-y) \cdot f(y)| \le P_5 \cdot G_{3,-1}(x-y) \cdot |f(y)|,$$

$$|D_lE_{jk}(x-y) \cdot f(y)| + |E_{4k}(x-y) \cdot f(y)| \le P_5 \cdot G_{3,-2}(x-y) \cdot |f(y)|,$$

mit $G_{3,-1}$, $G_{3,-2}$ aus Satz 1.1.

Damit folgt die Behauptung aus Lemma 1.2. □

Lemma 1.9: Sei $j,k,l,m \in \{1,2,3\}$. Dann gilt:

(1.14) $D_mD_lE_{jk}, D_lE_{4k} \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$;

(1.15) $D_mD_lE_{jk}(t \cdot z) \cdot t^3 = D_mD_lE_{jk}(z)$, Ll

$D_lE_{4k}(t \cdot z) \cdot t^3 = D_lE_{4k}(z)$ für $z \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, $t > 0$; Ll

(1.16) $\int_{\partial K_1(0)} D_mD_lE_{jk}(z) \cdot |z|^3 \, do_z =$

$= \int_{\partial K_1(0)} D_lE_{4k}(z) \cdot |z|^3 \, do_z = 0.$

Beweis: (1.14) ist klar.

Für $t > 0$, $z \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ gilt (siehe (1.11)):

$$D_lE_{jk}(t \cdot z) \cdot t^2 = D_lE_{jk}(z), \quad E_{4k}(t \cdot z) \cdot t^2 = E_{4k}(z).$$

Nach [BJS], S. 223 folgt daraus (1.15) und (1.16). (1.15) und (1.16) können aber auch ohne weiteres direkt nachgerechnet werden. □

Satz 1.2 (Calderòn-Zygmund): Sei $N \in \mathbb{N}$, $Q \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ mit $Q(t \cdot z) \cdot t^N = Q(z)$ für $z \in \mathbb{R}^N$, $t > 0$;

$$\int_{\partial K_1(0)} Q(y) \, do_y = 0.$$

Zu $\varepsilon > 0$, $p \in (1,\infty)$, $f \in L_p(\mathbb{R}^N)$ setzt man

$$A(Q,\varepsilon)(f) : \mathbb{R}^N \ni x \to \int_{\mathbb{R}^N \setminus K_\varepsilon(x)} Q(x-y) \cdot f(y) \, dy \in \mathbb{C}.$$

Für $p \in (1,\infty)$, $f \in L_p(\mathbb{R}^N)$, $\varepsilon > 0$ ist dann $A(Q,\varepsilon)(f) \in L_p(\mathbb{R}^N)$, und es gibt eine Funktion $A(Q)(f) \in L_p(\mathbb{R}^N)$ mit

$$\|A(Q,\varepsilon)(f)-A(Q)(f)\|_p \to 0 \text{ für } \varepsilon \downarrow 0.$$

Dies bedeutet insbesondere: Zu $p \in (1,\infty)$, $f \in L_p(\mathbb{R}^N)$ gibt es eine Folge (ε_n) in $(0,\infty)$ mit $\varepsilon_n \downarrow 0$, $A(Q,\varepsilon_n)(f) \to A(Q)(f)$ $(n \to \infty)$ f.ü.

Zu $p \in (1,\infty)$ gibt es $P_8(p,Q) > 0$, so daß

$$\|A(Q)(f)\|_p \leq P_8(p,Q) \cdot \|f\|_p \quad \text{für } f \in L_p(\mathbb{R}^N).$$

Beweis: Siehe etwa [N], S. 82-83, 104-111, [Alt], S. 227. □

Satz 1.3: Sei $N \in \mathbb{N}$, $Q \in C^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ mit $Q(t \cdot z) \cdot t^N = Q(z)$ für $z \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, $t > 0$;

$$\int_{\partial K_1(0)} Q(y)\, do_y = 0.$$

Ist $f \in C^0(\mathbb{R}^N)$ mit Tr f kompakt und $|f|_\alpha < \infty$ für ein $\alpha \in (0,1)$, so existiert der Grenzwert $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} A(Q,\varepsilon)(f)(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^N$.
Die Funktion

$$B(Q)(f): \mathbb{R}^N \ni x \to \lim_{\varepsilon \downarrow 0} A(Q,\varepsilon)(f)(x) \in \mathbb{C}$$

ist also wohldefiniert. Es gibt nun zu $\alpha \in (0,1)$, $R > 0$ eine Zahl $P_9(\alpha,Q,R)$, so daß für $f \in C_\alpha(\mathbb{R}^N)$ mit Tr $f \subset K_R(0)$ gilt:

$$|B(Q)(f)|_\alpha \leq P_9(\alpha,Q,R) \cdot |f|_\alpha.$$

(Ungleichung von Hölder-Korn-Lichtenstein-Giraud).

Beweis: Siehe [BJS], S. 244, [Alt], S. 225. □

Gemäß Lemma 1.9 kann man Satz 1.2 und 1.3 auf den Fall $Q = D_m D_1 E_{jk}$ bzw. $Q = D_1 E_{4k}$ anwenden. Insbesondere sind die Operatoren $A(D_m D_1 E_{jk},\varepsilon)$, $A(D_m D_1 E_{jk})$, $B(D_m D_1 E_{jk})$ definiert, ebenso $A(D_1 E_{4k})$, $B(D_1 E_{4k})$ $(1 \leq j,k,1,m \leq 3,\ \varepsilon > 0)$.

Weiterhin bemerken wir, daß in der Situation von Satz 1.2 und 1.3 für $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ die Funktionen $A(Q)(\varphi)$ und $B(Q)(\varphi)$ definiert sind, und daß gilt: $A(Q)(\varphi) = B(Q)(\varphi)$ f.ü.

Lemma 1.10: Sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, $j,k,1,m \in \{1,2,3\}$. Dann ist $E_{jk} * \varphi$, $E_{4k} * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, und es gilt:

$$D_1(E_{jk} * \varphi) = (D_1 E_{jk}) * \varphi.$$

Weiter gilt für $x \in \mathbb{R}^3$:

$$D_m D_1 (E_{jk} * \varphi)(x) = B(D_1 D_m E_{jk})(\varphi)(x) + \varphi(x) \cdot \int_{\partial K_1(0)} y_m \cdot D_1 E_{jk}(y)\, do_y,$$

$$D_1 (E_{4k} * \varphi)(x) = B(D_1 E_{4k})(\varphi)(x) + \varphi(x) \cdot \int_{\partial K_1(0)} y_1 \cdot E_{4k}(y)\, do_y.$$

Beweis: Wegen (1.13) und wegen $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ existieren die Faltungen $E_{\nu k} * D_a \varphi$, $D_1 E_{jk} * D_a \varphi$, für $\nu \in \{4,j\}$, $a \in \mathbb{N}_0^3$. Man überlegt sich leicht, daß die Integrale

$$\int_{\mathbb{R}^3} E_{\nu k}(x-y) D_a \varphi(y)\, dy, \quad \int_{\mathbb{R}^3} D_1 E_{jk}(x-y) D_a \varphi(y)\, dy,$$

$(\nu \in \{4,j\},\ a \in \mathbb{N}_0^3)$ sogar für alle $x \in \mathbb{R}^3$ existieren. Es folgt:

(1.17) Die Grenzwerte $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^3\setminus K_\varepsilon(0)} E_{\nu k}(y)\cdot D_a\varphi(x-y)\,dy$, bzw.

$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^3\setminus K_\varepsilon(0)} D_1E_{jk}(y)\cdot D_a\varphi(x-y)\,dy$ existieren und sind gleich $(E_{\nu k}*D_a\varphi)(x)$ bzw. $(D_1E_{jk}*D_a\varphi)(x)$, für alle $x\in\mathbb{R}^3$.

Aus (1.13) und wegen $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ folgt außerdem, daß $E_{\nu k}*\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ und

(1.18) $D_a(E_{\nu k}*\varphi)(x) = E_{\nu k}*D_a\varphi(x)$ für $x\in\mathbb{R}^3$, $a\in\mathbb{N}_0^3$, $\nu\in\{4,j\}$.

Für $x\in\mathbb{R}^3$, $\varepsilon>0$, $\Psi\in C_0^0(\mathbb{R}^3)$ ist wegen (1.13):

$$\left|\int_{\partial K_\varepsilon(0)} E_{jk}(y)\cdot\Psi(x-y)\cdot y_1/|y|\,do_y\right|$$

$$\le P_5\cdot|\Psi|_0\cdot\int_{\partial K_\varepsilon(0)} |y|^{-1}do_y \quad = P_5\cdot|\Psi|_0\cdot 4\cdot\pi\cdot\varepsilon,$$

so daß

(1.19) $\int_{\partial K_\varepsilon(0)} E_{jk}(y)\cdot\Psi(x-y)\cdot y_1/|y|\,do_y \to 0$ für $\varepsilon\downarrow 0$.

Nun findet man für $x\in\mathbb{R}^3$:

$$D_1(E_{jk}*\varphi)(x) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{\mathbb{R}^3\setminus K_\varepsilon(0)} E_{jk}(y)\cdot D_1\varphi(x-y)\,dy$$

(wegen (1.17), (1.18))

$$= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\Big(\int_{\mathbb{R}^3\setminus K_\varepsilon(0)} D_1E_{jk}(y)\cdot\varphi(x-y)\,dy + \int_{\partial K_\varepsilon(0)} E_{jk}(y)\cdot\varphi(x-y)\cdot y_1/|y|\,do_y\Big)$$

(Beachte: φ hat kompakten Träger)

$$= (D_1E_{jk}*\varphi)(x) \qquad \text{(wegen (1.17), (1.19))}.$$

Man stellt weiter fest, daß für $x\in\mathbb{R}^3$, $\varepsilon>0$ gilt:

$$\left|\int_{\partial K_\varepsilon(0)} D_1E_{jk}(y)\cdot\varphi(x-y)\cdot y_m/|y|\,do_y - \varphi(x)\cdot\int_{\partial K_1(0)} D_1E_{jk}(z)\cdot z_m\,do_z\right|$$

$$= \left|\int_{\partial K_\varepsilon(0)} D_1E_{jk}(y)\cdot y_m/|y|\cdot(\varphi(x-y)-\varphi(x))\,do_y\right|$$

(wegen (1.11))

$$\le \sup\{|\varphi(x)-\varphi(x-y)|:\ y\in\partial K_\varepsilon(0)\}\cdot P_5\cdot 4\pi \qquad \text{(wegen (1.13))},$$

so daß wegen der Stetigkeit von φ folgt:

(1.20) $\int_{\partial K_\varepsilon(0)} D_1E_{jk}(y)\cdot\varphi(x-y)\cdot y_m/|y|\,do_y - \varphi(x)\cdot\int_{\partial K_1(0)} D_1E_{jk}(z)\cdot z_m\,do_z \to 0$ $(\varepsilon\downarrow 0)$, für $x\in\mathbb{R}^3$.

Damit gilt für $x\in\mathbb{R}^3$:

$$D_1D_m(E_{jk}*\varphi)(x) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{\mathbb{R}^3\setminus K_\varepsilon(0)} E_{jk}(y)\cdot D_1D_m\varphi(x-y)\,dy \qquad \text{(siehe (1.17), (1.18))}$$

$$= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\Big(\int_{\mathbb{R}^3\setminus K_\varepsilon(0)} D_1E_{jk}(y)\cdot D_m\varphi(x-y)\,dy + \int_{\partial K_\varepsilon(0)} E_{jk}(y)\cdot D_m\varphi(x-y)\cdot y_1/|y|\,do_y\Big)$$

$$= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\Big(\int_{\mathbb{R}^3\setminus K_\varepsilon(0)} D_mD_1E_{jk}(y)\cdot\varphi(x-y)\,dy + \int_{\partial K_\varepsilon(0)} D_1E_{jk}(y)\cdot\varphi(x-y)\cdot y_m/|y|\,do_y + \int_{\partial K_\varepsilon(0)} E_{jk}(y)\cdot D_m\varphi(x-y)\cdot y_1/|y|\,do_y\Big)$$

$$= B(D_mD_1E_{jk})(\varphi)(x) + \varphi(x)\cdot\int_{\partial K_1(0)} D_1E_{jk}(z)\cdot z_m\,do_z.$$

Bei der letzten Gleichung wurde (1.19), (1.20) angewandt, sowie die Definition von B aus Satz 1.3 eingesetzt. Die im Lemma behauptete Formel für $D_1(E_{4k}*\varphi)$ zeigt man analog. □

Lemma 1.11: Sei $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ beschränktes Gebiet; der Fall $\Omega=\emptyset$ sei zugelassen.

Sei $\varepsilon\in(0,3)$, ferner $\vec{u}\in L_{3+\varepsilon}(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega)^3$, $\pi\in L_2(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega)$. Die schwachen Ableitungen D_ku_j, $D_kD_ku_j$, $D_k\pi$ sollen existieren; es gelte:

$$D_ku_j\in L_2(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega),\quad u_j\cdot D_kD_ku_j,\quad u_j\cdot D_j\pi\in L_{1,loc}(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega)$$

für $1\le j,k\le 3$.

Ferner wird für $1\le k,j\le 3$, $\zeta\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ vorausgesetzt:

(1.21) $$\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega} D_kD_ku_j\cdot u_j\cdot\zeta\,dx = -\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega}\{(D_ku_j)^2\cdot\zeta + D_ku_j\cdot u_j\cdot D_k\zeta\}\,dx,$$

(1.22) $$\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega} D_j\pi\cdot u_j\cdot\zeta\,dx = -\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega}\{\pi\cdot D_ju_j\cdot\zeta + \pi\cdot u_j\cdot D_j\zeta\}\,dx,$$

(1.23) $-\nu\cdot\Delta u + \nabla\pi = 0$ f.ü., $\operatorname{div} u = 0$ f.ü.

Dann ist $\vec{u}=0$ f.ü., $\pi=0$ f.ü.

Beweis: Zu $n\in\mathbb{N}$ sei ζ_n definiert wie in Lemma 1.6. Setze $s := 2\cdot(3+\varepsilon)/(1+\varepsilon)$. Es gilt: $1/s + 1/(3+\varepsilon) + 1/2 = 1$. Für $j,k\in\{1,2,3\}$ ist $\pi, D_ku_j\in L_2(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega)$. Außerdem ist $u_j\in L_{3+\varepsilon}(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega)$, $D_k\zeta_n\in L_s(\mathbb{R}^3)$, $(1\le j,k\le 3,\ n\in\mathbb{N})$. Damit folgt für $j,k\in\{1,2,3\}$, $\rho\in\{D_ku_j,\pi\}$, $n\in\mathbb{N}$:

(1.24) $$\Big|\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega}\rho\cdot u_j\cdot D_k\zeta_n\,dx\Big| \le \|\rho\|_2\cdot\|u_j\|_{3+\varepsilon}\cdot\|D_k\zeta_n\|_s$$

$$\le \|\rho\|_2\cdot\|u_j\|_{3+\varepsilon}\cdot P_4(s)^{1/s}\cdot n^{(-s+3)/s}.$$

Die letzte Ungleichung gilt nach Lemma 1.6. Beachtet man, daß $-s+3<0$, wie aus der Bedingung $\varepsilon\in(0,3)$ folgt, so erhält man:

(1.25) $$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega}\rho\cdot u_j\cdot D_k\zeta_n\,dx = 0 \text{ für } j,k\in\{1,2,3\},\ \rho\in\{D_ku_j,\pi\}.$$

Es ist $0\le\zeta_n\le 1$ $(n\in\mathbb{N})$, und es gilt: $\zeta_n\to 1$ $(n\to\infty)$ punktweise. Mit dem Konvergenzsatz von Lebesgue folgt:

(1.26) $$\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega}(D_ku_j)^2\cdot\zeta_n\,dx \to \int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega}(D_ku_j)^2\,dx\quad(n\to\infty)\ \text{für}\ j,k\in\{1,2,3\}.$$

Nun ist aber für $n\in\mathbb{N}$:

$$(1.27)\quad 0 = \int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega} \sum_{j=1}^{3} \{(-\nu\cdot\Delta u_j + D_j\pi)\cdot\zeta_n\cdot u_j\}\,dx$$

$$= -\nu\cdot\sum_{j,k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega} D_kD_ku_j\cdot u_j\cdot\zeta_n\,dx + \sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega} D_j\pi\cdot u_j\cdot\zeta_n\,dx$$

$$= \nu\cdot\sum_{j,k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega} \{(D_ku_j)^2\cdot\zeta_n + D_ku_j\cdot u_j\cdot D_k\zeta_n\}\,dx - \sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega}\{\pi\cdot D_ju_j\cdot\zeta_n + \pi\cdot u_j\cdot D_j\zeta_n\}\,dx$$

$$= \nu\cdot\sum_{j,k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega} \{(D_ku_j)^2\cdot\zeta_n + D_ku_j\cdot u_j\cdot D_k\zeta_n\}\,dx - \sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega}\pi\cdot u_j\cdot D_j\zeta_n\,dx.$$

Die erste und letzte Gleichung gilt wegen (1.23). Bei der dritten Gleichung wurde (1.21), (1.22) angewandt. Aus (1.25)-(1.27) erhält man durch Grenzübergang $n\to\infty$:

$$0 = \nu\cdot\sum_{j,k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega}(D_ku_j)^2\,dx;\ \text{d.h.:}\ 0 = \sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega}|\nabla u_j|^2\,dx.$$

Somit: $\nabla u_j = 0$ fast überall, für $1\le j\le 3$. Dies bedeutet (siehe [A], 3.21): Zu jedem Element $x\in\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega$ gibt es eine Umgebung U_x von x und eine Zahl $c_x\in\mathbb{C}$, so daß $\vec u|U_x = c_x$ fast überall. Da Ω, und somit auch $\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega$ zusammenhängend, folgt: $\vec u$ fast überall konstant. Aus (1.23) erhält man: $\nabla\pi = 0$ f.ü. Mit denselben Argumenten wie eben ergibt sich daraus: π f.ü. konstant. Weil $\vec u\in L_2(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega)^3$, $\pi\in L_2(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega)$, folgt die Behauptung. □

Der folgende Satz enthält die angekündigte Existenzaussage für Lösungen des linearen Stokes-System im $\mathbb{R}^3$.

Satz 1.4:

I). Sei $r\in$ ~~[6/5,∞)~~, $\vec f\in L_r(\mathbb{R}^3)^3\cap L_1(\mathbb{R}^3)^3$. Setze   (1,∞)

$$u_j(\vec f) := \sum_{m=1}^{3} E_{jm}*f_m\ (1\le j\le 3),\quad \pi(\vec f) := \sum_{m=1}^{3} E_{4m}*f_m,$$

mit E_{lm} $(1\le l\le 4,\ 1\le m\le 3)$ aus Lemma 1.7. Gemäß Lemma 1.8 ist $\vec u(\vec f)$, $\pi(\vec f)$ wohldefiniert.

Dann ist $[\vec u(\vec f)]\times[\pi(\vec f)]$ die Menge aller Paare $(\vec u,\pi)$ aus $F_B^3\times F_B$ mit folgenden Eigenschaften:

Für $1\le j,k,l\le 3$ existieren die schwachen Ableitungen D_ku_j, $D_lD_ku_j$, $D_k\pi$, und es gilt:

$$(1.28)\quad -\nu\cdot\Delta\vec u + \nabla\pi = \vec f \text{ f.ü.},\quad \operatorname{div}\vec u = 0 \text{ f.ü.}$$

Im Fall $r\ge 3/2$ ist $u_j\in\bigcap_{q\in(3,\infty)} L_q(\mathbb{R}^3)$,

im Fall $r<3/2$: $u_j\in\bigcap_{q\in(3,(1/r-2/3)^{-1}]} L_q(\mathbb{R}^3)$ $(1\le j\le 3)$.

Insbesondere gilt im Fall $r<3/2$: $u_j\in L_{(1-1/r)^{-1}}(\mathbb{R}^3)$ $(1\le j\le 3)$.

Weiter ist $D_ku_j,\pi\in\bigcap_{q\in(3/2,(1/r-1/3)^{-1}]} L_q(\mathbb{R}^3)$ im Fall $r<3$, und $D_ku_j,\pi\in\bigcap_{q\in(3/2,\infty)} L_q(\mathbb{R}^3)$ im Fall $r\ge 3$,

im Fall $r\ge\frac{6}{5}$ insbesondere: D_ku_j, $\pi\in L_2(\mathbb{R}^3)$ $(1\le j,k\le 3)$.

Schließlich ist $D_lD_ku_j$, $D_k\pi\in\bigcap_{q\in(1,r]} L_q(\mathbb{R}^3)$ $(1\le j,k,l\le 3)$.

Im Fall $r\ge 6/5$ gibt es nur ein solches Paar.

Für $s \in (3,\infty)$ im Fall $r \geq 3/2$, sowie für $s \in (3,(1/r-2/3)^{-1}]$ im Fall $r < 3/2$, und für $1 \leq j \leq 3$, $\vec{f} \in L_r(\mathbb{R}^3)^3 \cap L_1(\mathbb{R}^3)^3$ gilt:

(1.29) $\|u_j(\vec{f})\|_s \leq 3 \cdot P_6(s) \cdot \|\vec{f}\|_{(1/s+2/3)^{-1}}$

L im Fall $r<3$, $s \in (3,\infty)$ im Fall $r \geq 3$

Für $s \in (3/2,(1/r-1/3)^{-1}]$, $1 \leq j,k \leq 3$ und für $\vec{f}$ wie eben ist

(1.30) $\|D_k u_j(\vec{f})\|_s + \|\pi(\vec{f})\|_s \leq 3 \cdot P_7(s) \cdot \|\vec{f}\|_{(1/s+1/3)^{-1}}$.

(P_6, P_7 wurden in Lemma 1.8 eingeführt.)

Schließlich gibt es zu $r \in \cancel{[6/5,\infty)}$, $s \in (1,r]$ eine Zahl $P_{10}(s) > 0$, $H(1,\infty)$ so daß

(1.31) $\|D_l D_k u_j(\vec{f})\|_s + \|D_k \pi(\vec{f})\|_s \leq P_{10}(s) \cdot \|\vec{f}\|_s$

für $1 \leq j,k,l \leq 3$, $\vec{f} \in L_r(\mathbb{R}^3)^3 \cap L_1(\mathbb{R}^3)^3$.

Für $1 \leq j,k,l \leq 3$ und für $\vec{f}$ wie eben, existiert $D_k E_{jl} * f_l$ (siehe Lemma 1.8), und es ist $\quad D_k u_j(\vec{f}) = \sum_{m=1}^{3} D_k E_{jm} * f_m$.

II). Sei $r \in (3/2,\infty)$, $R > 0$, $\vec{f} \in L_r(\mathbb{R}^3)^3$ mit $\mathrm{Tr}\, \vec{f} \subset K_R(0)$. Dann ist $\vec{u}(\vec{f})|K_R(0) \in W^{2,r}(K_R(0))^3$, $\pi(\vec{f})|K_R(0) \in W^{1,r}(K_R(0))$.

Zu $r \in [3/2,\infty)$, $R > 0$ gibt es $P_{11}(r,R) > 0$, so daß

(1.32) $\|\vec{u}(\vec{f})|K_R(0)\|_{2,r} + \|\nabla\pi(\vec{f})\|_r \leq P_{11}(r,R) \cdot \|\vec{f}\|_r$

für $\vec{f} \in L_r(\mathbb{R}^3)^3$ mit $\mathrm{Tr}\, \vec{f} \subset K_R(0)$.

III). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen, $\alpha \in (0,1)$, $\vec{g} \in C^{\alpha}(\Omega)^3$ und $\vec{f}$ die triviale Fortsetzung von $\vec{g}$ auf $\mathbb{R}^3$. Dann ist $\vec{u}(\vec{f})|\Omega \in C^2(\Omega)^3$, $\pi(\vec{f})|\Omega \in C^1(\Omega)$.

Beweis:

zu I).: Sei $r \in \cancel{[6/5,\infty)}$, $\vec{f} \in L_r(\mathbb{R}^3)^3 \cap L_1(\mathbb{R}^3)^3$. Sei ein Element $H\, r \in (1,\infty)$ $j \in \{1,2,3\}$ vorgegeben. Zur Abkürzung schreiben wir $u_j := u_j(\vec{f})$.

Nach Lemma 1.8 gilt im Fall $r \geq 3/2$ für $s \in (3,\infty)$, im Fall $r < 3/2$ für $s \in (3,(1/r-2/3)^{-1}]$:

(1.33) $\|u_j\|_s \leq 3 \cdot P_6(s) \cdot \|\vec{f}\|_{(1/s+2/3)^{-1}}$.

Zu $n \in \mathbb{N}$ sei $u_{jn} := \sum_{m=1}^{3} E_{jm} * (f_m)_{(1/n)}$, mit $(f_m)_{(1/n)}$ gemäß Lemma 1.3 definiert; insbesondere ist $u_{jn} \in C^{\infty}(\mathbb{R}^3)$ $(n \in \mathbb{N})$.

Nach Lemma 1.8 ist $u_{jn} \in \bigcap_{q \in (3,\infty)} L_q(\mathbb{R}^3)$, und es gilt:

(1.34) $\|u_{jn} - u_j\|_s \leq P_6(s) \cdot \sum_{m=1}^{3} \|f_m - (f_m)_{(1/n)}\|_{(1/s+2/3)^{-1}} \quad (n \in \mathbb{N})$

für $s \in (3,\infty)$ im Fall $r \geq 3/2$, bzw. für $s \in (3,(1/r-2/3)^{-1}]$ im Fall $r < 3/2$.

Für s wie in (1.34) ist $(1/s+2/3)^{-1} \in [1,r]$, so daß nach Lemma 1.1 und wegen (1.3) gilt:

$$\sum_{m=1}^{3} \|f_m - (f_m)_{(1/n)}\|_{(1/s+2/3)^{-1}} \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Somit aus (1.34):

(1.35) $\|u_{jn} - u_j\|_s \to 0 \quad (n \to \infty)$, für s wie in (1.34).

Nach Lemma 1.10 ist

$$(1.36)\quad D_k u_{jn} = \sum_{m=1}^{3} D_k E_{jm} * (f_m)_{(1/n)} \qquad (1 \leq k \leq 3,\ n \in \mathbb{N}).$$

L im Fall $r<3$, $D_k u_{jn} \in \bigcap_{r \in (3/2,\infty)} L_r(\mathbb{R}^3)$

Aufgrund von Lemma 1.8 bedeutet dies:

$$D_k u_{jn} \in \bigcap_{q \in (3/2,(1/r-1/3)^{-1}]} L_q(\mathbb{R}^3) \qquad (1 \leq k \leq 3,\ n \in \mathbb{N}).$$

Andererseits ist nach Lemma 1.8 auch $\sum_{m=1}^{3} D_k E_{jm} * f_m$ aus $\bigcap_{q \in (3/2,(1/r-1/3)^{-1}]} L_q(\mathbb{R}^3)$, und es gilt mit (1.36):

L im Fall $r<3$, bzw. aus $\bigcap_{q \in (3/2,\infty)} L_q(\mathbb{R}^3)$ im Fall $r \geq 3$

$$(1.37)\quad \Big\| \sum_{m=1}^{3} D_k E_{jm} * f_m - D_k u_{jn} \Big\|_s$$

$$\leq P_7(s) \cdot \sum_{m=1}^{3} \| f_m - (f_m)_{(1/n)} \|_{(1/s+1/3)^{-1}}$$

für $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq 3$, $s \in (3/2,(1/r-1/3)^{-1}]$.

L im Fall $r<3$, $s \in (3/2,\infty)$ im Fall $r \geq 3$

Für s wie in (1.37) ist $(1/s+1/3)^{-1} \in [1,r]$, so daß nach Lemma 1.1 und wegen (1.3) die rechte Seite in (1.37) gegen Null konvergiert. Aus (1.37) folgt also:

$$(1.38)\quad \Big\| \sum_{m=1}^{3} D_k E_{jm} * f_m - D_k u_j \Big\|_s \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

L im Fall $r<3$, $s \in (3/2,\infty)$ im Fall $r \geq 3$

für $s \in (3/2,(1/r-1/3)^{-1}]$, $k \in \{1,2,3\}$.

Aus (1.35), (1.38) und Lemma 1.4 folgt:

(1.39) Für $k \in \{1,2,3\}$ existiert die schwache Ableitung $D_k u_j$ von u_j, und es ist $D_k u_j = \sum_{m=1}^{3} D_k E_{jm} * f_m$ f.ü.

Jetzt nach Lemma 1.9:

$$(1.40)\quad \| D_k u_j \|_s \leq 3 \cdot P_7(s) \cdot \| \vec{f} \|_{(1/s+1/3)^{-1}}$$

L im Fall $r<3$, $s \in (3/2,\infty)$ im Fall $r \geq 3$

für $s \in (3/2,(1/r-1/3)^{-1}]$, $k \in \{1,2,3\}$.

Wir schreiben zur Abkürzung $\pi := \pi(\vec{f})$.

Nach Lemma 1.8 ist dann $\pi \in L_s(\mathbb{R}^3)$ und

$$(1.41)\quad \| \pi \|_s \leq 3 \cdot P_7(s) \cdot \| \vec{f} \|_{(1/s+1/3)^{-1}} \quad \text{für } s \in (3/2,(1/r-1/3)^{-1}].$$

L im Fall $r<3$, $s \in (3/2,\infty)$ im Fall $r \geq 3$

Zu $n \in \mathbb{N}$ sei $\pi_n := \sum_{m=1}^{3} E_{4m} * (f_m)_{(1/n)}$. Es ist $\pi_n \in L_s(\mathbb{R}^3)$ und $\| \pi_n - \pi \|_s \leq P_7(s) \cdot \sum_{m=1}^{3} \| f_m - (f_m)_{(1/n)} \|_{(1/s+1/3)^{-1}}$, für $s \in (3/2,(1/r-1/3)^{-1}]$ (siehe Lemma 1.8). Daraus erhält man:

L im Fall $r<3$, $s \in (3/2,\infty)$ im Fall $r \geq 3$

$$(1.42)\quad \| \pi_n - \pi \|_s \to 0 \quad (n \to \infty) \quad \text{für } s \in (3/2,(1/r-1/3)^{-1}].$$

L im Fall $r<3$, $s \in (3/2,\infty)$ im Fall $r \geq 3$

Sei $l,m \in \{1,2,3\}$. Aus Lemma 1.10 und der zweiten Bemerkung im Anschluß an Satz 1.3 wissen wir:

$$(1.43)\quad D_l D_m u_{jn}(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \Big\{ A(D_l D_m E_{jk})((f_k)_{(1/n)})(x) +$$

$$+ (f_k)_{(1/n)}(x) \cdot \int_{\partial K_1(0)} y_m \cdot D_l E_{jk}(y)\, do_y \Big\},$$

$$D_1\pi_n(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \Big\{ A(D_1E_{4k})((f_k)_{(1/n)})(x) +$$

$$+ (f_k)_{(1/n)}(x) \cdot \int_{\partial K_1(O)} y_1 \cdot E_{4k}(y)\, do_y \Big\},$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}^3$ und für $n \in \mathbb{N}$.

Sei $s \in (1,r]$. Nach Lemma 1.9 und Satz 1.2 gilt für $n \in \mathbb{N}$, $1 \le k \le 3$: $A(D_1D_mE_{jk})((f_k)_{(1/n)})$, $A(D_1D_mE_{jk})(f_k)$, $A(D_1E_{4k})((f_k)_{(1/n)})$ und $A(D_1E_{4k})(f_k)$ gehören zu $L_s(\mathbb{R}^3)$. Beachte dazu, daß $\vec{f} \in L_s(\mathbb{R}^3)^3$ nach Lemma 1.1. Jetzt ergibt sich aus (1.43):

(1.44) $D_1D_mu_{jn}, D_1\pi_n \in L_s(\mathbb{R}^3)$ für $n \in \mathbb{N}$.

Als weitere Folgerung aus Lemma 1.9 und Satz 1.2 notieren wir:

(1.45) $\| A(D_1D_mE_{jk})((f_k)_{(1/n)}) - A(D_1D_mE_{jk})(f_k) \|_s$

$$\le P_8(s, D_1D_mE_{jk}) \cdot \| (f_k)_{(1/n)} - f_k \|_s ,$$

$$\| A(D_1E_{4k})((f_k)_{(1/n)}) - A(D_1E_{4k})(f_k) \|_s$$

$$\le P_8(s, D_1E_{4k}) \cdot \| (f_k)_{(1/n)} - f_k \|_s \qquad (1 \le k \le 3,\ n \in \mathbb{N}).$$

Andererseits gilt gemäß (1.3):

(1.46) $\| (f_k)_{(1/n)} - f_k \|_s \to 0 \quad (n \to \infty)$, für $1 \le k \le 3$.

Die Ergebnisse in (1.43)-(1.46) liefern nun diese Konvergenzaussage:

(1.47) $\| D_1D_mu_{jn} - \sum_{k=1}^{3} A(D_1D_mE_{jk})(f_k) -$

$$- \sum_{k=1}^{3} f_k \cdot \int_{\partial K_1(O)} y_m \cdot D_1E_{jk}(y)\, do_y \|_s$$

$$+ \| D_1\pi_n - \sum_{k=1}^{3} A(D_1E_{4k})(f_k) -$$

$$- \sum_{k=1}^{3} f_k \cdot \int_{\partial K_1(O)} y_1 \cdot E_{4k}(y)\, do_y \|_s \to 0$$

für $n \to \infty$.

Aus (1.35), (1.42), (1.44), (1.47) und Lemma 1.4 folgt, daß die schwachen Ableitungen $D_1D_mu_j$, $D_1\pi$ existieren, mit

(1.48) $D_1D_mu_j = \sum_{k=1}^{3} A(D_1D_mE_{4k})(f_k) +$

$$+ \sum_{k=1}^{3} f_k \cdot \int_{\partial K_1(O)} y_m \cdot D_1E_{jk}(y)\, do_y \quad \text{f.ü.}$$

und

$$D_1\pi = \sum_{k=1}^{3} A(D_1E_{4k})(f_k) + \sum_{k=1}^{3} f_k \cdot \int_{\partial K_1(O)} y_1 \cdot E_{4k}(y)\, do_y \quad \text{f.ü.}$$

Hierbei waren j,l,m beliebige Elemente aus {1,2,3}.

Man setzt nun für $t \in (3,\infty)$ L1

$$P_{10}(t) := \max_{1 \le j,l,m \le 3} \sum_{k=1}^{3} \Big\{ P_8(t, D_1D_mE_{jk}) +$$

$$+ \Big| \int_{\partial K_1(O)} y_m \cdot D_1E_{jk}(y)\, do_y \Big| +$$

$$+ P_8(t, D_1E_{4k}) +$$

$$+ \left| \int_{\partial K_1(0)} y_l \cdot E_{4k}(y)\, do_y \right| \Big\},$$

mit $P_8(t, D_l D_m E_{jk})$, $P_8(t, D_l E_{4k})$ aus Satz 1.2, für $Q = D_l D_m E_{jk}$ bzw. für $Q = D_l E_{4k}$. Dann folgt Abschätzung (1.31) aus (1.43), Lemma 1.9 und Satz 1.2.

Wir finden außerdem für $j \in \{1,2,3\}$:

$$(1.49)\quad -\nu\cdot\Delta u_j + D_j\pi = -\nu\cdot\sum_{l=1}^{3} D_l D_l u_j + D_j\pi$$

$$= \sum_{k=1}^{3}\Big\{-\nu\cdot\sum_{l=1}^{3} A(D_l D_l E_{jk})(f_k) + A(D_j E_{4k})(f_k)$$

$$+ f_k\cdot\int_{\partial K_1(0)} \Big(-\nu\cdot\sum_{l=1}^{3} y_l D_l E_{jk}(y) + y_j\cdot E_{4k}(y)\Big)\, do_y\Big\}$$

(wegen (1.48))

$$= \sum_{k=1}^{3}\Big\{-\nu\cdot\sum_{l=1}^{3} A(D_l D_l E_{jk})(f_k) - A(D_j E_{4k})(f_k)\Big\} + f_j$$

(wegen (1.12))

$$= \sum_{k=1}^{3} A\Big(-\nu\cdot\sum_{l=1}^{3} D_l D_l E_{jk} - D_j E_{4k}\Big)(f_k) + f_j \text{ f.ü.}$$

Die letzte Gleichung folgert man leicht aus der Konvergenzaussage in Satz 1.2. Seien nun $j,k \in \{1,2,3\}$

Nach Satz 1.2 gibt es eine Folge (ε_n) in $(0,\infty)$ mit $\varepsilon_n \downarrow 0$, so daß

$$\int_{\mathbb{R}^3 \setminus K_{\varepsilon_n}(0)} \Big\{-\nu\cdot\sum_{l=1}^{3} D_l D_l E_{jk}(x-y) - D_j E_{4k}(x-y)\Big\}\cdot f_k(y)\, dy$$

$$\to A\Big(-\nu\cdot\sum_{l=1}^{3} D_l D_l E_{jk} - D_j E_{4k}\Big)(f_k)(x) \quad (n\to\infty)$$

für $k \in \{1,2,3\}$ und für fast alle $x \in \mathbb{R}^3$. Mit (1.10) folgt:

$$A\Big(-\nu\cdot\sum_{l=1}^{3} D_l D_l E_{jk} - D_j E_{4k}\Big)(f_k) = 0 \text{ f.ü.}$$

Jetzt ergibt sich aus (1.49): $-\nu\cdot\Delta u_j + D_j\pi = f_j$ f.ü. $(1 \le j \le 3)$.

Weiter gilt fast überall:

$$\sum_{j=1}^{3} D_j u_j = \sum_{j=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} (D_j E_{jm} * f_m) \qquad \text{(siehe (1.39))}$$

$$= \sum_{m=1}^{3}\Big(\sum_{j=1}^{3} E_{jm}\Big) * f_m = 0 \qquad \text{(siehe (1.10))}.$$

Machen wir nun die Abkürzungen $\vec{u} = \vec{u}(\vec{f})$, $\pi = \pi(\vec{f})$ wieder rückgängig, so folgt, daß das Tupel $(\vec{u}(\vec{f}), \pi(\vec{f}))$ die Gleichungen in (1.28) erfüllt.

Zu zeigen bleibt die in I) enthaltene Eindeutigkeitsaussage. Hierzu ~~seien~~ H sei zusätzlich vorausgesetzt: $r \geq 6/5$. Es seien

$$\vec{u}^1, \vec{u}^2 \in \bigcap_{s\in(3,\infty)} L_s(\mathbb{R}^3)^3 \text{ im Fall } r \ge 3/2,$$

bzw.

$$\vec{u}^1, \vec{u}^2 \in \bigcap_{s\in(3,(1/r-2/3)^{-1}]} L_s(\mathbb{R}^3)^3 \text{ im Fall } r < 3/2,$$

ferner $\pi_1, \pi_2 \in L_2(\mathbb{R}^3)$. Für $i \in \{1,2\}$ gelte: Die schwachen Ableitungen $D_k \vec{u}^i$, $D_l D_k \vec{u}^i$, $D_k\pi_i$ existieren, mit $D_k u^i_j$, $\pi_i \in L_2(\mathbb{R}^3)$, $D_k D_l u^i_j$, $D_k\pi_i \in L_r(\mathbb{R}^3)$ $(1 \le j,k,l \le 3)$. Außerdem sei

$$-\nu\cdot\Delta\vec{u}^i + \nabla\pi_i = \vec{f},\ \operatorname{div}\vec{u}^i = 0 \text{ f.ü. } (i = 1,2).$$

Setze $\vec{u} := \vec{u}^1 - \vec{u}^2$, $\pi := \pi_1 - \pi_2$. Dann stellt man zunächst fest: Im Fall $r < 3/2$ ist $u_j \in L_{(1-1/r)^{-1}}(\mathbb{R}^3) \cap L_{2,loc}(\mathbb{R}^3)$, und im Fall $r \geq 3/2$ ist $u_j \in \bigcap_{p \in [1,\infty)} L_{p,loc}(\mathbb{R}^3)$; in jedem Fall also gilt:

$$u_j \in L_{(1-1/r)^{-1},loc}(\mathbb{R}^3) \cap L_{2,loc}(\mathbb{R}^3).$$

Es ist klar: $D_k u_j, \pi \in L_2(\mathbb{R}^3)$, $D_k D_k u_j, D_k \pi \in L_r(\mathbb{R}^3)$ $(1 \leq j,k \leq 3)$.
Jetzt folgt aus Lemma 1.5, mit $v := D_k u_j$, $w := u_j$:

$$\int_{\mathbb{R}^3} D_k D_k u_j \cdot u_j \cdot \xi \, dx = -\int_{\mathbb{R}^3} \{(D_k u_j)^2 \cdot \xi + D_k u_j \cdot u_j \cdot D_k \xi\} \, dx,$$

sowie mit $v := \pi$, $w := u_j$:

$$\int_{\mathbb{R}^3} D_k \pi \cdot u_j \cdot \xi \, dx = -\int_{\mathbb{R}^3} \{\pi \cdot D_k u_j \cdot \xi + \pi \cdot u_j \cdot D_k \xi\} \, dx$$

$$(1 \leq j,k \leq 3,\ \xi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)).$$

Weiter stellt man fest: Es gibt $\varepsilon \in (0,3)$ mit $u_j \in L_{3+\varepsilon}(\mathbb{R}^3)$ $(1 \leq j \leq 3)$.
Ferner ist $-\nu \cdot \Delta u_j + D_j \pi = 0$ $(1 \leq j \leq 3)$, $\operatorname{div} \vec{u} = 0$ f.ü. Weil außerdem $u_j \in L_{(1-1/r)^{-1},loc}(\mathbb{R}^3)$, wie oben festgestellt, und $D_j \pi, D_k D_k u_j \in L_r(\mathbb{R}^3)$, hat man:

$$u_j \cdot D_k D_k u_j,\ u_j \cdot D_j \pi \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^3) \qquad (1 \leq j,k \leq 3).$$

Jetzt folgt aus Lemma 1.11, mit $\Omega = \phi$: $\qquad \vec{u} = 0$, $\pi = 0$ f.ü.,
d.h.: $\vec{u}^1 = \vec{u}^2$, $\pi_1 = \pi_2$ f.ü.

zu II): Sei $r \in (3/2,\infty)$, $R > 0$, $\vec{f} \in L_r(\mathbb{R}^3)^3$ mit $\operatorname{Tr} \vec{f} \subset K_R(0)$. Gemäß (1.31) ist für $1 \leq j,k,l \leq 3$:

(1.50) $\|D_k D_l u_j(\vec{f})\|_r + \|D_k \pi(\vec{f})\|_r \leq P_{10}(r) \cdot \|\vec{f}\|_r$.

Wegen $r \in (3/2,(1/r-1/3)^{-1}]$ gilt: L im Fall $r<3$, $r \in (3/2,\infty)$ im Fall $r \geq 3$

$$\|D_k u_j(\vec{f})\|_r + \|\pi(\vec{f})\|_r \leq 3 \cdot P_7(r) \cdot \|\vec{f}\|_{(1/r+1/3)^{-1}}$$

$$\leq 3 \cdot P_7(r) \cdot (\operatorname{Vol} K_R(0))^{1/(3+r)} \cdot \|\vec{f}\|_r \text{ für } 1 \leq j,k \leq 3.$$

Da $r \geq 3/2$, ist $u_j(\vec{f}) \in L_{r\vee 4}(\mathbb{R}^3)$ und (siehe (1.29)):

$$\|u_j(\vec{f})\|_{r\vee 4} \leq 3 \cdot P_6(r\vee 4) \cdot \|\vec{f}\|_{(1/(r\vee 4)+2/3)^{-1}} \qquad (1 \leq j \leq 3).$$

Andererseits ist

$$\|u_j(\vec{f}) | K_R(0)\|_r \leq (\operatorname{Vol} K_R(0))^{1/r-1/(r\vee 4)} \cdot \|u_j(\vec{f}) | K_R(0)\|_{r\vee 4}$$

und wegen $(1/(r\vee 4)+2/3)^{-1} < 3/2 \leq r$, sowie wegen $\operatorname{Tr} f \subset K_R(0)$:

$$\|f_j\|_{(1/(r\vee 4)+2/3)^{-1}} \le (\mathrm{Vol}\ K_R(0))^{1/r-1/(r\vee 4)-2/3}\cdot\|f_j\|_r$$

$$(1 \le j \le 3).$$

Zusammen hat man:

$$(1.52)\quad \|u_j(\vec{f})|K_R(0)\|_r \le$$

$$\le (\mathrm{Vol}\ K_R(0))^{2/r-2/(r\vee 4)-2/3}\cdot 3\cdot P_6(r\vee 4)\cdot\|\vec{f}\|_r \quad (1 \le j \le 3).$$

Aus (1.50)-(1.52) folgt:

$$u_j(\vec{f})|K_R(0) \in W^{2,r}(K_R(0)) \quad (1 \le j \le 3),$$

$$\pi(\vec{f})|K_R(0) \in W^{2,r}(K_R(0)).$$

Setzt man

$$P_{11}(r,R) := P_{10}(r) + 3\cdot P_7(r)\cdot(\mathrm{Vol}\ K_R(0))^{1/(3+r)}$$

$$+ 3\cdot P_6(r\vee 4)\cdot(\mathrm{Vol}\ K_R(0))^{2/r-2/(r\ 4)-2/3},$$

so ergibt sich (1.32) aus (1.50)-(1.52).

zu III): Jetzt ist eine beschränkte, offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ vorgegeben, ferner eine Zahl $\alpha \in (0,1)$ und eine Funktion $\vec{g} \in C^\alpha(\Omega)^3$, $\vec{f}$ sei die triviale Fortsetzung von $\vec{g}$ auf $\mathbb{R}^3$. Zum Beweis von III) genügt es zu zeigen, daß für $\overset{0}{x} \in \Omega$ und $\delta > 0$ mit $\overline{K_{2\delta}(\overset{0}{x})} \subset \Omega$ gilt:

$$\vec{u}(\vec{f})|K_{\delta/2}(\overset{0}{x}) \in C^2(K_{\delta/2}(\overset{0}{x}))^3,\quad \pi(\vec{f}) \in C^1(K_{\delta/2}(\overset{0}{x})).$$

Sei also $\overset{0}{x} \in \Omega$, $\delta > 0$ mit $\overline{K_{2\delta}(\overset{0}{x})} \subset \Omega$. Wähle $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ mit $\zeta(x) = 1$ für $x \in \overline{K_\delta(\overset{0}{x})}$, $\zeta(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{K_{2\delta}(\overset{0}{x})}$.

Wegen $\vec{g} \in C^\alpha(\Omega)^3$, $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, $\mathrm{Tr}\ \zeta \subset \Omega$ ist $\zeta\cdot f_m \in C^\alpha(\mathbb{R}^3)$ für $1 \le m \le 3$. Gemäß (1.2) gibt es eine Folge (ε_n) in $(0,\infty)$, so daß

$$(1.53)\quad |\zeta\cdot f_m - (\zeta\cdot f_m)_{\varepsilon_n}|_{\alpha/2} \to 0 \quad (n\to\infty) \text{ für } 1 \le m \le 3.$$

Nach Lemma 1.10 ist

$$(1.54)\quad u_j((\zeta\cdot\vec{f})_{\varepsilon_n}),\ \pi((\zeta\cdot\vec{f})_{\varepsilon_n}) \in C^\infty(\mathbb{R}^3) \quad (1 \le j \le 3,\ n \in \mathbb{N}).$$

Es ist $\zeta\cdot f_m \in \bigcap_{p\in[1,\infty)} L_p(\mathbb{R}^3)$ für $1 \le m \le 3$; somit gilt nach [A], 2.18:

$$\|\zeta\cdot f_m - (\zeta\cdot f_m)_{\varepsilon_n}\|_p \to 0 \quad (n\to\infty), \text{ für } p \in [1,\infty),\ 1 \le m \le 3.$$

Aus (1.29) folgt, daß es eine Teilfolge (δ_n) von (ε_n) gibt mit

$$(1.55)\quad u_j((\zeta\cdot\vec{f})_{\delta_n}) \to u_j(\zeta\cdot\vec{f}) \quad (n\to\infty) \text{ f.ü. für } 1 \le j \le 3;$$

$$\pi((\zeta\cdot\vec{f})_{\delta_n}) \to \pi(\zeta\cdot\vec{f}) \quad (n\to\infty) \text{ f.ü.}$$

O.E. sei $\delta_n \le 1$ für $n \in \mathbb{N}$. Sei $S > 0$ so groß, daß $\overline{\Omega} \subset K_S(0)$. Dann ist $\mathrm{Tr}((\zeta\cdot\vec{f})_{\delta_n}) \subset K_{S+1}(0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Außerdem ist $(\zeta\cdot\vec{f})_{\delta_n} \in C^\infty(\mathbb{R}^3)^3$. Damit ergibt sich nach Lemma 1.9 und Satz 1.3, mit den Bezeichnungen von Satz 1.3:

$$|B(D_lD_mE_{jk})((\zeta\cdot f_k)_{\delta_p}) - B(D_lD_mE_{jk})((\zeta\cdot f_k)_{\delta_n})|_{\alpha/2}$$

$$\le P_9(\alpha/2, D_lD_mE_{jk}, S+1)\cdot|(\zeta\cdot f_k)_{\delta_p} - (\zeta\cdot f_k)_{\delta_n}|_{\alpha/2},$$

$$|B(D_lE_{4k})((\zeta\cdot f_k)_{\delta_p}) - B(D_lE_{4k})((\zeta\cdot f_k)_{\delta_n})|_{\alpha/2}$$

$$\le P_9(\alpha/2, D_lE_{4k}, S+1)\cdot|(\zeta\cdot f_k)_{\delta_p} - (\zeta\cdot f_k)_{\delta_n}|_{\alpha/2}$$

$$(1 \le j,k,l,m \le 3,\ p,n \in \mathbb{N}).$$

Wegen (1.53) bedeutet dies, daß die Folgen $(B(D_lD_mE_{jk})(\zeta\cdot f_k)_{\delta_n}))_{n\in\mathbb{N}}$, $(B(D_lE_{4k})((\zeta\cdot f_k)_{\delta_n}))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolgen bezüglich der Norm $|\ |_{\alpha/2}$ sind $(1 \le j,k,l,m \le 3)$. Insbesondere sind diese Folgen gleichmäßig konvergent. Wegen (1.53) ist auch die Folge $((\zeta\cdot f_k)_{\delta_n})_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent. Andererseits gilt nach der zweiten Bemerkung im Anschluß an Satz 1.3:

$$B(D_lD_mE_{jk})((\zeta\cdot f_k)_{\delta_n}) = A(D_lD_mE_{jk})((\zeta\cdot f_k)_{\delta_n}) \text{ f.ü.}$$

$$B(D_lE_{4k})((\zeta\cdot f_k)_{\delta_n}) = A(D_lE_{4k})((\zeta\cdot f_k)_{\delta_n}) \text{ f.ü.} \quad (1 \le j,k,l,m \le 3,\ n \in \mathbb{N}).$$

Mit (1.48) folgt aus diesen beiden Gleichungen:

$$(1.56)\quad D_lD_mu_j((\zeta\cdot\vec{f})_{\delta_n}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{3}\left\{B(D_lD_mE_{jk})((\zeta\cdot f_k)_{\delta_n}) + (\zeta\cdot f_k)_{\delta_n}\cdot h_{jklm}\right\} \text{ f.ü.},$$

$$(1.57)\quad D_l\pi((\zeta\cdot\vec{f})_{\delta_n}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{3}\left\{B(D_lE_{4k})((\zeta\cdot f_k)_{\delta_n}) + (\zeta\cdot f_k)_{\delta_n}\cdot\tilde{h}_{jkl}\right\} \text{ f.ü.}$$

fast überall $(1 \le j,l,m \le 3,\ n \in \mathbb{N})$, wobei die Definition von h_{jklm}, $\tilde{h}_{jkl} \in \mathbb{R}$ offensichtlich ist. Nun ist aber die linke Seite von (1.56) und (1.57) stetig (siehe (1.54)). Ferner ist $(\zeta\cdot f_k)_{\delta_n}$ stetig $(n \in \mathbb{N})$. Aus Satz 1.3 folgt die Stetigkeit von $B(D_lD_mE_{jk})((\zeta\cdot f_k)_{\delta_n})$, $B(D_lE_{4k})((\zeta\cdot f_k)_{\delta_n})$ $(1 \le j,k,l,m \le 3,\ n \in \mathbb{N})$. Daher gelten (1.56) und (1.57) auch ohne die Einschränkung "fast überall". Weil aber die rechte Seite von (1.56) und (1.57) gleichmäßig konvergiert, wie vor (1.56) festgestellt, hat man auch für $(D_lD_mu_j((\zeta\cdot\vec{f})_{\delta_n}))_{n\in\mathbb{N}}$, $(D_l\pi((\zeta\cdot\vec{f})_{\delta_n})_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßige Konvergenz $(1 \le j,l,m \le 3)$. Man beachte noch, daß $\vec{u}(\zeta\cdot\vec{f})$, $\pi(\zeta\cdot\vec{f})$ stetig sind. (Warum?) Dann ergibt sich aus der eben gezeigten Konvergenzaussage, sowie aus (1.54), (1.55):

$$\vec{u}(\zeta\cdot\vec{f}) \in C^2(\mathbb{R}^3)^3,\quad \pi(\zeta\cdot\vec{f}) \in C^1(\mathbb{R}^3).$$

Weil $E_{jk} \in C^\infty(\mathbb{R}^3\setminus\{0\})$ $(1 \le j \le 4,\ 1 \le k \le 3)$, sind die Funktionen

$$\Psi_j : K_{\delta/2}(\mathring{x}) \ni x \to \int_{\mathbb{R}^3\setminus K_\delta(\mathring{x})} \sum_{k=1}^{3} E_{jk}(x-y)\cdot(1-\zeta(y))\cdot f_k(y)\,dy \in \mathbb{R},$$

$$\tilde{\Psi} : K_{\delta/2}(\mathring{x}) \ni x \to \int_{\mathbb{R}^3\setminus K_\delta(\mathring{x})} \sum_{k=1}^{3} E_{4k}(x-y)\cdot(1-\zeta(y))\cdot f_k(y)\,dy \in \mathbb{R}$$

aus $C^\infty(K_{\delta/2}(\mathring{x}))$ $(1 \le j \le 3)$. Weil $\zeta|K_\delta(\mathring{x}) = 1$, ist aber Ψ_j bzw. $\tilde{\Psi}$ identisch mit $u_j((1-\zeta)\cdot\vec{f})|K_{\delta/2}(\mathring{x})$ bzw. $\pi((1-\zeta)\cdot\vec{f})|K_{\delta/2}(\mathring{x})$ $(1 \le j \le 3)$. Letztere Funktionen gehören also zu $C^\infty(K_{\delta/2}(\mathring{x}))$.

Weil

$$\vec{u}(\vec{f}) = \vec{u}(\zeta\cdot\vec{f}) + \vec{u}((1-\zeta)\cdot\vec{f}),$$

$$\pi(\vec{f}) = \pi(\zeta\cdot\vec{f}) + \pi((1-\zeta)\cdot\vec{f}),$$

ergibt sich zusammen:

$$\vec{u}(\vec{f})|K_{\delta/2}(\overset{\circ}{\vec{x}}) \in C^2(K_{\delta/2}(\overset{\circ}{\vec{x}}))^3,$$

$$\pi(\vec{f})|K_{\delta/2}(\overset{\circ}{\vec{x}}) \in C^1(K_{\delta/2}(\overset{\circ}{\vec{x}})).$$

□

§ 2. Offene Mengen mit glattem Rand

Wir beginnen mit einigen technischen Ergebnissen, welche die Beschreibung des Randes einer glatt berandeten, offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^N$ betreffen. Dabei orientieren wir uns an [FJK], Chapter 6.

Sei $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und beschränkt. Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$. Ω sei C^k-berandet; das heißt: Zu $x \in \partial\Omega$ gebe es eine Zahl $j_x \in \{1,\dots,N\}$, eine offene Menge U_x im $\mathbb{R}^N$ mit $x \in U_x$, sowie eine Funktion $\varphi_x \in C^k(pr_{j_x}(U_x))$ mit

$$\Omega \cap U_x = \{y \in U_x \colon y_{j_x} < \varphi(pr_{j_x}(y))\},$$

wobei die Funktion pr_j für $j \in \{1,\dots,N\}$ definiert ist durch

$$pr_j\colon \mathbb{R}^N \ni y \to (y_1,\dots,y_{j-1},y_{j+1},\dots,y_N) \in \mathbb{R}^{N-1}.$$

Lemma 2.1: Es gibt $k_\Omega \in \mathbb{N}$, orthonormale Matrizen $\tilde{A}_1^\Omega,\dots,\tilde{A}_{k_\Omega}^\Omega$ aus $\mathbb{R}^{N\times N}$, Vektoren $c_1^\Omega,\dots,c_{k_\Omega}^\Omega \in \mathbb{R}^N$, $\alpha_\Omega \in (0,\infty)$ sowie Funktionen $a_1^\Omega,\dots,a_{k_\Omega}^\Omega$ aus $C^k([-\alpha_\Omega,\alpha_\Omega]^{N-1})$ mit folgenden Eigenschaften:

$$(2.1)\quad \partial\Omega = \bigcup_{r=1}^{k_\Omega} \{\tilde{A}_r^\Omega\cdot(\eta,a_r^\Omega(\eta)) + c_r^\Omega\colon \eta \in (-\alpha_\Omega/4,\alpha_\Omega/4)\}.$$

Für $r \in \{1,\dots,k_\Omega\}$ ist

$$(2.2)\quad \{\tilde{A}_r^\Omega\cdot(\eta,a_r^\Omega(\eta)) + c_r^\Omega\colon \eta \in (-\alpha_\Omega,\alpha_\Omega)^{N-1}\} \subset \partial\Omega,$$

$$(2.3)\quad \{\tilde{A}_r^\Omega\cdot(\eta,a_r^\Omega(\eta)+\xi) + c_r^\Omega\colon \eta \in (-\alpha_\Omega,\alpha_\Omega)^{N-1},\ \xi \in (-\alpha_\Omega,0)\} \subset \Omega,$$

(2.4) $\{\tilde{A}_r^\Omega\cdot(\eta,a_r^\Omega(\eta)+\xi)+C_r^\Omega:\ \eta\in(-\alpha_\Omega,\alpha_\Omega)^{N-1},\ \xi\in(0,\alpha_\Omega)\}\subset\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}.$

<u>Weiterhin gibt es Funktionen</u> $\overset{1\Omega}{\omega},\dots,\overset{k_\Omega,\Omega}{\omega}\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ <u>mit</u>

(2.5) $\sum_{r=1}^{k_\Omega}\overset{i}{\omega}(x)=1$ <u>für</u> $x\in\partial\Omega$, <u>sowie mit</u> $0\le\overset{r}{\omega}\le 1$,

$$\mathrm{Tr}\,\overset{r}{\omega}\subset\{\tilde{A}_r^\Omega\cdot(\eta,a_r^\Omega(\eta)+\xi)+C_r^\Omega:\ \eta\in(-\alpha_\Omega/4,\alpha_\Omega/4)^{N-1},$$

$$\xi\in(-\alpha_\Omega/4,\alpha_\Omega/4)\}\ \underline{\text{für}}\ 1\le r\le k_\Omega,$$

<u>wobei wir</u> $\overset{i}{\omega}:=\overset{i\Omega}{\omega}$ <u>abgekürzt haben</u>.

Ein Tupel

$$(k_\Omega,(\tilde{A}_i^\Omega)_{1\le i\le k_\Omega},(C_i^\Omega)_{1\le i\le k_\Omega},\alpha_\Omega,(a_i^\Omega)_{1\le i\le k_\Omega},\cancel{(\overset{i}{\omega})_{1\le i\le k_\Omega}},(\overset{i\Omega}{\omega})_{1\le i\le k_\Omega})$$

mit Eigenschaften (2.1)-(2.5) nennen wir "Beschreibung von $\partial\Omega$".

Im Folgenden lassen wir den Index Ω meist weg. Eine Ausnahme wollen wir nur bei k_Ω,α_Ω machen, um Verwechslungen zu vermeiden.

<u>Beweis zu Lemma 2.1:</u> Sei $x\in\partial\Omega$. Zu x sei U_x,j_x,φ_x wie vor Lemma 2.1 gewählt. Es folgt:

$$\partial\Omega\cap U_x=\{y\in U_x:\ y_{j_x}=\varphi_x(pr_{j_x}(y))\},$$

$$\mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}=\{y\in U_x:\ y_{j_x}>\varphi_x(pr_{j_x}(y))\}.$$

Setze

$$g_x:\ U_x\ni y\to(y_1,\dots,y_{j_x-1},y_{j_x}-\varphi_x(pr_{j_x}(y)),y_{j_x+1},\dots,y_N)\in\mathbb{R}^N.$$

Dann ist $g_x\in C^k(U_x)$, g_x injektiv und regulär. Somit ist $g_x(U_x)$ offen im $\mathbb{R}^N$, und die Rechtseinschränkung

$$\tilde{g}_x:U_x\ni y\to g_x(y)\in g_x(U_x)$$

ist ein Diffeomorphismus. $\tilde{g}_x^{-1}$ ist gegeben durch

$$\tilde{g}_x^{-1}(z)=(z_1,\dots,z_{j_x-1},z_{j_x}+\varphi_x(pr_{j_x}(z)),z_{j_x+1},\dots,z_N)$$

$$\text{für } z\in g_x(U_x).$$

Sei $\delta_x>0$ so gewählt, daß $\overline{W(g_x(x),\delta_x)}\subset g_x(U_x)$. Nach Heine-Borel kann man $n_\Omega\in\mathbb{N}$ und $z(1),\dots,z(n_\Omega)\in\partial\Omega$ wählen mit

$$\partial\Omega\subset\bigcup_{i=1}^{n_\Omega}g_{z(i)}^{-1}(W(g_{z(i)}(z(i)),\delta_{z(i)}/2)).$$

Setze $\alpha_\Omega:=\min\{\delta_{z(i)}/2:\ 1\le i\le n_\Omega\}$. Zu $x\in\partial\Omega$ gibt es $i_x\in\{1,\dots,n_\Omega\}$ mit

$$x\in g_{z(i_x)}^{-1}(W(g_{z(i_x)}(z(i_x)),\delta_{z(i_x)}/2)).$$

Zur Abkürzung setzt man

$$l_x:=j_{z(i_x)},\quad \Lambda_x:=U_{z(i_x)},\quad \psi_x:=\varphi_{z(i_x)},$$

$$R_x:=g_{z(i_x)}(U_{z(i_x)}),\quad h_x:=\tilde{g}_{z(i_x)}\qquad(x\in\partial\Omega).$$

Wir notieren folgende Eigenschaften dieser Parameter:

(2.6) A_x, R_x offen in $\mathbb{R}^N$; $x \in A_x$; $\Psi_x \in C^k(pr_{l_x}(A_x))$;

$h_x \in C^k(A_x)$ und h_x Diffeomorphismus von A_x in R_x;

$h_x(x) = (x_1,\dots,x_{l_x-1},0,x_{l_x+1},\dots,x_N)$; $pr_{l_x}(A_x) = pr_{l_x}(R_x)$;

$h_x(y) = (y_1,\dots,y_{l_x-1},y_{l_x}-\Psi_x(pr_{l_x}(y)), y_{l_x+1},\dots,y_N)$

für $y \in A_x$;

$h_x^{-1}(z) = (z_1,\dots,z_{l_x-1},z_{l_x}+\Psi_x(pr_{l_x}(z)),z_{l_x+1},\dots,z_N)$

für $z \in R_x$;

$\overline{W(h_x(x),\alpha_\Omega)} \subset \overline{W(g_{z(i_x)}(z(i_x)),\delta_{z(i_x)})} \subset R_x$.

Für $z \in R_x$ ist $h_x^{-1}(z)$ aus Ω, falls $z_{l_x} < 0$; aus $\partial\Omega$, falls $z_{l_x} = 0$; und aus $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$, falls $z_{l_x} > 0$.

Nach Heine-Borel können wir nun $k_\Omega \in \mathbb{N}$ und $x(1),\dots,x(k_\Omega) \in \partial\Omega$ wählen, so daß

(2.7) $\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{k_\Omega} h_{x(i)}^{-1}(W(h_{x(i)}(x(i)),\alpha_\Omega/4))$.

Zur Abkürzung setzt man für $i \in \{1,\dots,k_\Omega\}$: $l_i := l_{x(i)}$, und entsprechend A_i, R_i, Ψ_i, h_i.

Zu $i \in \{1,\dots,k\}$ sei $\tilde{A}_i := \tilde{A}_i^\Omega$ die eindeutig bestimmte Matrix mit

$\tilde{A}_i \cdot \vec{e}_{l_i} = \vec{e}_N$; $\tilde{A}_i \cdot \vec{e}_p = \vec{e}_p$ für $p \in \{1,\dots,l_i-1\}$;

$\tilde{A}_i \cdot \vec{e}_p = \vec{e}_{p-1}$ für $p \in \{l_i+1,\dots,N\}$.

Hierbei ist $\vec{e}_p$ für $p \in \{1,\dots,N\}$ erklärt durch $\vec{e}_p := (\delta_{ip})_{1 \le i \le N}$. Wir setzen weiterhin

$C_i := C_i^\Omega := (x(i)_1,\dots,x(i)_{l_i-1},0,x(i)_{l_i+1},\dots,x(i)_N)$.

Schließlich definieren wir

$A_i: \mathbb{R}^N \ni y \to \tilde{A}_i \cdot y + C_i \in \mathbb{R}^N$.

Für $i \in \{1,\dots,k_\Omega\}$, $y \in [-\alpha_\Omega,\alpha_\Omega]^N$ ist dann

(2.8) $A_i(y) = (y_1 + x(i)_1,\dots,y_{l_i-1} + x(i)_{l_i-1},y_N,y_{l_i} +$

$+ x(i)_{l_i+1},\dots,y_{N-1} + x(i)_N)$

$= (y_1,\dots,y_{l_i-1},y_N,y_{l_i},\dots,y_{N-1}) + h_i(x(i))$ (siehe (2.6))

$\in \overline{W(h_i(x(i)),\alpha_\Omega)} \subset R_i$ (siehe (2.6)).

Insbesondere ist für i,y wie eben:

$pr_{l_i}(y) \in pr_{l_i}(R_i) = pr_{l_i}(A_i)$ (zur letzten Gleichung siehe (2.6)).

Nun kann man für $i \in \{1,\dots,k_\Omega\}$ definieren:

$a_i := a_i^\Omega: \bar{\Delta} \ni \eta \to \Psi_i(pr_{l_i} \circ A_i(\eta,0)) \in \mathbb{R}$,

wobei $\Delta := (-\alpha_\Omega,\alpha_\Omega)^{N-1}$. Dann ist $a_i \in C^k(\bar{\Delta})$ $(1 \le i \le k_\Omega)$. Gemäß (2.8) ist $h_i^{-1}(A_i(\eta,\xi))$ für $\eta \in \Delta$, $\xi \in (-\alpha_\Omega,\alpha_\Omega)$ definiert. Außerdem erhält man aus (2.8), für $y \in [-\alpha_\Omega,\alpha_\Omega]^N$, $1 \le i \le k_\Omega$:

$pr_{l_i} \circ A_i(y) = pr_{l_i} \circ A_i(pr_N(y),0)$.

Nun folgt für $\eta \in \overline{\Delta}$, $\xi \in [-\alpha_\Omega, \alpha_\Omega]$, $1 \le i \le k_\Omega$:

$$(2.9)\quad h_i^{-1}(A_i(\eta,\xi)) = A_i(\eta, a_i(\eta)+\xi).$$

Hieraus, aus der ersten Gleichung in (2.8), sowie aus (2.6) ergibt sich: Für $i \in \{1,\dots,k_\Omega\}$, $\eta \in \Delta$, $\xi \in [-\alpha_\Omega,\alpha_\Omega]$ ist $A_i(\eta, a_i(\eta)+\xi)$ aus Ω, falls $\xi < 0$, aus $\partial\Omega$, falls $\xi = 0$, und aus $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$, falls $\xi > 0$. Jetzt folgen die Punkte (2.2)-(2.4) des Lemmas.

Es ist

$$A_i((-\gamma\alpha_\Omega,\gamma\alpha_\Omega)^N) = W(h_i(x(i)),\gamma\alpha_\Omega) \quad (1 \le i \le k_\Omega,\ \gamma \in (0,1)),$$

wie man aus (2.8) ersieht. (2.7) liefert nun:

$$(2.10)\quad \partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{k_\Omega} h_i^{-1}(A_i((-\alpha_\Omega/4,\alpha_\Omega/4)^N)).$$

Hieraus, sowie aus (2.9), (2.2)-(2.4) folgt (2.1).

In (2.10) ist eine offene Überdeckung von $\partial\Omega$ angegeben. Man kann daher Funktionen $\overset{1}{\omega} := \overset{1\Omega}{\omega}, \dots, \overset{k_\Omega}{\omega} := \overset{k_\Omega,\Omega}{\omega}$ aus $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ finden mit $\mathrm{Tr}\ \overset{i}{\omega} \subset h_i^{-1}(A_i((-\alpha_\Omega/4,\alpha_\Omega/4)^N))$, $0 \le \omega_i \le 1$ $(1 \le i \le k_\Omega)$, und mit

H ω $\quad \sum_{i=1}^{k_\Omega} \overset{i}{\omega} | \partial\Omega = 1$ (siehe [RT2], 55.3). Jetzt folgt (2.5) aus (2.9). □

Sei eine Beschreibung

$$\mathcal{B} = (k_\Omega, (A_i)_{1\le i\le k_\Omega}, (C_i)_{1\le i\le k_\Omega}, \alpha_\Omega, (a_i)_{1\le i\le k_\Omega}, (\overset{i}{\omega})_{1\le i\le k_\Omega})$$

von $\partial\Omega$ festgehalten. Dann definieren wir

$$\Delta^{\mathcal{B},\gamma} := (-\gamma\cdot\alpha_\Omega, \gamma\cdot\alpha_\Omega)^{N-1},\quad \Lambda_r^{\mathcal{B},\gamma} := \{\tilde{A}_r\cdot(\eta, a_r(\eta))+C_r :\ \eta \in \Delta^{\mathcal{B},\gamma}\},$$

für $\gamma \in (0,1]$, $1 \le r \le k_\Omega$.

Weiterhin sei für $1 \le r \le k_\Omega$:

$$\Delta^{\mathcal{B}} := \Delta^{\mathcal{B},1},\quad \Lambda_r^{\mathcal{B}} := \Lambda_r^{\mathcal{B},1},$$

$$U_r^{\mathcal{B}} := \{\tilde{A}_r\cdot(\eta, a_r(\eta)+\xi)+C_r :\ \eta \in \Delta^{\mathcal{B},1},\ \xi \in (-\alpha_\Omega,\alpha_\Omega)\}.$$

Wir führen außerdem einige Funktionen ein: Es sei für $1 \le r \le k_\Omega$:

$$g_r^{\mathcal{B}}:\ \Delta^{\mathcal{B}} \times (-\alpha_\Omega,\alpha_\Omega) \ni (\eta,\xi) \to \tilde{A}_r\cdot(\eta, a_r(\eta)+\xi)+C_r \in U_r^{\mathcal{B}},$$

$$\overset{r}{u}{}^{\mathcal{B}}:\ \Delta^{\mathcal{B}} \ni \eta \to \tilde{A}_r\cdot(\eta, a_r(\eta))+C_r \in \Lambda_r^{\mathcal{B}};$$

$$J_r^{\mathcal{B}}:\ \Delta^{\mathcal{B}} \ni \eta \to \Big(1 + \sum_{l=1}^{N-1} (D_l a_r(\eta))^2\Big)^{1/2} \in [1,\infty);$$

$$B_r^{\mathcal{B}}:\ \Delta^{\mathcal{B}} \ni \eta \to \overset{r}{\omega} \circ \overset{r}{u}{}^{\mathcal{B}}(\eta)\cdot J_r^{\mathcal{B}}(\eta) \in (0,\infty);$$

$$p_r^{\mathcal{B}}:\ \mathbb{R}^N \ni y \to ((\tilde{A}_r^{-1}\cdot(y-C_r))_1, \dots, (\tilde{A}_r^{-1}\cdot(y-C_r))_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1}.$$

$\overset{r}{u}{}^{\mathcal{B}}$ ist bijektiv $(1 \le r \le k_\Omega)$. Damit kann man für $1 \le i,t \le k_\Omega$ folgende Abbildung definieren:

$$\psi_{it}^{\mathcal{B}} := (\overset{i}{u}{}^{\mathcal{B}})^{-1} \circ \overset{t}{u}{}^{\mathcal{B}} |_{(\overset{t}{u}{}^{\mathcal{B}})^{-1}(\Lambda_i^{\mathcal{B}} \cap \Lambda_t^{\mathcal{B}})}.$$

Den Index $\mathcal{B}$ lassen wir im Folgenden meist weg.

Mit n^Ω bezeichnen wir die äußere Einheitsnormale an Ω. Auch hier werden wir den Index Ω in den meisten Fällen weglassen.

<u>Lemma 2.2:</u> <u>Es gilt:</u>

$$(2.11)\quad \partial\Omega = \bigcup_{i=1}^{k_\Omega} \Lambda_i^{1/4};\ U_i \ \underline{\text{offen in}}\ \mathbb{R}^N;\ g_i\ \underline{\text{Diffeomorphismus}}.$$

(2.12) Es ist $\operatorname{dist}(\Lambda_r^{\gamma_1}, \partial\Omega \setminus \Lambda_r^{\gamma_2}) > 0$ für $1 \le r \le k_\Omega$, $\gamma_1, \gamma_2 \in (0,1]$ mit $\gamma_1 < \gamma_2$.

(2.13) $\overset{r}{u}$ ist topologisch und $\overset{r}{u}_m \in C^k(\Delta)$, für $1 \le r \le k_\Omega$, $1 \le m \le N$.

(2.14) Es ist $0 \le B_r \le J_r$, $B_r \in C^{k-1}(\Delta)$, $\operatorname{Tr} B_r \subset \Delta^{1/4}$ $(1 \le r \le k_\Omega)$;

(2.15) $n \circ \overset{r}{u}(\eta) = \tilde{A}_r \cdot (-\operatorname{grad} a_r(\eta), 1) \cdot (1/J_r(\eta))$ $\quad (1 \le r \le k_\Omega,\ \eta \in \Delta)$;

(2.16) $|\rho - \eta| \le |\overset{r}{u}(\rho) - \overset{r}{u}(\eta)|$ $\quad (\rho, \eta \in \Delta;\ 1 \le r \le k_\Omega)$;

(2.17) $|p_r(y) - \eta| \le |y - \overset{r}{u}(\eta)|$, $\Delta \subset K_{\operatorname{diam}\Omega}(p_r(x))$

$(1 \le r \le k_\Omega,\ y \in \mathbb{R}^N,\ x \in \overline{\Omega},\ \eta \in \Delta)$.

Ist $f: \partial\Omega \to \mathbb{R}$ integrierbar, so ist

(2.18) $\int_{\Lambda_i} f \, d\Omega = \int_\Delta f \circ \overset{i}{u}(\eta) \cdot J_i(\eta) \, d\eta$ für $1 \le i \le k_\Omega$,

(2.19) $\int_{\partial\Omega} f \, d\Omega = \sum_{i=1}^{k_\Omega} \int_\Delta f \circ \overset{i}{u}(\eta) \cdot B_i(\eta) \, d\eta$.

Es gibt Zahlen $\varepsilon_B, K_B \in (0,\infty)$ mit folgenden Eigenschaften:

(2.20) $|a_r|_k, |\overset{r}{u}_m|_k, |J_r|_{k-1}, |\overset{r}{\omega}|_k, |B_r|_{k-1}, |n_m \circ \overset{r}{u}|_{k-1}, |(\Psi_{rt})_l|_k \le K_B$;

$|D_a(\Psi_{rt})_l(\rho) - D_a(\Psi_{rt})_l(\tilde{\rho})| \le K_B \cdot |\rho - \tilde{\rho}|$

$(1 \le r,t \le k_\Omega,\ 1 \le m \le N,\ 1 \le l \le N-1,\ \rho, \tilde{\rho} \in \Delta,\ a \in \mathbb{N}_0^2$ mit $|a|_* \le k-1)$;

(2.21) $|\overset{r}{u}(\rho) - \overset{r}{u}(\eta)| \le K_B \cdot |\rho - \eta|$ $\quad (1 \le r \le k_\Omega,\ \rho, \eta \in \Delta)$;

(2.22) $|\langle x-y, n(y) \rangle| \le K_B \cdot |x-y|^2$ $\quad (x, y \in \partial\Omega)$;

(2.23) $|n(x) - n(y)| \le K_B \cdot |x-y|$ $\quad (x, y \in \partial\Omega)$;

(2.24) $x - \kappa \cdot n(x) \in \Omega$, $x + \kappa \cdot n(x) \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$,

$\overline{K_\kappa(x - \kappa \cdot n(x))} \setminus \{x\} \subset \Omega$ $\quad (x \in \partial\Omega,\ \kappa \in (0, \varepsilon_B])$; $K_\kappa(x+\kappa n(x)) \setminus \{x\} \subset \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$

(2.25) $|x \pm \kappa \cdot n(x) - y| \ge \kappa$, $|x \pm \kappa \cdot n(x) - y| \ge \varepsilon_B \cdot |x-y|$

$(x, y \in \partial\Omega,\ \kappa \in (0, \varepsilon_B])$;

(2.26) $|\kappa - \tilde{\kappa}| \le |\overset{r}{u}(\rho) - \kappa \cdot n \circ \overset{r}{u}(\rho) - \overset{r}{u}(\tilde{\rho}) + \tilde{\kappa} \cdot n \circ \overset{r}{u}(\tilde{\rho})|$,

$|\overset{r}{u}(\rho) - \overset{r}{u}(\tilde{\rho})| \le \sqrt{2} \cdot |\overset{r}{u}(\rho) - \kappa \cdot n \circ \overset{r}{u}(\rho) - \overset{r}{u}(\tilde{\rho}) + \tilde{\kappa} \cdot n \circ \overset{r}{u}(\tilde{\rho})|$

$(1 \le r \le k_\Omega,\ \rho, \tilde{\rho} \in \Delta,\ \kappa, \tilde{\kappa} \in (0, \varepsilon_B])$;

(2.27) Für $r \in \{1, \ldots, k_\Omega\}$, $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^N$ trifft einer der drei folgenden Fälle zu:

1) Es gibt $\rho_1, \rho_2 \in \Delta$, $\kappa_1, \kappa_2 \in (0, \varepsilon_B]$ mit H $[-\varepsilon_B$
$z_i = \overset{r}{u}(\rho_i) - \kappa_i \cdot n \circ \overset{r}{u}(\rho_i)$; es ist $\kappa_i > 0$ bzw. $\kappa_i = 0$ bzw. $\kappa_i < 0$, wenn $z_i \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ bzw. $z_i \in \partial\Omega$ bzw. $z_i \in \Omega$ ist $(i = 1,2)$. L+

2) $|z_1 + \theta \cdot (z_2 - z_1) - \overset{r}{u}(\eta)| \ge \varepsilon_B/2$ für $\theta \in [0,1]$, $\eta \in \operatorname{Tr} B_r$;

3) $|z_1 - z_2| \ge \varepsilon_B/2$.

<u>Beweis:</u> Zu $i \in \{1,\dots,k_\Omega\}$ setzen wir wie im Beweis zu Lemma 2.1:

$$A_i : \mathbb{R}^N \ni z \to \tilde{A}_i \cdot z + C_i \in \mathbb{R}^N.$$

Es ist unmittelbar klar:

(2.28) $g_i(\eta,\xi) = A_i(\eta, a_i(\eta)+\xi)$, $\overset{i}{u}(\eta) = g_i(\eta,0) = A_i(\eta, a_i(\eta))$

für $\eta \in \Delta$, $\xi \in (-\alpha_\Omega, \alpha_\Omega)$, $1 \le i \le k_\Omega$;

(2.29) $\Lambda_i^\gamma = g_i(\Delta^\gamma \times \{0\}) = \overset{i}{u}(\Delta^\gamma)$ für $1 \le i \le k_\Omega$, $\gamma \in (0,1]$;

(2.30) $U_i \cap \partial\Omega = \Lambda_i$, $U_i \cap \Omega = g_i(\Delta \times (-\alpha_\Omega, 0))$,

$U_i \cap \mathbb{R}^N \setminus \bar{\Omega} = g_i(\Delta \times (0, \alpha_\Omega))$,

$\mathrm{Tr}\, \overset{i}{\omega} \subset g_i(\Delta^{1/4} \times (-\alpha_\Omega/4, \alpha_\Omega/4))$, für $1 \le i \le k_\Omega$.

Sei $i \in \{1,\dots,k_\Omega\}$. g_i ist bijektiv, g_i gehört zu $C^k(\Delta \times (-\alpha_\Omega, \alpha_\Omega))$,

$$g_i^{-1}(x) = (\mathrm{pr}_N(\tilde{A}_i^{-1} \cdot x - \tilde{A}_i^{-1} \cdot C_i), -a_i(\mathrm{pr}_N(\tilde{A}_i^{-1} \cdot x - \tilde{A}_i^{-1} \cdot C_i)) + (\tilde{A}_i^{-1} \cdot (x - C_i))_N)$$

für $x \in U_i$. Somit ist g_i^{-1} stetig, und $|(g_i)_m|_k < \infty$, $|(g_i^{-1})_m|_k < \infty$, für $1 \le m \le N$.

Sei $\gamma_1, \gamma_2 \in (0,1]$ mit $\gamma_1 < \gamma_2$. Dann gilt:

$$\overline{g_i((-\gamma_1 \cdot \alpha_\Omega, \gamma_1 \cdot \alpha_\Omega)^N)} = g_i([-\gamma_1 \cdot \alpha_\Omega, \gamma_1 \cdot \alpha_\Omega]^N) \text{ (da } g_i \text{ topologisch)}$$
$$\subset g_i((-\gamma_2 \cdot \alpha_\Omega, \gamma_2 \cdot \alpha_\Omega)^N).$$

Somit gilt für $\gamma_1, \gamma_2 \in (0,1]$ mit $\gamma_1 < \gamma_2$:

$$\delta_{\gamma_1\gamma_2} := \min_{1 \le i \le k_\Omega} \mathrm{dist}(g_i((-\gamma_1 \cdot \alpha_\Omega, \gamma_1 \cdot \alpha_\Omega)^N), \mathbb{R}^N \setminus g_i((-\gamma_2 \cdot \alpha_\Omega, \gamma_2 \cdot \alpha_\Omega)^N)) > 0.$$

Insbesondere ist

(2.31) $|x-y| \ge \delta_{\gamma_1\gamma_2}$ für $1 \le i \le k_\Omega$, γ_1, γ_2 wie eben,

$x \in g_i((-\gamma_1 \cdot \alpha_\Omega, \gamma_1 \cdot \alpha_\Omega)^N)$, $y \in \mathbb{R}^N \setminus g_i((-\gamma_2 \cdot \alpha_\Omega, \gamma_2 \cdot \alpha_\Omega)^N)$.

Hieraus sowie aus (2.29) folgt, daß $|x-y| \ge \delta_{\gamma_1\gamma_2}$ für i, γ_1, γ_2 wie eben, $x \in \Lambda_i^{\gamma_1}$, $y \in \partial\Omega \setminus \Lambda_i^{\gamma_2}$.

Sei $i \in \{1,\dots,k_\Omega\}$. Die Funktion $\overset{i}{u}$ ist als Links- und Rechtseinschränkung von g_i (siehe (2.28)) topologisch sowie ein C^k-Diffeomorphismus im Sinne von [RT3], S. 3. Da $\Lambda_i = U_i \cap \partial\Omega$ (siehe (2.30)), ist Λ_i offen in $\partial\Omega$. Somit ist $(\Delta, \overset{i}{u}, \Lambda_i)$ lokale Darstellung von $\partial\Omega$ ([RT3], S. 19). Man rechnet leicht nach (verwende [F3], Corollar 14.1):

$$\det(\langle D_j \overset{i}{u}(\eta), D_l \overset{i}{u}(\eta) \rangle)_{1 \le j, l \le N-1} = 1 + \sum_{l=1}^{N-1} (D_l a_i(\eta))^2 = J_i(\eta)^2.$$

Ist $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ integrierbar, so folgt jetzt (2.18) aus [RT3], 84.8, 65.24. Aus (2.18) ergibt sich (beachte: $\mathrm{Tr}\, \overset{i}{\omega} \subset \Lambda_i$):

$$\int_{\partial\Omega} f \cdot \overset{i}{\omega}\, d\Omega = \int_{\Lambda_i} f \cdot \overset{i}{\omega}\, d\Omega = \int_\Delta f \cdot \overset{i}{u}(\eta) \cdot \overset{i}{\omega} \circ \overset{i}{u}(\eta) \cdot J_i(\eta)\, d\eta.$$

Wegen $\sum_{i=1}^{k_\Omega} \overset{i}{\omega}|\partial\Omega = 1$ folgt (2.19).

Weil $a_i \in C^k(\bar{\Delta})$ für $1 \le i \le k_\Omega$, ist

(2.32) $K_1 := \max\{|(\overset{i}{u})_m|_k : 1 \le i \le k_\Omega,\ 1 \le m \le N\} < \infty$.

Wegen (2.28) ist

(2.33) $(\overset{i}{u})^{-1} = pr_N \circ (g_i)^{-1} | \Lambda_i$ für $1 \le i \le k_\Omega$.

Sei $i,t \in \{1,\dots,k_\Omega\}$ festgehalten. Λ_t, Λ_i sind offene Mengen in $\partial\Omega$. Also ist $\Lambda_t \cap \Lambda_i$ offen in Λ_t, und somit $(\overset{t}{u})^{-1}(\Lambda_t \cap \Lambda_i)$ offen in $\mathbb{R}^{N-1}$. Weiterhin folgt aus (2.33), daß die vor Lemma 2.2 definierte Funktion Ψ_{it} gegeben ist durch

(2.34) $\Psi_{it} = pr_N \circ (g_i)^{-1} \circ \overset{t}{u} | (\overset{t}{u})^{-1}(\Lambda_t \cap \Lambda_i)$.

Wie zu Beginn des Beweises festgestellt, ist $|(g_i^{-1})_m|_k < \infty$, $|(g_i)_m|_k < \infty$ für $1 \le i \le k_\Omega$, $1 \le m \le N$. Somit kann man aus (2.34), (2.28) folgern:

$$K_2 := \{|(\Psi_{it})_l|_k : 1 \le i,t \le k_\Omega,\ 1 \le l \le N-1\} < \infty.$$

Da der Definitionsbereich von $(\Psi_{it})_l$ nicht notwendig konvex ist, benötigt man eine zusätzliche Überlegung, um $|(\Psi_{it})_l(\rho) - (\Psi_{it})_l(\tilde\rho)|$ abzuschätzen ($1 \le l \le N-1$, $\rho,\tilde\rho \in \Delta$, $1 \le i,t \le 2$). Man bemerkt zunächst, daß

(2.35) $g_i^{-1}(y)_l = (\tilde{A}_i^{-1} \cdot (y - C_i))_l$ für $y \in U_i$, $1 \le l \le N-1$.

Nun findet man für $1 \le i,t \le k_\Omega$, $1 \le l \le N-1$, $\rho,\tilde\rho \in (\overset{t}{u})^{-1}(\Lambda_t \cap \Lambda_i)$:

$$(\Psi_{it})_l(\rho) - (\Psi_{it})_l(\tilde\rho)$$

$$= (g_i^{-1})_l(\overset{t}{u}(\rho)) - (g_i^{-1})_l(\overset{t}{u}(\tilde\rho)) \qquad \text{(wegen (2.34))}$$

$$= \left(\tilde{A}_i^{-1} \cdot (\overset{t}{u}(\rho) - \overset{t}{u}(\tilde\rho))\right)_l \qquad \text{(wegen (2.35))}.$$

Es folgt für $i,t,l,\rho,\tilde\rho$ wie eben, sowie für $a \in \mathbb{N}_0^2$ mit $|a|_* \le k-1$:

$$|D_a(\Psi_{it})_l(\rho) - D_a(\Psi_{it})_l(\tilde\rho)| = |D_a(\tilde{A}_i^{-1} \cdot (\overset{t}{u}(\rho) - \overset{t}{u}(\tilde\rho)))_l|$$

$$= |(\tilde{A}_i^{-1} \cdot (D_a\overset{t}{u}(\rho) - D_a\overset{t}{u}(\tilde\rho)))_l| \le |D_a\overset{t}{u}(\rho) - D_a\overset{t}{u}(\tilde\rho)|$$

$$\le N \cdot K_1 \cdot |\rho - \tilde\rho| \qquad \text{(siehe (2.32))}.$$

Wegen $a_i \in C^k(\bar\Delta)$ gilt für die im Lemma definierte Funktion J_i:

$$J_i \in C^{k-1}(\Delta),\ |J_i|_{k-1} < \infty \qquad (1 \le i \le k_\Omega).$$

Damit ist auch $B_i \in C^{k-1}(\Delta)$ $(1 \le i \le k_\Omega)$. Ferner haben wir:

$$K_3 := \max\{|B_i|_{k-1} : 1 \le i \le k_\Omega\} \cup \{|J_i|_{k-1} : 1 \le i \le k_\Omega\} < \infty.$$

Sei $i \in \{1,\dots,k_\Omega\}$, $\eta \in \mathrm{Tr}\, B_i$. Dann gibt es eine Folge (η_n) in Δ mit $\eta_n \to \eta$ $(n \to \infty)$, und mit $B_i(\eta_n) \neq 0$, also $\overset{i}{\omega} \circ \overset{i}{u}(\eta_n) \neq 0$, für $n \in \mathbb{N}$. Damit haben wir:

$$\overset{i}{u}(\eta) \in \mathrm{Tr}\, \overset{i}{\omega} \cap \partial\Omega \subset \Lambda_i^{1/4} \qquad \text{(siehe (2.2), (2.5))},$$

also: $\eta \in \Delta^{1/4}$. Es folgt: $\mathrm{Tr}\, B_i \subset \Delta^{1/4}$.

Es ist für $1 \le i \le k_\Omega$, $\rho,\eta \in \Delta$:

(2.36) $|\rho - \eta| \le |(\rho, a_i(\rho)) - (\eta, a_i(\eta))|$

$$= |\tilde{A}_i \cdot (\rho, a_i(\rho)) + C_i - \tilde{A}_i \cdot (\eta, a_i(\eta)) - C_i|$$

$$= |\overset{i}{u}(\rho) - \overset{i}{u}(\eta)| \le |\rho - \eta| + |a_i(\rho) - a_i(\eta)|$$

$$= |\rho - \eta| + \left|\int_0^1 \sum_{l=1}^{N-1} D_l a_i(\eta + \theta(\rho - \eta)) \cdot (\rho_l - \eta_l)\, d\theta\right|$$

$$\le K_4 \cdot |\rho - \eta|$$

(mit $K_4 := \max\{1 + |a_r|_k : 1 \le r \le k_\Omega\}$).

Weiter ist für i,η wie eben, sowie für $y \in \mathbb{R}^N$:

$$(2.37)\quad |y-\overset{i}{u}(\eta)| = |y-\tilde{A}_i\cdot(\eta,a_i(\eta))-C_i|$$

$$= |\tilde{A}_i^{-1}\cdot(y-C_i)-(\eta,a_i(\eta))| \qquad (\text{da } \tilde{A}_i \text{ orthonormal})$$

$$\geq |p_i(y)-\eta|.$$

Für $i \in \{1,\dots,k_\Omega\}$, $\eta \in \Delta$ ist $\overset{i}{u}(\eta) \in \partial\Omega$, also für $x \in \bar{\Omega}$: $|x-\overset{i}{u}(\eta)| \leq \operatorname{diam}\Omega$, und damit aus (2.37): $|p_i(x)-\eta| \leq \operatorname{diam}\Omega$. Somit gilt:

$$\Delta \subset \overline{K_{\operatorname{diam}\Omega}(p_i(x))}, \text{ für } x \in \bar{\Omega},\ 1 \leq i \leq k_\Omega.$$

Wir halten wiederum $i \in \{1,\dots,k_\Omega\}$ fest. Die Menge U_i ist offen in $\mathbb{R}^N$, und $g_i^{-1}: U_i \to (-\alpha_\Omega,\alpha_\Omega)^N$ ist Diffeomorphismus. Gemäß (2.2), (2.3) gilt, mit der Abkürzung $f := (g_i^{-1})_N$:

$$U_i \cap \Omega = \{y \in U_i : f(y) < 0\},\ U_i \cap \partial\Omega = \{y \in U_i : f(y) = 0\}.$$

Für $y \in V_i \cap \partial\Omega$ gilt somit nach [RT3], S. 57/58:

$$(2.38)\quad n(y) = \operatorname{grad} f(y)/|\operatorname{grad} f(y)|.$$

(Zur Erinnerung: n bezeichnet die äußere Einheitsnormale an Ω). Zu $\eta \in \Delta$, $\xi \in (-\alpha_\Omega,\alpha_\Omega)$ kann man die Jakobi-Matrix $(dg_i/dX)(\eta,\xi)$ leicht ausrechnen. Durch Umkehrung erhält man die Jakobi-Matrix $(dg_i^{-1}/dX)(y)$, für $y \in U_i$. Daraus läßt sich $\operatorname{grad} f(\overset{i}{u}(\eta))$ ablesen; es ergibt sich:

$$\operatorname{grad} f(\overset{i}{u}(\eta)) = \tilde{A}_i\cdot(-\operatorname{grad} a_i(\eta),1) \qquad (\eta \in \Delta).$$

Jetzt erhält man aus (2.38):

$$(2.39)\quad n\circ\overset{i}{u}(\eta) = \tilde{A}_i\cdot(-\operatorname{grad} a_i(\eta),1)\cdot(1/J_i(\eta)) \qquad (\eta \in \Delta).$$

Somit folgt (Beachte: $J_i \geq 1$, $a_i \in C^k(\bar{\Delta})$):

$$K_5 := \max\{|n\circ\overset{r}{u}_m|_{k-1} : 1 \leq r \leq k_\Omega,\ 1 \leq m \leq n\} < \infty.$$

Sei $x,y \in \partial\Omega$. Wegen (2.1) gibt es $i \in \{1,\dots,k_\Omega\}$ mit $x \in \Lambda_i^{1/4}$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

<u>1. Fall:</u> $y \in \Lambda_i$. Dann existiert $\rho,\eta \in \Delta$ mit $x = \overset{i}{u}(\rho)$, $y = \overset{i}{u}(\eta)$. Man findet mit (2.39):

$$|\langle x-y,n(y)\rangle|$$

$$= |\langle\tilde{A}_i\cdot(\rho-\eta,a_i(\rho)-a_i(\eta)),\tilde{A}_i\cdot(-\operatorname{grad} a_i(\eta),1)/J_i(\rho)\rangle|$$

$$= \Big|-\sum_{l=1}^{N-1}(\rho_l-\eta_l)\cdot D_l a_i(\eta) + a_r(\rho) - a_r(\eta)\Big|/J_r(\eta)$$

$$= \Big|-\sum_{l=1}^{N-1}(\rho_l-\eta_l)\cdot D_l a_i(\eta) + \int_0^1\sum_{l=1}^{N-1} D_l a_r(\eta+\theta(\rho-\eta))\cdot(\rho_l-\eta_l)\,d\theta\Big|/J_r(\eta)$$

$$\leq \sum_{l=1}^{N-1}|\rho_l-\eta_l|\cdot K_4\cdot|\rho-\eta| \qquad (\text{beachte: } J_1 \geq 1)$$

$$\leq (N-1)\cdot K_4\cdot|\rho-\eta|^2.$$

Ferner erhält man aus (2.39):

$$|n(x)-n(y)|$$

$$= |(-\operatorname{grad} a_i(\rho),1)/J_i(\rho) + (\operatorname{grad} a_i(\eta),-1)/J_i(\eta)|$$

$$\leq |\operatorname{grad} a_i(\rho) - \operatorname{grad} a_i(\eta)|/J_i(\rho) +$$

$$+ |(\operatorname{grad} a_i(\eta),-1)|\cdot|J_i(\rho)-J_i(\eta)|/(J_i(\rho)J_i(\eta)) \leq$$

$$\leq |\text{grad } a_i(\rho) - \text{grad } a_i(\eta)| + (1+|a_i|_1)|J_i(\rho)-J_i(\eta)|$$

$$\leq K_6 \cdot |\rho-\eta|$$

$$(\text{mit } K_6 := \max\{ \sum_{l,m=1}^{N-1} |D_l D_m a_j|_o + (1+|a_j|_1) \cdot \sum_{l=1}^{N-1} |D_l J_j|_o :\ 1 \leq j \leq k_\Omega\}).$$

<u>2. Fall:</u> $y \notin \Lambda_i$. Wegen $x \in \Lambda_i^{1/4}$ ist dann $|x-y| \geq \delta_{1/4,1}$ (siehe (2.31)), also:

$$|\langle x-y, n(y)\rangle| \leq (\delta_{1/4,1})^{-2} \cdot |x-y|^2,$$

$$|n(x)-n(y)| \leq 2 \cdot (\delta_{1/4,1})^{-1} \cdot |x-y|.$$

Man setzt nun

$$K_7 := \max\{(N-1) \cdot K_4, K_6, 2 \cdot (\delta_{1/4,1})^{-1}, 2\}.$$

Dann ist also

$$(2.40) \quad |\langle x-y, n(y)\rangle| \leq K_7 \cdot |x-y|^2,$$

$$|n(x)-n(y)| \leq K_7 \cdot |x-y| \quad \text{für } x,y \in \partial\Omega.$$

Sei $x \in \partial\Omega$. Es gibt $i \in \{1,\ldots,k_\Omega\}$ mit $x \in \Lambda_i^{1/4}$, also $x = \overset{i}{u}(\rho)$ für ein $\rho \in \Delta^{1/4}$. Für $\kappa > 0$ ist dann wegen (2.39):

$$(2.41) \quad x \pm \kappa \cdot n(x) = \overset{i}{u}(\rho) \pm \kappa \cdot n \circ \overset{i}{u}(\rho)$$

$$= \tilde{A}_i \cdot (\rho \mp \kappa \cdot \text{grad } a_i(\rho)/J_i(\rho),\ a_i(\rho) \pm \kappa/J_i(\rho)).$$

Für $\kappa \in (0, 3\alpha_\Omega/4]$ ist aber wegen $\rho \in \Delta^{1/4}$:

$$|\rho_j \mp \kappa D_j a_i(\rho)/J_i(\rho)| \leq \alpha_\Omega,$$

also:

$$\rho \mp \kappa \cdot \text{grad } a_i(\rho)/J_i(\rho) \in \Delta,$$

so daß $a_i(\rho \mp \kappa \cdot \text{grad } a_i(\rho))$ wohldefiniert ist. Man findet nun für $\kappa \in (0, 3\alpha_\Omega/4]$:

$$(2.42) \quad a_i(\rho) - a_i(\rho \mp \kappa \cdot \text{grad } a_i(\rho)/J_i(\rho)) \pm \kappa/J_i(\rho)$$

$$= \int_0^1 \sum_{l=1}^{N-1} D_l a_i(\rho \mp \kappa \cdot (1-\theta) \cdot \text{grad } a_i(\rho)/J_i(\rho))\, d\theta$$

$$\cdot (\pm\kappa) \cdot D_l a_i(\rho)/J_i(\rho) \pm \kappa/J_i(\rho)$$

$$= \int_0^1 \sum_{l=1}^{N-1} \{D_l a_i(\rho \mp \kappa \cdot (1-\theta) \cdot \text{grad } a_i(\rho)/J_i(\rho)) - D_l a_i(\rho)\}$$

$$\cdot (\pm\kappa) \cdot D_l a_i(\rho)/J_i(\rho)\, d\theta \pm \kappa \cdot J_i(\rho).$$

Die letzte Gleichung folgt aus der Definition von J_i. Sei

$$\varepsilon_1 := \min\{3 \cdot \alpha_\Omega/4, (N-1) \cdot K_4)^{-1},$$

$$\alpha_\Omega \cdot (1+\max\{|J_j|_o :\ 1 \leq j \leq k_\Omega\})^{-1}\}.$$

Dann ergibt sich für $\kappa \in (0, \varepsilon_1]$:

$$(2.43) \quad |a_i(\rho) - a_i(\rho \mp \kappa \cdot \text{grad } a_i(\rho)/J_i(\rho)) \pm \kappa/J_i(\rho)|$$

$$\leq \sum_{l=1}^{N-1} K_4 \cdot \kappa^2 \cdot |\text{grad } a_i(\rho)|/J_i(\rho) \cdot |D_l a_i(\rho)|/J_i(\rho) + \kappa \cdot J_i(\rho)$$

$$< (N-1) \cdot K_4 \cdot \kappa^2 + \kappa \cdot J_i(\rho) \qquad (\text{Beachte: } |\text{grad } a_i|/J_i < 1)$$

$$\leq \kappa \cdot (1+J_i(\rho)) \leq \alpha_\Omega.$$

$$(2.44)\quad a_i(\rho) - a_i(\rho - \kappa\cdot\mathrm{grad}\ a_i(\rho)/J_i(\rho)) + \kappa/J_i(\rho)$$

$$\geq - \sum_{l=1}^{N-1} K_4\cdot\kappa^2\cdot|\mathrm{grad}\ a_i(\rho)|/J_i(\rho)\cdot|D_l a_i(\rho)|/J_i(\rho) + \kappa\cdot J_i(\rho)$$

$$> -(N-1)\cdot K_4\cdot\kappa^2 + \kappa \qquad \text{(Beachte: } J_i \geq 1)$$

$$\geq 0,$$

und analog:

$$(2.45)\quad a_i(\rho) - a_i(\rho + \kappa\cdot\mathrm{grad}\ a_i(\rho)/J_i(\rho)) - \kappa/J_i(\rho) < 0.$$

Wegen (2.4), (2.41)-(2.44) folgt nun für $\kappa \in (0,\varepsilon_1]$: $x+\kappa\cdot n(x) \in \mathbb{R}^N\setminus\bar{\Omega}$. Entsprechend erhält man aus (2.3), (2.41)-(2.43), (2.45): $x-\kappa\cdot n(x) \in \Omega$ für $\kappa \in (0,\varepsilon_1]$.

Seien wiederum $x,y \in \partial\Omega$. Wir wählen $i \in \{1,\dots,k_\Omega\}$, $\rho \in \Delta^{1/4}$ mit $x = \overset{i}{u}(\rho)$. Es tritt einer der beiden folgenden Fälle ein:

<u>1. Fall:</u> $y \in \Lambda_i$; d.h.: Es gibt $\eta \in \Delta$ mit $y = \overset{i}{u}(\eta)$. Dann findet man für $\kappa \in (0,\infty)$, wegen (2.39):

$$|x - \kappa\cdot n(x) - y|^2$$

$$= |(\rho,a_i(\rho)) - \kappa\cdot(-\mathrm{grad}\ a_i(\rho),1)/J_i(\rho) - (\eta,a_i(\eta))|^2$$

$$= \sum_{l=1}^{N-1}\{(\rho_l-\eta_l)^2 + 2\cdot\kappa\cdot(\rho_l-\eta_l)\cdot D_l a_i(\rho)/J_i(\rho) + \kappa^2\cdot D_l a_i(\rho)^2/J_i(\rho)^2\}$$

$$+ (a_i(\rho)-a_i(\eta))^2 - 2\cdot\kappa\cdot(a_i(\rho)-a_i(\eta))/J_i(\rho) + \kappa^2/J_i(\rho)^2 =$$

$$= \sum_{l=1}^{N-1}\{(\rho_l-\eta_l)^2 + 2\cdot\kappa\cdot(\rho_l-\eta_l)\cdot D_l a_i(\rho)/J_i(\rho)\}$$

$$+ (a_i(\rho)-a_i(\eta))^2 - 2\cdot\kappa\cdot\int_0^1 \sum_{l=1}^{N-1} D_l a_i(\eta+\theta(\rho-\eta))\cdot(\rho_l-\eta_l)d\eta/J_i(\rho)$$

$$+ \kappa^2\cdot(\sum_{l=1}^{N-1} D_l a_i(\rho)^2 + 1)/J_i(\rho)^2$$

$$= |x-y|^2 + 2\cdot\kappa\cdot\sum_{l=1}^{N-1}(\rho_l-\eta_l)\cdot\int_0^1(D_l a_i(\rho) - D_l a_i(\eta+\theta\cdot(\rho-\eta)))d\theta/J_i(\rho) + \kappa^2$$

$$\geq |x-y|^2 - 2\cdot\kappa\cdot\sum_{l=1}^{N-1}|\rho_l-\eta_l|\cdot K_4\cdot|\rho-\eta| + \kappa^2$$

$$\geq |x-y|^2 - 2\cdot\kappa\cdot(N-1)\cdot K_4\cdot|\rho-\eta|^2 + \kappa^2$$

$$\geq (1-\kappa\cdot 2\cdot(N-1)\cdot K_4)\cdot|x-y|^2 + \kappa^2 \qquad \text{(siehe (2.36))}.$$

Für $\kappa \in (0,(4\cdot(N-1)\cdot K_4)^{-1}]$ folgt:

$$|x-\kappa\cdot n(x)-y|^2 \geq \kappa^2 \text{ und } |x-\kappa\cdot n(x)-y|^2 \geq |x-y|^2/2.$$

<u>2. Fall:</u> $y \notin \Lambda_i$. Dann ist $|x-y| \geq \delta_{1/4,1}$ (siehe (2.31)). Somit ist für $\kappa \in (0,\delta_{1/4,1}/2]$:

$$|x-\kappa\cdot n(x)-y| \geq |x-y| - \kappa \geq \delta_{1/4,1}/2 \geq \kappa$$

und

$$|x-\kappa\cdot n(x)-y| \geq \delta_{1/4,1}/2\cdot(\mathrm{diam}\ \Omega)^{-1}\cdot|x-y|.$$

Setzt man also

$$\varepsilon_2 := \min\{(4\cdot(N-1)\cdot K_4)^{-1}, \delta_{1/4,1}/2\},$$

$$\varepsilon_3 := \min\{1/\sqrt{2}, \delta_{1/4,1}\cdot(2\cdot\mathrm{diam}\,\Omega)^{-1}\},$$

so gilt:

$$(2.46)\quad |x-\kappa\cdot n(x)-y| \geq \kappa,\ \ |x-\kappa\cdot n(x)-y| \geq \varepsilon_3 |x-y| \ \text{ für } x,y \in \partial\Omega,$$

$$\kappa \in (0,\varepsilon_2].$$

Für $x+\kappa\cdot n(x)-y$ gelten analoge Rechnungen.

Für $i \in \{1,\dots,k_\Omega\}$, $\rho,\rho' \in \Delta$, $\kappa,\kappa' \in (0,\min\{\varepsilon_2,(4\cdot K_7)^{-1}\}]$ mit $\kappa \geq \kappa'$ ist

$$\begin{aligned}(2.47)\quad &|\overset{i}{u}(\rho) - \kappa\cdot n\circ\overset{i}{u}(\rho) - \overset{i}{u}(\rho') + \kappa'\cdot n\circ\overset{i}{u}(\rho')| \\ &\geq |\overset{i}{u}(\rho) - \kappa\cdot n\circ\overset{i}{u}(\rho) - \overset{i}{u}(\rho')| - \kappa \\ &\geq \kappa-\kappa' \qquad \text{(wegen (2.46))},\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(2.48)\quad &|\overset{i}{u}(\rho) - \kappa\cdot n\circ\overset{i}{u}(\rho) - \overset{i}{u}(\rho') + \kappa'\cdot n\circ\overset{i}{u}(\rho')|^2 \\ &\geq |\overset{i}{u}(\rho)-\overset{i}{u}(\rho')|^2 + \kappa^2 + \kappa'^2 - 2\cdot\kappa\cdot\kappa' - \\ &\quad - 2\cdot\kappa\cdot\langle\overset{i}{u}(\rho)-\overset{i}{u}(\rho'), n\circ\overset{i}{u}(\rho)\rangle + 2\cdot\kappa'\cdot\langle\overset{i}{u}(\rho)-\overset{i}{u}(\rho'), n\circ\overset{i}{u}(\rho')\rangle \\ &\geq |\overset{i}{u}(\rho)-\overset{i}{u}(\rho')|^2 + |\kappa-\kappa'|^2 - 2\cdot\kappa'\cdot K_7\cdot|\overset{i}{u}(\rho)-\overset{i}{u}(\rho')|^2 \\ &\quad - 2\cdot\kappa\cdot K_7\cdot|\overset{i}{u}(\rho)-\overset{i}{u}(\rho')|^2 \qquad \text{(wegen (2.40))} \\ &\geq (1/2)\cdot|\overset{i}{u}(\rho)-\overset{i}{u}(\rho')|.\end{aligned}$$

Man setze nun

$$K_8 := \max\{N\cdot K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_7\},$$

$$\varepsilon_8 := \min\{(1/2)\cdot\delta_{1/4,1/2}, \delta_{1/2,1}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, (4\cdot K_7)^{-1}\}.$$

Dann folgen aus dem bisherigen Beweis alle Behauptungen von Lemma 2.2, mit Ausnahme von (2.27) und der letzten Aussage von (2.24) (innere Kugeleigenschaft). Zum Beweis dieser beiden Aussagen betrachten wir folgende Situation: Sei

$$\begin{aligned}(2.49)\quad & r \in \{1,\dots,k_\Omega\},\ x \in g_r((-\alpha_\Omega/2,\alpha_\Omega/2)^N),\ y \in \partial\Omega \text{ mit} \\ & |x-y| = \mathrm{dist}(x,\partial\Omega) \leq \varepsilon_8.\end{aligned}$$

Dann stellt man zunächst fest: $|x-y| < \varepsilon_8 \leq \delta_{1/2,1}$. Weiter ergibt sich aus der dritten Aussage von (2.49) sowie aus der Definition von $\delta_{1/2,1}$: $y \in g_r((-\alpha_\Omega,\alpha_\Omega)^N)$, also wegen $y \in \partial\Omega$: $y \in \Lambda_r$. Es gibt somit $\zeta,\rho \in \Delta$, $\xi \in (-\alpha_\Omega,\alpha_\Omega)$ mit

$$x = g_r(\zeta,\xi) = A_r(\zeta,a_r(\zeta)+\xi) \ \text{(siehe (2.28))}, \qquad y = \overset{r}{u}(\rho).$$

Da $\overset{r}{u}(\eta) \in \partial\Omega$ für $\eta \in \Delta$, muß nach Auswahl von y gelten:

$$|x-\overset{r}{u}(\eta)| \geq |x-\overset{r}{u}(\rho)| \ \text{ für } \eta \in \Delta.$$

ρ ist also Minimumstelle der Funktion

$$F:\ \Delta \ni \eta \ \to\ |A_r(\zeta,a_r(\zeta)+\xi)-\overset{r}{u}(\eta)|^2 \in \mathbb{R}.$$

Nun ist aber

$$F(\eta) = \sum_{l=1}^{N-1}(\eta_l-\zeta_l)^2 + (a_r(\eta)-a_r(\zeta)-\xi)^2 \ \text{ für } \eta \in \Delta.$$

Also gilt an der Stelle $\eta = \rho$, weil ρ Minimumstelle von F ist:

(2.50) $2\cdot(\rho_l-\zeta_l) + 2\cdot(a_r(\rho)-a_r(\zeta)-\xi)\cdot D_l a_r(\rho) = 0$ für $1 \le l \le N-1$.

Diese Gleichung multipliziert man mit $D_l a_r(\rho)$; dann addiert man über l. Nach einer Umformung erhält man:

$$a_r(\rho) - a_r(\zeta) - \xi$$
$$= \sum_{l=1}^{N-1} (\rho_l-\zeta_l)\cdot D_l a_r(\rho) + (a_r(\rho)-a_r(\zeta)-\xi)\cdot J_r(\rho)^2.$$

Dies bedeutet:

(2.51) $a_r(\rho) - a_r(\zeta) - \xi$

$$= \langle(-\text{grad } a_r(\rho),1)/J_r(\rho),(\rho-\zeta,a_r(\rho)-a_r(\zeta)-\xi)\rangle/J_r(\rho)$$

$$= \langle\tilde{A}_r\cdot(-\text{grad } a_r(\rho),1)/J_r(\rho),\tilde{A}_r\cdot(\rho-\zeta,a_r(\rho)-a_r(\zeta)-\xi)\rangle\cdot(1/J_r(\rho))$$

$$= \langle n(y),y-x\rangle/J_r(\rho) \quad \text{(siehe (2.39))}.$$

Dieses Ergebnis setzt man in (2.50) ein; es folgt:

(2.52) $\rho_l-\zeta_l = \langle n(y),x-y\rangle\cdot D_l a_r(\rho)/J_r(\rho)$ für $1 \le l \le N-1$.

Damit hat man:

$$y-x = \tilde{A}_r\cdot(\rho-\zeta,a_r(\rho)-a_r(\zeta)-\xi)$$

$$= \langle n(y),y-x\rangle/J_r(\rho)\cdot\tilde{A}_r\cdot(-\text{grad } a_r(\rho),1) \quad \text{(wegen (2.51), (2.52))}$$

$$= \langle n(y),y-x\rangle\cdot n(y) \quad \text{(siehe (2.39))};$$

also:

(2.53) $x = y - \langle n(y),y-x\rangle\cdot n(y)$.

Wegen $|x-y| < \varepsilon_B$ gilt: $|\langle n(y),y-x\rangle| < \varepsilon_1$. Aus (2.53) und der Auswahl von ε_1 folgt nun: Im Fall $x \in \Omega$ ist $-\langle n(y),y-x\rangle$ kleiner als 0, im Fall $x \in \partial\Omega$ gleich 0, im Fall $x \in \mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}$ größer als 0. Wir bemerken noch, daß aus (2.53) und der Auswahl von y folgt: $|\langle n(y),y-x\rangle| = \text{dist}(x,\partial\Omega)$. Insgesamt haben wir nun gezeigt:

(2.54) Für r,x,y wie in (2.49) gibt es $\rho \in \Delta$, $\kappa \in [-\varepsilon_B,\varepsilon_B]$ mit

$x = \overset{i}{u}(\rho) + \kappa\cdot n\circ\overset{i}{u}(\rho)$, $y = \overset{i}{u}(\rho)$, $|\kappa| = \text{dist}(x,\partial\Omega)$, wobei $\kappa > 0$ bzw. $\kappa = 0$ bzw. $\kappa < 0$, je nachdem, ob $y \in \mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}$ bzw. $y \in \partial\Omega$ bzw. $y \in \mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}$.

Sei nun $x \in \partial\Omega$, $\kappa \in (0,\varepsilon_B]$. Es gibt $r \in \{1,\dots,k_\Omega\}$ mit $x \in \Lambda_r^{1/4}$. Wegen $\kappa \le \varepsilon_B \le \varepsilon_1$ ist $x-\kappa\cdot n(x) \in \Omega$. Weil $\kappa < \varepsilon_B \le \delta_{1/4,1/2}$, muß gelten:

$$x - \kappa\cdot n(x) \in g_r((-\alpha_\Omega/2,\alpha_\Omega/2)^N) \quad \text{(siehe (2.31))}.$$

Es ist klar, daß

$$\text{dist}(x-\kappa\cdot n(x),\partial\Omega) \le \kappa \le \varepsilon_B.$$

Sei nun $y \in \partial\Omega$ so gewählt, daß $|x-\kappa\cdot n(x)-y| = \text{dist}(x-\kappa\cdot n(x),\partial\Omega)$. Gemäß (2.54) gibt es $\rho' \in \Delta$, so daß

$$y = u^r(\rho'),\ x-\kappa\cdot n(x) = \overset{r}{u}(\rho')-\tilde{\kappa}\cdot n\circ\overset{r}{u}(\rho'),\ \text{mit } \tilde{\kappa} := \text{dist}(x-\kappa\cdot n(x),\partial\Omega).$$

Wegen $x \in \Lambda_r^{1/4}$ existiert $\rho \in \Delta$ mit $x = \overset{r}{u}(\rho)$. Beachtet man noch, daß

$$\tilde{\kappa} \le \kappa \le \varepsilon_B \le \varepsilon_2 \wedge (4\cdot K_7)^{-1},$$

so folgt aus (2.47), (2.48): $\kappa = \tilde{\kappa}$, $x = y$. Insbesondere haben wir somit: $\kappa = \mathrm{dist}(x-\kappa\cdot n(x), \partial\Omega)$. Das bedeutet: $K_\kappa(x-\kappa\cdot n(x)) \subset \Omega$.
Für $y \in \partial K_\kappa(x-\kappa\cdot n(x)) \setminus \{x\}$ muß ebenfalls $y \notin \partial\Omega$ gelten, denn andern-
falls hätten wir $|x-\kappa\cdot n(x)-y| = \mathrm{dist}(x-\kappa\cdot n(x), \partial\Omega)$, woraus nach
dem Beweis von eben $y = x$, also ein Widerspruch, folgen würde.
Zusammen gilt also: $\overline{K_\kappa(x-\kappa\cdot n(x))} \setminus \{x\} \subset \Omega$.

Damit haben wir die innere Kugeleigenschaft aus (2.54) gefolgert.
Aussage (2.27) ist ebenfalls eine leichte Konsequenz von (2.54),
denn für r, z_1, z_2 wie in (2.27) trifft einer der vier folgenden Fälle zu:

<u>1. Fall:</u> $|z_1-z_2| < \varepsilon_B/2$, $\mathrm{dist}(x,\partial\Omega) < \varepsilon_B$ und $x \in g_r((-\alpha_\Omega/2, \alpha_\Omega/2)^N)$ für $x \in \{z_1, z_2\}$. Dann folgt (2.27), 1) aus (2.54).

<u>2. Fall:</u> $|z_1-z_2| < \varepsilon_B/2$, $\mathrm{dist}(x,\partial\Omega) < \varepsilon_B$ für $x \in \{z_1,z_2\}$, z_1 oder z_2 gehört nicht zu $g_r((-\alpha_\Omega/2, \alpha_\Omega/2)^N))$.

Wegen $\mathrm{Tr}(B_r) \subset \Delta^{1/4}$ und wegen (2.28) ist aber $\overset{r}{u}(\eta) \in g_r(\Delta^{1/4}\ \{0\})$
für $\eta \in \mathrm{Tr}(B_r)$. Daraus, aus der Definition von $\delta_{1/4,1/2}$ und aus
der dritten Bedingung im vorliegenden Fall folgt: Es gibt
$x \in \{z_1,z_2\}$, so daß $|x-\overset{i}{u}(\eta)| \geq \delta_{1/4,1/2}$ für $\eta \in \mathrm{Tr}(B_r)$. Somit gilt
für $\theta \in [0,1]$, $\eta \in \mathrm{Tr}(B_r)$:

$$|z_1+\theta\cdot(z_2-z_1)-\overset{i}{u}(\eta)| \geq |x-\overset{i}{u}(\eta)| - |z_2-z_1| \geq \delta_{1/4,1/2} - \varepsilon_B/2$$

$$\geq (1/2)\cdot\delta_{1/4,1/2} \geq \varepsilon_B.$$

<u>3. Fall:</u> $|z_2-z_1| < \varepsilon_\Omega/2$, $\mathrm{dist}(x,\partial\Omega) \geq \varepsilon_B$ für ein $x \in \{z_1,z_2\}$. Dann ist

$$|z_1+\theta\cdot(z_2-z_1)-\overset{i}{u}(\eta)| \geq \varepsilon_B/2 \text{ für } \eta \in \Delta,\ \theta \in [0,1].$$

<u>4. Fall:</u> $|z_1-z_2| \geq \varepsilon_B/2$. Dann ist (2.27), 3) erfüllt. □

Wir führen nun einige Bezeichnungen ein, welche die Normen zu Funktionen $f: \partial\Omega \to \mathbb{C}$ betreffen:

Sei $\mathcal{F}_{\partial\Omega}$ der $\mathbb{C}$-Vektorraum aller Lebesgue-meßbaren Abbildungen f von $\partial\Omega$ in $\mathbb{C}$ (siehe [RT3], §§ 70, 71).

Auf $\partial\Omega$ führt man eine Äquivalenzrelation $\sim := \sim_{\partial\Omega}$ ein, indem man für $f,g \in \mathcal{F}_{\partial\Omega}$ definiert: $f \sim g$ genau dann, wenn $f_1 = f_2$ fast überall (bezüglich des Lebesgue-Maßes auf $\partial\Omega$; siehe [RT3], §§ 70, 83).

Zu $f \in \mathcal{F}_{\partial\Omega}$ bezeichne $[f] := [f]_{\partial\Omega}$ die zu f gehörende Äquivalenzklasse bzgl. $\sim$.

Für eine Funktion $\vec{f}: \partial\Omega \to \mathbb{C}^3$ mit $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{F}_{\partial\Omega}$ setzt man
$[\vec{f}] := [\vec{f}]_{\partial\Omega} := ([f_1],[f_2],[f_3])$.

Wir erinnern, daß wir vor Lemma 2.2 eine Beschreibung $\mathcal{B}$ von $\partial\Omega$ festgehalten haben.

Sei nun $p \in [1,\infty)$. Man definiert zu jeder Funktion $f \in \mathcal{F}_{\partial\Omega}$:

$$\|f\|_{p,\mathcal{B}} := \Big(\sum_{t=1}^{k_\Omega} \|f\circ\overset{t}{u}\|_p^p\Big)^{1/p}.$$

Weil $\partial\Omega = \bigcup_{t=1}^{k_\Omega} \overset{t}{u}(\Delta)$ (siehe (2.1)), entspricht die vorangehende Definition von $\|f\|_{p,\mathcal{B}}$ der Definition in [FJK], 6.3.2. Als nächstes definieren wir

$$L_p(\partial\Omega) := \{f \in \mathcal{F}_{\partial\Omega} : \|f\|_{p,\mathcal{B}} < \infty\}.$$

$L_p(\partial\Omega)$ braucht nicht mit einem Index $\mathcal{B}$ versehen zu werden, weil die Eigenschaft $\|f\|_{p,\mathcal{B}} < \infty$ nicht von der gewählten Beschreibung $\mathcal{B}$ abhängt (siehe [FJK], 6.3.4, 6.3.5).

Sei $F_{\partial\Omega}\diagdown\sim$ der Restklassenraum zur Äquivalenzrelation $\sim$. Ist $F \in F_{\partial\Omega}\diagdown\sim$, so nimmt $\|f\|_{p,\mathcal{B}}$ für jede Funktion $f \in F$ denselben Wert an, so daß folgende Definition sinnvoll ist:

$\|F\|^*_{p,\mathcal{B}} := \|f\|_{p,\mathcal{B}}$ für $F \in F_{\partial\Omega}\diagdown\sim$, wobei f ein beliebiges Element aus F ist.

Man definiert ferner:

$$L_p(\partial\Omega) := \{[f]:\ f \in \mathcal{L}_p(\partial\Omega)\}.$$

$L_p(\partial\Omega)$ ist Unterraum von $F_{\partial\Omega}\diagdown\sim$. $(L_p(\partial\Omega), \|\ \|^*_{p,\mathcal{B}}|L_p(\partial\Omega))$ ist ein Banachraum; siehe dazu [FJK], 6.3.6. Wir bemerken hier nur, daß sich zu einer weiteren Beschreibung $\mathcal{B}'$ von Ω eine Norm $\|\ \|^*_{p,\mathcal{B}'}$ ergibt, die zu $\|\ \|^*_{p,\mathcal{B}}$ äquivalent ist. Wir definieren noch für $f \in F_{\partial\Omega}$:

$$|f|_{p,\partial\Omega} := \Big(\int_{\partial\Omega} |f|^p\, d\Omega\Big)^{1/p}.$$

Meist werden wir nur $\|\ \|_p$ statt $\|\ \|_{p,\mathcal{B}}$, $\|\ \|^*_{p,\mathcal{B}}$ schreiben, sowie $|\ |_p$ statt $|\ |_{p,\partial\Omega}$.

<u>Lemma 2.3:</u> <u>Es gibt</u> $Q_{\mathcal{B}} > 0$, <u>so daß</u>

$$\|f\|_p \le Q_{\mathcal{B}}\cdot|f|_p \le Q^2_{\mathcal{B}}\cdot\|f\|_p \quad \underline{\text{für}}\ f \in F_{\partial\Omega},\ p \in [1,\infty).$$

<u>Beweis:</u> Sei $K_{\mathcal{B}}$ wie in Lemma 2.2 gewählt. Dann gilt für $f \in F_{\partial\Omega}$, $p \in [1,\infty)$:

$$\|f\|_p = \Big(\sum_{t=1}^{k_\Omega} \int_\Delta |f\circ\overset{t}{u}(\eta)|^p\, d\eta\Big)^{1/p}$$

$$= \Big(\sum_{t=1}^{k_\Omega} \int_\Delta |f\circ\overset{t}{u}(\eta)|^p\cdot \sum_{i=1}^{k_\Omega} \overset{i}{\omega}\circ\overset{t}{u}(\eta)\, d\eta\Big)^{1/p}$$

$$= \Big(\sum_{i,t=1}^{k_\Omega} \int_{(\overset{t}{u})^{-1}(\Lambda_t\cap\Lambda_i)} |f\circ\overset{t}{u}(\eta)|^p\cdot\overset{i}{\omega}\circ\overset{t}{u}(\eta)\, d\eta\Big)^{1/p}$$

(da $\mathrm{Tr}(\overset{i}{\omega}|\partial\Omega) \subset \Lambda_i$; siehe (2.5))

$$= \Big(\sum_{i,t=1}^{k_\Omega} \int_{(\overset{i}{u})^{-1}(\Lambda_t\cap\Lambda_i)} |f\circ\overset{i}{u}(\eta)|^p\cdot\overset{i}{\omega}\circ\overset{i}{u}(\eta)\cdot$$

$$\cdot|\det(d\psi_{ti}/dX)(\eta)|\, d\eta\Big)^{1/p}$$

$$\le Q_{\mathcal{B},1}\cdot\Big(\sum_{i=1}^{k_\Omega} \int_\Delta |f\circ\overset{i}{u}(\eta)|^p\cdot\overset{i}{\omega}\circ\overset{i}{u}(\eta)\, d\eta\Big)^{1/p}$$

(mit $Q_{\mathcal{B},1} := ((N-1)!\cdot K^{N-1}_{\mathcal{B}}\cdot k_\Omega)\vee 1$. Hier wurde mit (2.20) abgeschätzt).

$$\le Q_{\mathcal{B},1}\ \Big(\sum_{i=1}^{k_\Omega} \int_\Delta |f\circ\overset{i}{u}(\eta)|^p\cdot B_i(\eta)\, d\eta\Big)^{1/p}$$

(Beachte: $B_i(\eta) = \overset{i}{\omega}\circ\overset{i}{u}(\eta)\cdot J_i(\eta)$ für $\eta \in \Delta$; $J_i \ge 1$).

$$= Q_{\mathcal{B},1}\cdot|f|_p \quad \text{(wegen (2.19))}$$

$$\le Q_{\mathcal{B},1}\cdot K^{1/p}_{\mathcal{B}}\cdot\|f\|_p \quad \text{(wegen (2.19), (2.20))}.$$

Die Behauptung gilt also mit $Q_{\mathcal{B}} := Q_{\mathcal{B},1}\cdot(K_{\mathcal{B}}\vee 1)$. □

<u>Satz 2.1:</u> <u>Es gibt genau eine stetige, lineare Abbildung</u> $R_\Omega : W^{1,1}(\Omega) \to L_1(\partial\Omega)$, <u>so daß</u>

(2.55) $[u|\partial\Omega] = R_\Omega([u|\Omega])$ <u>für</u> $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

<u>Für</u> $u \in C^0(\overline{\Omega})$ <u>mit</u> $u|\Omega \in \mathcal{W}^{1,1}(\Omega)$ <u>ist</u>

$$[u|\partial\Omega] = R_\Omega([u|\Omega]).$$

<u>Beweis:</u> Die Existenz einer stetigen, linearen Abbildung $R_\Omega : W^{1,1}(\Omega) \to L_1(\partial\Omega)$ mit Eigenschaft (2.55) folgt aus [FJK], 6.4.1. Die Eindeutigkeit sieht man so ein: Sei auch $S : W^{1,1}(\Omega) \to L_1(\partial\Omega)$ eine stetige, lineare Abbildung mit $[u|\partial\Omega] = S([u|\Omega])$ für $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Sei $F \in W^{1,1}(\Omega)$. Nach [FJK], 5.5.9 gibt es eine Folge $(\overset{n}{u})$ in $C^\infty(\overline{\Omega})$ mit

$$\|[\overset{n}{u}|\Omega] - F\|_{1,1} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Da R_Ω und S stetig und linear sind, heißt das:

$$\|R_\Omega([\overset{n}{u}|\Omega]) - R_\Omega(F)\|_1 \to 0, \ \|S([\overset{n}{u}|\Omega]) - S(F)\|_1 \to 0 \quad (n \to \infty),$$

also:

$$\|[\overset{n}{u}|\partial\Omega] - R_\Omega(F)\|_1 \to 0, \ \|[\overset{n}{u}|\partial\Omega] - S(F)\|_1 \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Somit folgt die Gleichung $R_\Omega(F) = S(F)$.

Sei $u \in C^0(\overline{\Omega})$ mit $u|\Omega \in \mathcal{W}^{1,1}(\Omega)$. Nach [A], 4.28 gibt es eine Funktion $\tilde{u} \in \mathcal{W}^{1,1}(\mathbb{R}^N)$ mit $\tilde{u}|\Omega = u$ f.ü. Geht man den Beweis von [A], 4.28 durch, so sieht man, daß man sogar $\tilde{u} \in C^0(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{W}^{1,1}(\mathbb{R}^N)$ verlangen kann. Das bedeutet zunächst: $\tilde{u}|\overline{\Omega} = u$, ohne den Zusatz "f.ü.". Gemäß (1.1) gilt:

$$\|\tilde{u} - \tilde{u}_{1/n}\|_{1,1} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Insbesondere hat man:

$$\|\tilde{u}|\Omega - \tilde{u}_{1/n}|\Omega\|_{1,1} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

und somit (beachte: $\tilde{u}_{1/n}|\overline{\Omega} \in C^\infty(\overline{\Omega})$):

(2.56) $\|R_\Omega([u|\Omega]) - [\tilde{u}_{1/n}|\partial\Omega]\|_1 \to 0 \quad (n \to \infty)$.

Nach [A], 2.18(d) gilt aber wegen $\tilde{u} \in C^0(\mathbb{R}^N)$ und $\tilde{u}|\overline{\Omega} = u$:

$$|u - (\tilde{u}_{1/n})|\overline{\Omega}|_0 \to 0 \quad (n \to \infty);$$

insbesondere

$$\tilde{u}_{1/n}|\partial\Omega \to u|\partial\Omega \quad (n \to \infty) \text{ gleichmäßig.}$$

Mit (2.56) folgt:

$$R_\Omega([u|\Omega]) = [u|\partial\Omega].$$

<u>Lemma 2.4:</u> <u>Sei</u> $f \in C^0(\overline{\Omega})$ <u>mit</u> $f|\Omega \in \mathcal{W}^{1,1}(\Omega)$. <u>Sei</u> $i \in \{1,\dots,N\}$. <u>Dann ist</u>

$$\int_\Omega D_i f \, dx = \int_{\partial\Omega} f \cdot n_i \, d\Omega.$$

<u>Beweis:</u> Nach [FJK], 5.5.9 gibt es eine Folge (f_k) in $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ mit $\|f_k|\Omega - f\|_{1,1} \to 0$ $(n \to \infty)$. Nach Satz 2.1 folgt:

$$\|f_k|\partial\Omega - f|\partial\Omega\|_1 \to 0 \quad (k \to \infty),$$

und damit

$$\|(f_k|\partial\Omega) \cdot n_i - (f|\partial\Omega) \cdot n_i\|_1 \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Wir haben also:

$$(2.57)\quad \int_\Omega D_i f_k\,dx \to \int_\Omega D_i f\,dx,\quad \int_{\partial\Omega} f_k\cdot n_i\,d\Omega \to \int_{\partial\Omega} f\cdot n_i\,d\Omega \qquad (k\to\infty).$$

Wegen $f_k \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ gilt aber nach dem Satz von Gauß für glatte Funktionen (siehe etwa [RT3], 88.7):

$$(2.58)\quad \int_\Omega D_i f_k\,dx = \int_{\partial\Omega} f_k\cdot n_i\,d\Omega \qquad (k\in\mathbb{N}).$$

Aus (2.57) und (2.58) folgt die Behauptung. □

Sei $n\in\mathbb{N}$, $B\subset\mathbb{R}^n$ offen, $p\in[1,\infty)$. Zu $\sigma\in(0,1)$, $f:\Omega\to\mathbb{C}$ meßbar setzt man

$$I_{\sigma,p}(f) := \int_\Omega\int_\Omega |f(x)-f(y)|^p\cdot|x-y|^{-n-\sigma p}\,dxdy.$$

Sei $s\in(0,\infty)\setminus\mathbb{N}$, $m:=\max\{z\in\mathbb{N}_0 : z<s\}$, $\sigma:=s-m$. Sei $u\in L_{1,loc}(B)$; im Fall $m\geq 1$ sollen die schwachen Ableitungen $D_\alpha u$ für $\alpha\in\mathbb{N}_0^N$ mit $0<|\alpha|\leq m$ existieren. Dann setzt man

$$\|u\|_{s,p} := \Big(\|u\|^p_{m,p} + \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^N\\ |\alpha|_*=m}} I_{\sigma,p}(D_\alpha u)\Big)^{1/p}.$$

Weiter definiert man

$$\mathcal{W}^{s,p}(B) := \{u\in\mathcal{W}^{m,p}(B) : \|u\|_{s,p}<\infty\}.$$

Nun betrachten wir wieder die Menge Ω, die in diesem Paragraphen fixiert ist, sowie eine Beschreibung $\mathcal{B}$ von $\partial\Omega$. Sei $t\in(k,k+1)$.

Sei $f\in F_{\partial\Omega}$. Für $\alpha\in\mathbb{N}_0^{N-1}$ mit $|\alpha|_*\leq k$ und für $i\in\{1,\ldots,k_\Omega\}$ sollen die schwachen Ableitungen $D_\alpha(f\circ\overset{i}{u})$ existieren. Dann setzen wir

$$\|f\|_{t,p,\mathcal{B}} := \Big(\sum_{i=1}^{k_\Omega} \|f\circ\overset{i}{u}\|^p_{t,p,\Delta}\Big)^{1/p}.$$

Weiter definiert man

$$\mathcal{W}^{t,p}(\partial\Omega) := \{f\in F_{\partial\Omega} : f\circ\overset{i}{u}\in\mathcal{W}^{t,p}(\Delta) \text{ für } 1\leq i\leq k_\Omega\}.$$

Sei F eine Äquivalenzklasse aus der Restklassenmenge $F_{\partial\Omega}/\sim$, die im Anschluß an Lemma 2.2 eingeführt wurde. Die schwachen Ableitungen $D_\alpha(f\circ\overset{i}{u})$ $(\alpha\in\mathbb{N}_0^{N-1}$ mit $|\alpha|_*\leq k$, $i\in\{1,\ldots,k_\Omega\})$ existieren genau dann für <u>eine</u> Funktion $f\in F$, wenn sie für <u>alle</u> $f\in F$ existieren. Im Falle der Existenz nimmt $\|f\|_{t,p,\mathcal{B}}$ für alle $f\in F$ denselben Wert an, und man setzt:

$$\|F\|^*_{t,p,\mathcal{B}} := \|f\|_{t,p,\mathcal{B}},\ \text{mit } f\in F.$$

Wir werden nur $\|\ \|_{t,p}$ statt $\|\ \|_{t,p,\mathcal{B}}$, $\|\ \|^*_{t,p,\mathcal{B}}$ schreiben. Schließlich setzen wir noch

$$W^{t,p}(\partial\Omega) := \{[f] : f\in\mathcal{W}^{t,p}(\partial\Omega)\}.$$

Dann ist $(W^{t,p}(\partial\Omega), \|\ \|_{t,p}|W^{t,p}(\partial\Omega))$ ein Banachraum. Zu dieser und anderen Eigenschaften von $W^{t,p}(\partial\Omega)$ siehe [FJK], 6.8.

<u>Satz 2.2: Sei</u> $R_\Omega : W^{1,1}(\Omega)\to L_1(\partial\Omega)$ <u>die in Satz 2.1 definierte Abbildung. Sei</u> $m\in\mathbb{N}$ mit $m\leq k$, $p\in(1,\infty)$.

<u>Für</u> $u\in W^{m,p}(\Omega)$ <u>ist dann</u> $R_\Omega(u)\in W^{m-1/p,p}(\partial\Omega)$.

<u>Weiter gibt es</u> $R_{\mathcal{B}}(\Omega,m,p)>0$, <u>so daß für</u> $u\in W^{m,p}(\Omega)$ <u>gilt:</u>

$$\|R_\Omega(u)\|_{m-1/p,p} \leq R_{\mathcal{B}}(\Omega,m,p)\cdot\|u\|_{m,p}.$$

<u>Ferner gibt es eine lineare Abbildung</u>

$$S_{\Omega,m,p}: W^{m-1/p,p}(\partial\Omega) \to W^{m,p}(\Omega)$$

<u>und eine Zahl</u> $\tilde{R}_B(\Omega,m,p) > 0$, <u>so daß</u>

$$R_\Omega(S_{\Omega,m,p}(\gamma)) = \gamma$$

<u>und</u>

$$\|S_{\Omega,m,p}(\gamma)\|_{m,p} \le \tilde{R}_B(\Omega,m,p)\cdot\|\gamma\|_{m-1/p,p} \quad \underline{\text{für}}\ \gamma \in W^{m-1/p,p}(\partial\Omega').$$

<u>Beweis:</u> Nach [A], 7.56 gibt es eine stetige, lineare Abbildung $\tilde{R}: W^{m,p}(\Omega) \to W^{m-1/p,p}(\partial\Omega)$ mit $\tilde{R}([u|\Omega]) = [u|\partial\Omega]$ für $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Wir zeigen: $R_\Omega|W^{m,p}(\Omega) = \tilde{R}$. Sei dazu $F \in W^{m,p}(\Omega)$. Nach [FJK], 5.5.9 gibt es eine Folge $(\overset{n}{u})$ in $C^\infty(\bar{\Omega})$ mit $\|F-[\overset{n}{u}|\Omega]\|_{m,p} \to 0$ $(n \to \infty)$. Wegen der Stetigkeit von $\tilde{R}$ bzw. R_Ω gilt:

(2.59) $\|\tilde{R}([\overset{n}{u}|\Omega])-\tilde{R}(F)\|_{m-1/p,p} \to 0,$

$$\|R_\Omega([\overset{n}{u}|\Omega])-R_\Omega(F)\|_1 \to 0, \qquad (n \to \infty).$$

Wegen $\overset{n}{u} \in C^\infty(\bar{\Omega})$ ist

$$\tilde{R}([\overset{n}{u}|\Omega]) = [\overset{n}{u}|\partial\Omega] = R_\Omega([\overset{n}{u}|\Omega]) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Aus der Konvergenz in $W^{m-1/p,p}(\partial\Omega)$ folgt auch die in $L_1(\partial\Omega)$. Somit erhält man aus (2.59):

$$\|[\overset{n}{u}|\partial\Omega]-\tilde{R}(F)\|_1 \to 0, \quad \|[\overset{n}{u}|\partial\Omega]-R_\Omega(F)\|_1 \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Daraus ergibt sich:

(2.60) $\tilde{R}(F) = R_\Omega(F)$.

Weil $\tilde{R}$ stetig und linear ist, gibt es $R_B(\Omega,m,p) > 0$ mit

$$\|\tilde{R}(F)\|_{m-1/p,p} \le R_B(\Omega,m,p)\cdot\|F\|_{m,p} \quad \text{für } F \in W^{m,p}(\Omega).$$

Wegen (2.60) ist damit der erste Teil des Satzes gezeigt. Der zweite Teil folgt aus [A], 7.56. □

<u>Lemma 2.5:</u> <u>Sei</u> $r \in (N/2,\infty)$. <u>Dann gibt es</u> $\rho \in (0,1)$, <u>so daß für alle</u> $a \in \mathcal{W}^{2-1/r,r}(\partial\Omega)$ <u>gilt:</u>

$$[a] \cap C^\rho(\partial\Omega) \neq \emptyset.$$

<u>Beweis:</u> Sei $a \in \mathcal{W}^{2-1/r,r}(\partial\Omega)$. Nach Satz 2.2 gibt es $A \in W^{2,r}(\Omega)$ mit $R_\Omega(A) = [a]$. Es ist $2\cdot r > N$. Im Fall $N > r$ gibt es daher nach [A], 5.4(9) eine Funktion $f \in C^{2-N/r}(\Omega)$ mit $[f|\Omega] = A$. Im Fall $r > N$ benötigt man nur, daß $A \in W^{1,r}(\Omega)$ ist. [A], 5.4(9) liefert dann eine Funktion $f \in C^{1-1/r}(\bar{\Omega})$ mit $[f|\Omega] = A$. Im Fall $r = N$ schließlich gibt es gemäß [A], 5.4(10) eine Funktion $f \in \bigcap_{\lambda \in (0,1)} C^\lambda(\bar{\Omega})$ mit $[f|\Omega] = A$. Man setze also $\rho = 2-N/r$ bzw. $\rho = 1-1/N$ bzw. $\rho = 1/2$, wenn $r < N$ bzw. $r > N$ bzw. $r = N$ gilt. Dann gibt es $f \in C^\rho(\bar{\Omega})$ mit $[f|\Omega] = A$. Wegen $R_\Omega(A) = [a]$ und wegen Satz 2.1 folgt:

$$[f|\partial\Omega] = R_\Omega([f|\Omega]) = R_\Omega(A) = [a]. \qquad \square$$

Wir definieren eine weitere Funktionenklasse, die wir später benötigen werden:

Sei $m \in \mathbb{N}_0$, $p \in [1,\infty)$. Dann bezeichne $W_0^{m,p}(\Omega)$ den Abschluß von $\{[\varphi]: \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\}$ im normierten Raum $W^{m,p}(\Omega)$. Ferner sei

$$\mathcal{W}^{m,p}(\Omega) := \bigcup\{F: F \in W^{m,p}(\Omega)\}.$$

Damit gilt für eine Funktion $u \in W^{m,p}(\Omega)$: u gehört genau dann zu $W_o^{m,p}(\Omega)$, wenn es eine Folge (φ_k) in $C_o^\infty(\Omega)$ gibt mit $\|u-\varphi_k\|_{m,p} \to 0$ $(k \to \infty)$.

<u>Satz 2.3:</u> <u>Sei</u> $p \in [1,\infty)$. <u>Dann ist</u>

$$W_o^{1,p}(\Omega) = \{F \in W^{1,p}(\Omega): R_\Omega(F) = 0\}.$$

<u>Beweis:</u> Siehe [FJK], 6.6.4. □

<u>§ 3. Eine Darstellungsformel für Lösungen des Stokes-Systems über einem glatt berandeten, beschränkten Gebiet</u>

<u>Lemma 3.1:</u> <u>Sei</u> $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$ <u>beschränktes Gebiet mit</u> C^2-<u>Berandung</u>, $n: \partial\Lambda \to \mathbb{R}^3$ <u>die äußere Einheitsnormale an</u> $\partial\Lambda$. <u>Sei</u> $\vec{u} \in C^1(\overline{\Lambda})^3$ <u>mit</u> $\vec{u}|\Lambda \in C^2(\Lambda)^3 \cap W^{2,1}(\Lambda)^3$, $\vec{w} \in C^0(\overline{\Lambda})^3$ <u>mit</u> $\vec{w}|\Lambda \in C^1(\Lambda)^3 \cap W^{1,1}(\Lambda)^3$, $\pi \in C^0(\overline{\Lambda})$ <u>mit</u> $\pi|\Lambda \in C^1(\Lambda) \cap W^{1,1}(\Lambda)$. <u>Ferner gelte:</u>

$$(3.1) \quad \operatorname{div}(\vec{u}|\Lambda) = \operatorname{div}(\vec{w}|\Lambda) = 0.$$

<u>Dann folgt:</u>

$$(3.2) \quad \sum_{i=1}^{3} \int_\Lambda (\nu\cdot\Delta u_i - D_i\pi)\cdot w_i \, dy + (\nu/2)\cdot \sum_{i,k=1}^{3} \int_\Lambda (D_i u_k + D_k u_i)\cdot(D_i w_k + D_k w_i)\, dy$$

$$= \sum_{i,k=1}^{3} \int_{\partial\Lambda} (-\delta_{ik}\cdot\pi + \nu\cdot D_k u_i + \nu\cdot D_i u_k)\cdot w_i\cdot n_k \, d\Lambda.$$

<u>Beweis:</u> Für $y \in \Lambda$ ist

$$(3.3) \quad \sum_{i,k=1}^{3} \partial/\partial y_k\{(-\delta_{ik}\cdot\pi(y) + \nu\cdot D_k u_i(y) + \nu\cdot D_i u_k(y))\cdot w_i(y)\}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} (\nu\cdot\Delta u_i(y) - D_i\pi(y))\cdot w_i(y) + \nu/2\cdot \sum_{i,k=1}^{3} (D_k u_i(y) + D_i u_k(y))\cdot(D_k w_i(y) + D_i w_k(y)),$$

wie sich mit Hilfe von (3.1) ergibt. Für $i,k \in \{1,2,3\}$ ist die Funktion $(-\delta_{ik}\cdot\pi + \nu\cdot D_k u_i + \nu\cdot D_i u_k)\cdot w_i$ aus $C^0(\overline{\Lambda})$; die Einschränkung dieser Funktion auf Λ gehört zu $C^1(\Lambda) \cap W^{1,1}(\Lambda)$. Damit ist nach Lemma 2.4

$$\int_\Lambda \partial/\partial y_k\{(-\delta_{ik}\cdot\pi(y) + \nu\cdot D_k u_i(y) + \nu\cdot D_i u_k(y))\cdot w_i(y)\}\, dy$$

$$= \int_{\partial\Lambda} (-\delta_{ik}\cdot\pi + \nu\cdot D_k u_i + \nu\cdot D_i u_k)\cdot w_i\cdot n_k \, d\Lambda.$$

Hieraus und aus (3.3) folgt (3.2). □

und $\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}$ sei ebenfalls ein Gebiet

Von nun an sei Ω ein fest gewähltes Gebiet in $\mathbb{R}^3$. Ω sei beschränkt und C^2-berandet. Es sei eine Beschreibung

$$\mathcal{B} := (k_\Omega, (\tilde{A}_i)_{1\le i\le k_\Omega}, (C_i)_{1\le i\le k_\Omega}, \alpha_\Omega, (a_i)_{1\le i\le k_\Omega}, (\overset{i}{\omega})_{1\le i\le k_\Omega})$$

von $\partial\Omega$ nach Lemma 2.1 fest gewählt. Zu dieser Beschreibung seien die Mengen $\Delta, \Delta^\gamma, \Lambda_i, \Lambda_i^\gamma$, sowie die Abbildungen $\overset{i}{u}, J_i, B_i, p_i, n$ $(1 \le i \le k_\Omega,\ \gamma \in (0,1])$ wie in § 2 definiert. Ferner seien Zahlen $\varepsilon_{\mathcal{B}}, K_{\mathcal{B}}, Q_{\mathcal{B}}$ mit den in Lemma 2.2, 2.3 aufgezählten Eigenschaften festgehalten. Alle diese Bezeichnungen werden wir in den folgenden Paragraphen ohne weitere Verweise verwenden.

Lemma 3.2: Zu $i,k \in \{1,2,3\}$ sei

$$T_{ik}: \bigcup\{C^1(B)^3\times C^0(B) : B \in \{\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3\setminus\Omega, \mathbb{R}^3\setminus\partial\Omega\}\} \ni (\vec{u},\pi) \to$$

$$\to -\delta_{ik}\cdot\pi + \nu\cdot(D_k u_i + D_i u_k) \in \bigcup\{C^0(B) : B \in \{\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3\setminus\Omega, \mathbb{R}^3\setminus\partial\Omega\}\}.$$

Es ist klar, daß für $B \in \{\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3\setminus\Omega, \mathbb{R}^3\setminus\partial\Omega\}$ und für $(\vec{u},\pi)$ aus $C^1(B)^3\times C^0(B)$ gilt: $T_{ik}(\vec{u},\pi) \in C^0(B)$ $(1 \le i,k \le 3)$.

Für $\vec{u},\vec{w} \in C^1(\overline{\Omega})^3$ mit $u|\Omega,\ w|\Omega \in C^2(\Omega)^3 \cap W^{2,1}(\Omega)^3$ und $\operatorname{div}\vec{u} = \operatorname{div}\vec{w} = 0$, sowie für $\pi,\tilde{\pi} \in C^0(\overline{\Omega})$ mit $\pi|\Omega, \tilde{\pi}|\Omega \in C^1(\Omega) \cap W^{1,1}(\Omega)$, ist folgende Gleichung erfüllt:

$$(3.4)\quad \sum_{i=1}^{3} \int_\Omega \{(\nu\cdot\Delta u_i - D_i\pi)\cdot w_i - (\nu\cdot\Delta w_i - D_i\tilde{\pi})\cdot u_i\}\, dy$$

$$= \sum_{i,k=1}^{3} \int_{\partial\Omega} \{T_{ik}(\vec{u},\pi)\cdot w_i - T_{ik}(\vec{w},\tilde{\pi})\cdot u_i\}\cdot n_k \, d\Omega.$$

Beweis: Sind $\vec{u},\vec{w},\pi,\tilde{\pi}$ wie in Lemma gegeben, so gilt (3.2). Ferner darf man in (3.2) die Funktionen $\vec{u}$ und $\vec{w}$ vertauschen, sowie π durch $\tilde{\pi}$ ersetzen. (3.4) folgt nun dann durch Addition. □

Lemma 3.3: Sei $\vec{u} \in C^2(\overline{\Omega})^3$, $\pi \in C^1(\overline{\Omega})$ mit

$$-\nu\cdot\Delta\vec{u} + \nabla\pi = 0,\quad \operatorname{div}\vec{u} = 0.$$

Dann gilt:

$$\sum_{i,k=1}^{3} \int_\Omega (\nu/2)\cdot(D_k u_i + D_i u_k)^2\, dx =$$

$$= \sum_{i,k=1}^{3} \int_{\partial\Omega} T_{ik}(\vec{u},\pi)\cdot u_i\cdot n_k \, d\Omega.$$

Sei $\vec{v} \in C^2(\mathbb{R}^3\setminus\Omega)^3$, $p \in C^1(\mathbb{R}^3\setminus\Omega)$ mit

$$-\nu\cdot\Delta\vec{v} + \nabla p = 0,\quad \operatorname{div}\vec{v} = 0.$$

Es gebe $M,R > 0$, so daß $\overline{\Omega} \subset K_R(0)$, und so daß für $x \in \mathbb{R}^3$ mit $|x| \ge R$, $i,k,l \in \{1,2,3\}$ gilt:

$$|v_i(x)|\cdot|x|,\ |D_k v_i(x)|\cdot|x|^2,\ |D_l D_k v_i(x)|\cdot|x|^3,\ |p(x)|\cdot|x|^2,$$

$$|D_k p(x)|\cdot|x|^3 \le M.$$

Dann ist

$$\sum_{i,k=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}} (\nu/2)\cdot(D_k v_i + D_i v_k)^2 \, dx =$$

$$= - \sum_{i,k=1}^{3} \int_{\partial\Omega} T_{ik}(\vec{v},p)\cdot v_i\cdot n_k \, d\Omega.$$

Beweis: Die erste Gleichung folgt aus (3.2) mit $u = w$, $A = \Omega$; beachte die Definition von $(T_{ik})_{1\le i,k\le 3}$ in Lemma 3.2.

Zum Beweis der zweiten Gleichung wenden wir abermals (3.2) an, diesmal mit $\vec{u} = \vec{w}$, $A = K_r(0)\setminus\bar{\Omega}$, wobei $r \in (0,\infty)$ mit $\bar{\Omega} \subset K_r(0)$. Es ergibt sich für solche Zahlen r:

$$(3.5)\quad (\nu/2)\cdot \sum_{i,k=1}^{3} \int_{K_r(0)\setminus\bar{\Omega}} (D_i v_k + D_k v_i)^2 \, dx$$

$$= \sum_{i,k=1}^{3} \Big(\int_{\partial\Omega} (-\delta_{ik}\cdot p + \nu\cdot D_k v_i + \nu\cdot D_i v_k)\cdot v_i\cdot(-n_k) \, d\Omega \; +$$

$$+ \int_{\partial K_r(0)} (-\delta_{ik}\cdot p + \nu\cdot D_k v_i + \nu\cdot D_i v_k)(y)\cdot v_i(y)\cdot y_k\cdot |y|^{-1} do_y \Big).$$

Wir zeigen nun, daß der zweite Summand auf der rechten Seite von (3.5) gegen 0 konvergiert für r gegen ∞. Sei dazu $r \ge R$, mit R wie im Lemma vorgegeben, und sei $y \in \partial K_r(0)$. Dann ist für $1 \le i,k \le N$:

$$\int_{\partial K_r(0)} \left| (-\delta_{ik}\cdot p(y) + \nu\cdot D_i v_k(y) + \nu\cdot D_k v_i(y))\cdot v_i(y)\cdot y_k\cdot |y|^{-1} \right| do_y$$

$$\le \int_{\partial K_r(0)} (1+2\nu)\cdot M\cdot |y|^{-2}\cdot M\cdot |y|^{-1} \, do_y$$

$$= (1+2\nu)\cdot M^2\cdot r^{-3}\cdot \int_{\partial K_r(0)} do_y = (1+2\nu)\cdot M^2\cdot r^{-1}\cdot \int_{\partial K_1(0)} do_y.$$

Hieraus folgt die behauptete Konvergenz. Somit ergibt sich die zweite Gleichung des Lemmas aus (3.5) durch Grenzübergang $r \to \infty$. □

Der folgende Satz gibt eine Darstellungsformel für Lösungen des linearen Stokes-Problems auf Ω.

Satz 3.1: Zu $j,k,l \in \{1,2,3\}$ sei

$$S_{jkl} := \delta_{jk}\cdot E_{4l} - \nu\cdot D_k E_{jl} - \nu\cdot D_j E_{kl}.$$

Sei $p \in (1,\infty)$, $\vec{u} \in C^1(\bar{\Omega})^3$ mit $\vec{u}|\Omega \in C^2(\Omega)^3 \cap W^{2,p}(\Omega)^3$, $\pi \in C^0(\bar{\Omega})$ mit $\pi|\Omega \in C^1(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$, $\vec{f} \in L_{6/5}(\Omega)^3$; es gelte:

$$\nu\cdot\Delta(\vec{u}|\Omega) + \nabla(\pi|\Omega) = \vec{f} \;\text{ f.ü.}, \quad \operatorname{div}(\vec{u}|\Omega) = 0.$$

Dann gilt für $l \in \{1,2,3\}$ und für fast alle $x \in \Omega$:

$$(3.6)\quad u_l(x) = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^{3} E_{jl}(x-y)\cdot f_j(y) \, dy$$

$$+ \int_{\partial\Omega} \sum_{j,k=1}^{3} T_{jk}(\vec{u},\pi)(y)\cdot E_{jl}(x-y)\cdot n_k(y) \, d\Omega(y)$$

$$- \int_{\partial\Omega} \sum_{j,k=1}^{3} S_{jkl}(x-y)\cdot u_j(y)\cdot n_k(y) \, d\Omega(y).$$

Ferner gibt es $K_\pi \in \mathbb{C}$, so daß für fast alle $x \in \Omega$ gilt:

$$(3.7)\quad \pi(x) = K_\pi + \int_{\Omega} \sum_{j=1}^{3} E_{4j}(x-y)\cdot f_j(y) \, dy$$

$$+ \int_{\partial\Omega} \sum_{j,k=1}^{3} E_{4j}(x-y)\cdot T_{jk}(\vec{u},\pi)(y)\cdot n_k(y) \, d\Omega(y)$$

$$+ 2\cdot\nu\cdot \int_{\partial\Omega} \sum_{j,k=1}^{3} D_k E_{4j}(x-y)\cdot u_j(y)\cdot n_k(y) \, d\Omega(y).$$

<u>Beweis:</u> Sei $l \in \{1,2,3\}$. Wegen $\vec{f} \in L_{6/5}(\Omega)$ existiert nach Lemma 1.8 das Integral $\int_\Omega \sum_{j=1}^{3} E_{jl}(x-y)\cdot f_j(y)\, dy$ für fast alle $x \in \Omega$. Sei ein solches Element $x \in \Omega$ festgehalten. Es gilt für $y \in \Omega$ mit $y \neq x$:

$$(3.8) \quad \sum_{j,k=1}^{3} \partial/\partial y_k \left(S_{jkl}(x-y)\cdot u_j(y)\right)$$

$$= - \sum_{k=1}^{3} D_k E_{4l}(x-y)\cdot u_k(y) + \sum_{k=1}^{3} D_k u_k(y)\cdot E_{4l}(x-y)$$

$$+ \nu\cdot \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} u_j(y)\cdot D_k D_k E_{jl}(x-y)$$

$$- \nu\cdot \sum_{j,k=1}^{3} \left(D_k E_{jl}(x-y)\cdot D_k u_j(y) + D_j E_{kl}(x-y)\cdot D_k u_j(y)\right)$$

$$+ \nu\cdot \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} u_j(y)\cdot D_j D_k E_{kl}(x-y)$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \left(-D_j E_{4l}(x-y) + \nu\cdot \Delta E_{jl}(x-y)\right) u_j(y)$$

$$+ \operatorname{div} \vec{u}(y)\cdot E_{4l}(x-y) + \nu\cdot \sum_{j=1}^{3} u_j(y)\cdot \partial/\partial x_j \left[\sum_{k=1}^{3} D_k E_{kl}(x-y)\right]$$

$$- \nu\cdot \sum_{j,k=1}^{3} \left(D_k E_{jl}(x-y)\cdot D_k u_j(y) + D_j E_{kl}(x-y)\cdot D_k u_j(y)\right)$$

$$= - \nu\cdot \sum_{j,k=1}^{3} \left(D_k E_{jl}(x-y)\cdot D_k u_j(y) + D_j E_{kl}(x-y)\cdot D_k u_j(y)\right)$$

$$= - (\nu/2)\cdot \sum_{j,k=1}^{3} \left(D_j E_{kl}(x-y) + D_k E_{jl}(x-y)\right)\cdot\left(D_k u_j(y) + D_j u_k(y)\right).$$

Jetzt folgt für $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon < \operatorname{dist}(x,\partial\Omega)$, durch Integration von (3.8) über $\Omega \setminus \overline{K_\varepsilon(x)}$ und Anwendung des Gaußschen Satzes:

$$(3.9) \quad \sum_{j,k=1}^{3} \Big(\int_{\partial\Omega} S_{jkl}(x-y)\cdot u_j(y)\cdot n_k(y)\, d\Omega(y)$$

$$+ \int_{\partial K_\varepsilon(x)} S_{jkl}(x-y)\cdot u_j(y)\cdot (x_k - y_k)/|x-y|\, do_y \Big)$$

$$= (-\nu/2)\cdot \sum_{j,k=1}^{3} \int_{\Omega \setminus \overline{K_\varepsilon(x)}} \left(D_j E_{kl}(x-y) + D_k E_{jl}(x-y)\right)\cdot$$

$$\cdot \left(D_k u_j(y) + D_j u_k(y)\right)\, dy.$$

Zur Abkürzung setzen wir

$$(3.10) \quad M := \sup\Big\{ \sum_{k=1}^{3} |D_k u_j(z)| + |\pi(z)| : 1 \le j \le 3,$$

$$z \in \Omega \text{ mit } |x-z| \le \operatorname{dist}(x,\partial\Omega)/2 \Big\}.$$

Dann ist für $\varepsilon \in (0, \operatorname{dist}(x,\partial\Omega)/2)$, $j,k \in \{1,2,3\}$:

$$\Big| \int_{\partial K_\varepsilon(x)} S_{jkl}(x-y)\cdot (u_j(y) - u_j(x))\cdot (x_k - y_k)/|x-y|\, do_y \Big|$$

$$\le \int_{\partial K_\varepsilon(x)} |S_{jkl}(x-y)|\cdot M\cdot |x-y|\, do_y \quad \text{(nach dem Mittelwertsatz)}$$

$$\le \int_{\partial K_\varepsilon(x)} (1+2\cdot\nu)\cdot P_5\cdot |x-y|^{-2}\cdot M\cdot |x-y|\, do_y \quad \text{(wegen (1.13))}$$

$$\le \varepsilon^{-1}\cdot (1+2\cdot\nu)\cdot P_5\cdot M\cdot \int_{\partial K_\varepsilon(x)} do_y = \varepsilon\cdot (1+2\cdot\nu)\cdot P_5\cdot M\cdot \int_{\partial K_1(0)} do_\xi .$$

Somit hat man:

$$(3.11)\quad \int_{\partial K_\varepsilon(x)} \sum_{j,k=1}^{3} S_{jkl}(x-y)\cdot(u_j(y)-u_j(x))\cdot(x_k-y_k)/|x-y|\; do_y \to 0 \quad (\varepsilon\downarrow 0).$$

Weiter findet man für $j\in\{1,2,3\}$, $\varepsilon>0$:

$$(3.12)\quad \sum_{k=1}^{3} \int_{\partial K_\varepsilon(x)} S_{jkl}(x-y)\cdot(x_k-y_k)/|x-y|\; do_y$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \int_{\partial K_\varepsilon(x)} (\delta_{jk}\cdot E_{4l}(x-y)-\nu\cdot D_k E_{jl}(x-y)-\nu\cdot D_j E_{kl}(x-y))\cdot (x_k-y_k)/|x-y|\; do_y$$

$$= \delta_{jl} - \nu\cdot \sum_{k=1}^{3} \int_{\partial K_\varepsilon(x)} D_j E_{kl}(x-y)\cdot(x_k-y_k)/|x-y|\; do_y$$

(siehe (1.11), (1.12))

$$= \delta_{jl} \qquad \text{(Rechnung!)}$$

Aus (3.11) und (3.12) folgt:

$$\sum_{j,k=1}^{3} \int_{\partial K_\varepsilon(x)} S_{jkl}(x-y)\cdot u_j(y)\cdot(x_k-y_k)/|x-y|\; do_y \to u_l(x) \quad (\varepsilon\downarrow 0).$$

Jetzt erhält man aus (3.9) durch Grenzübergang $\varepsilon\downarrow 0$:

$$(3.13)\quad \sum_{j,k=1}^{3} \int_{\partial\Omega} S_{jkl}(x-y)\cdot u_j(y)\cdot n_k(y)\; d\Omega(y) + u_l(x) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\downarrow 0} (-\nu/2)\cdot \sum_{j,k=1}^{3} \int_{\Omega\setminus\overline{K_\varepsilon(x)}} (D_j E_{kl}(x-y)+D_k E_{jl}(x-y))\cdot(D_k u_j(y)+D_j u_k(y))\; dy.$$

Sei $\varepsilon\in(0,\mathrm{dist}(x,\partial\Omega))$. Dann ist $\Omega\setminus\overline{K_\varepsilon(x)}$ ein beschränktes Gebiet mit C^2-Berandung. Setzt man

$$\vec{w}:\ \overline{\Omega}\setminus K_\varepsilon(x) \ni y \to (E_{1l}(x-y),E_{2l}(x-y),E_{3l}(x-y)) \in \mathbb{R}^3,$$

so ist $\vec{w}\in C^\infty(\overline{\Omega}\setminus K_\varepsilon(x))^3$. Damit folgt aus Lemma 3.1 (Beachte: $D_k w_j(y) = -D_k E_{jl}(x-y)$ für $1\le j,k\le 3$, $y\in\overline{\Omega}\setminus K_\varepsilon(x)$):

$$(3.14)\quad (-\nu/2)\cdot \sum_{j,k=1}^{3} \int_{\Omega\setminus\overline{K_\varepsilon(x)}} (D_j u_k(y)+D_k u_j(y))\cdot (D_j E_{kl}(x-y)+D_k E_{jl}(x-y))\; dy$$

$$= -\sum_{j=1}^{3} \int_{\Omega\setminus\overline{K_\varepsilon(x)}} (\nu\cdot\Delta u_j(y)-D_j\pi(y))\cdot E_{jl}(x-y)\; dy$$

$$+ \sum_{j,k=1}^{3} \Big(\int_{\partial\Omega} T_{jk}(\vec{u},\pi)(y)\cdot E_{jl}(x-y)\cdot n_k(y)\; d\Omega(y)$$

$$+ \int_{\partial K_\varepsilon(x)} T_{jk}(\vec{u},\pi)(y)\cdot E_{jl}(x-y)\cdot(x_k-y_k)/|x-y|\; do_y \Big),$$

wobei

$$-\sum_{j=1}^{3} \int_{\Omega\setminus\overline{K_\varepsilon(x)}} (\nu\cdot\Delta u_j(y)-D_j\pi(y))\cdot E_{jl}(x-y)\; dy =$$

$$= \int_{\Omega\setminus\overline{K_\varepsilon(x)}} \sum_{j=1}^{3} E_{jl}(x-y)\cdot f_j(y)\; dy.$$

Weil nach Auswahl von x das Integral

$$\int_\Omega \sum_{j=1}^{3} E_{jl}(x-y)\cdot f_j(y)\; d\Omega(y)$$

existiert, gilt:

$$(3.15)\quad \int_{\Omega\setminus\overline{K_\varepsilon(x)}} \sum_{j=1}^{3} E_{jl}(x-y)\cdot f_j(y)\; dy$$

$$\to \int_\Omega \sum_{j=1}^{3} E_{jl}(x-y)\cdot f_j(y)\; dy \qquad (\varepsilon\downarrow 0).$$

Weiter ist für $\varepsilon \in (0,\mathrm{dist}(x,\partial\Omega)/2)$, $j,k \in \{1,2,3\}$:

$$\left|\int_{\partial K_\varepsilon(x)} T_{jk}(\vec{u},\pi)(y)\cdot E_{jl}(x-y)\cdot (x_k-y_k)/|x-y|\; do_y\right|$$

$$\le \int_{\partial K_\varepsilon(x)} (1+2\cdot\nu)\cdot M\cdot P_5\cdot |x-y|^{-1}\; do_y$$

(mit Lemma 1.7; M wurde in (3.10) definiert)

$$= (1+2\cdot\nu)\cdot M\cdot \int_{\partial K_1(0)} do_y\cdot\varepsilon,$$

somit:

$$(3.16)\quad \sum_{j,k=1}^{3} \int_{\partial K_\varepsilon(x)} T_{jk}(\vec{u},\pi)(y)\cdot E_{jl}(x-y)\cdot (y_k-x_k)/|x-y|\; do_y \to 0 \qquad (\varepsilon\downarrow 0).$$

Wegen (3.15) und (3.16) erhält man aus (3.14):

$$(3.17)\quad \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\, (-\nu/2)\cdot \sum_{j,k=1}^{3} \int_{\Omega\setminus\overline{K_\varepsilon(x)}} (D_j u_k(y)+D_k u_j(y))\cdot (D_j E_{kl}(x-y)+D_k E_{jl}(x-y))\; dy$$

$$= \int_\Omega \sum_{j=1}^{3} E_{jl}(x-y)\cdot f_j(y)\; dy + \sum_{j,k=1}^{3} \int_{\partial\Omega} T_{jk}(\vec{u},\pi)(y)\cdot E_{jl}(x-y)\cdot n_k(y)\; d\Omega(y).$$

(3.17) kann man nun in (3.13) einsetzen. Dann ergibt sich (3.6).

Nun zum Beweis von (3.7). Zu $m \in \{1,2,3\}$ sei F_m die triviale Fortsetzung von f_m auf $\mathbb{R}^3$. Dann ist $\vec{F} \in L_{6/5}(\mathbb{R}^3)^3 \cap L_1(\mathbb{R}^3)^3$, so daß die Funktionen $\sum_{m=1}^{3} E_{jm} * F_m$ $(1 \le j \le 4)$ nach Satz 1.4 definiert sind. Ferner existieren gemäß Satz 1.4 die schwachen Ableitungen $D_k D_l(\sum_{m=1}^{3} E_{jm}*F_m)$, $D_k(\sum_{m=1}^{3} E_{4m}*F_m)$ $(1 \le j,k,l \le 3)$, und es gilt:

$$-\nu\cdot\Delta\Big(\sum_{m=1}^{3} E_{jm}*F_m\Big) + D_j\Big(\sum_{m=1}^{3} E_{4m}*F_m\Big) = F_j \text{ f.ü. } (1 \le j \le 3).$$

Setzt man

$$U_j := \Big(\sum_{m=1}^{3} E_{jm}*F_m\Big)\Big|\Omega \quad (1 \le j \le 4),$$

so existieren die schwachen Ableitungen $D_l D_k U_j$, $D_k U_4$ $(1 \le j,k,l \le 3)$ und es ist

$$(3.18)\quad -\nu\cdot\Delta U_j + D_j U_4 = f_j \text{ f.ü. für } 1 \le j \le 3 \quad \text{(siehe (1.4))}.$$

Wir bemerken, daß für $Q \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$, $g \in L_1(\partial\Omega)$ die Funktion

$$\tilde{Q}: \Omega \ni x \to \int_{\partial\Omega} Q(x-y) \cdot g(y) \, d\Omega(y) \in \mathbb{C},$$

zu $C^\infty(\Omega)$ gehört, mit

$$(3.19) \quad D_a \tilde{Q}(x) = \int_{\partial\Omega} D_a Q(x-y) \cdot g(y) \, d\Omega(y) \text{ für } x \in \Omega, \ a \in \mathbb{N}_0^3.$$

Daher sind folgende Funktionen aus $C^\infty(\Omega)$, und für ihre Ableitungen gelten zu (3.19) analoge Gleichungen:

$$V_1: \Omega \ni x \to \sum_{j,k=1}^{3} \int_{\partial\Omega} E_{j1}(x-y) \cdot T_{jk}(\vec{u},\pi)(y) \cdot n_k(y) \, d\Omega(y) \in \mathbb{C},$$

$$W_1: \Omega \ni x \to \sum_{j,k=1}^{3} \int_{\partial\Omega} S_{jk1}(x-y) \cdot u_j(y) \cdot n_k(y) \, d\Omega(y) \in \mathbb{C}$$

$$(1 \le 1 \le 3),$$

$$\tilde{A}: \Omega \ni x \to \sum_{j,k=1}^{3} \int_{\partial\Omega} E_{4j}(x-y) \cdot T_{jk}(\vec{u},\pi)(y) \cdot n_k(y) \, d\Omega(y) \in \mathbb{C},$$

$$\tilde{B}: \Omega \ni x \to \sum_{j,k=1}^{3} \int_{\partial\Omega} D_k E_{4j}(x-y) \cdot u_j(y) \cdot n_k(y) \, d\Omega(y) \in \mathbb{C}.$$

Mit diesen Bezeichnungen läßt sich die bereits bewiesene Gleichung (3.6) so schreiben:

$$(3.20) \quad u_1|\Omega = U_1 + V_1 - W_1 \text{ f.ü.} \quad (1 \le 1 \le 3).$$

Nun ist aber für $1 \le 1 \le 3$

$$(3.21) \quad \sum_{j,k=1}^{3} \Delta S_{jk1} = -2 \cdot \sum_{j,k=1}^{3} D_k D_j E_{41},$$

wie sich aus (1.10) und aus der Gleichung $\Delta E_{4j} = 0$ ergibt. Es folgt für $1 \le 1 \le 3$ und für fast alle $x \in \Omega$:

$$\partial/\partial x_1 \pi(x) = f_1(x) + \nu \cdot \Delta u_1(x)$$

$$= (f_1 + \nu \cdot \Delta U_1 + \nu \cdot \Delta V_1 - \nu \cdot \Delta W_1(x) \quad \text{(siehe (3.20))}$$

$$= (D_1 U_4 + \nu \cdot \Delta V_1 - \nu \cdot \Delta W_1)(x) \quad \text{(siehe (3.18))}$$

$$= D_1 U_4(x) + \sum_{j,k=1}^{3} \int_{\partial\Omega} \nu \cdot \Delta_x E_{j1}(x-y) \cdot T_{jk}(\vec{u},\pi)(y) \cdot n_k(y) \, d\Omega(y)$$

$$- \sum_{j,k=1}^{3} \int_{\partial\Omega} \Delta_x S_{jk1}(x-y) \cdot u_j(y) \cdot n_k(y) \, d\Omega(y)$$

$$= D_1 U_4(x) + \sum_{j,k=1}^{3} \int_{\partial\Omega} D_j E_{41}(x-y) \cdot T_{jk}(\vec{u},\pi)(y) \cdot n_k(y) \, d\Omega(y)$$

$$+ 2 \cdot \nu \cdot \sum_{j,k=1}^{3} \int_{\partial\Omega} D_k D_j E_{41}(x-y) \cdot u_j(y) \cdot n_k(y) \, d\Omega(y)$$

(wegen (1.10) und (3.21))

$$= (D_1 U_4 + D_1 \tilde{A} + 2 \cdot \nu \cdot D_1 \tilde{B})(x) \quad \text{(beachte: } D_j E_{41} = D_1 E_{4j} \text{ für } 1 \le j,1 \le 3).$$

Also gilt:

$$D_1 U_4 = D_1(\pi|\Omega) - D_1 \tilde{A} - 2 \cdot \nu \cdot D_1 \tilde{B} \quad (1 \le 1 \le 3).$$

Da $D_1 U_4$ schwache Ableitung von U_4, $D_1(\pi|\Omega) - D_1\tilde{A} - 2 \cdot \nu \cdot D_1 \tilde{B}$ Ableitung von $(\pi|\Omega) - \tilde{A} - 2 \cdot \nu \cdot \tilde{B}$, insbesondere also schwache Ableitung dieser Funktion, gibt es nach [A], 3.27 zu jedem $x \in \Omega$, $\delta > 0$

mit $\prod_{i=1}^{3} [x_i-\delta, x_i+\delta] \subset \Omega$ eine Zahl $K_{\delta,x} \in \mathbb{C}$, so daß

$$U_4(y) + K_{\delta,x} = \pi(y) - \widetilde{A}(y) - 2\cdot\nu\cdot\widetilde{B}(y)$$

für fast alle $y \in \prod_{i=1}^{3} (x_i-\delta, x_i+\delta)$.

Da Ω zusammenhängend, gibt es eine einzige Zahl $K_\pi \in \mathbb{C}$ mit

$$U_4(y) + K_\pi = \pi(y) - \widetilde{A}(y) - 2\cdot\nu\cdot\widetilde{B}(y) \text{ für fast alle } y \in \Omega.$$

Daraus folgt (3.7).

§ 4. Randpotentiale; die Sprungrelation

Wir beginnen mit einer Bemerkung technischer Art: Für $k \in \mathbb{N}$, $r \in (1,\infty)$, $a_1,\ldots,a_k \in [0,\infty)$ ist

$$(4.1)\quad \left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)^r \leq \left(\sum_{i=1}^{k} a_i^r\right)\cdot k^{r-1}.$$

Dies ergibt sich aus der Hölderungleichung in den Banachräumen

$$l_p := \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{i\in\mathbb{N}} |x_i|^p < \infty\},$$

versehen mit der üblichen Norm $(p \in (1,\infty))$.

<u>Lemma 4.1:</u> <u>Zu</u> $\gamma \in (-2,\infty)$ <u>gibt es</u> $Q_1(\gamma) > 0$, <u>so daß für alle</u> $x \in \partial\Omega$ <u>gilt:</u>

$$\int_{\partial\Omega} |x-y|^\gamma \, d\Omega(y) \leq Q_1(\gamma).$$

<u>Beweis:</u> Sei $\gamma \in (-2,\infty)$, $x \in \partial\Omega$, $t \in \{1,\ldots,k_\Omega\}$. Gemäß (2.24), (2.27) gibt es $\rho \in \Delta$ mit $x = \overset{t}{u}(\rho)$, oder es ist

$$|x - \overset{t}{u}(\eta)| \geq \varepsilon_B/2 \text{ für alle } \eta \in \mathrm{Tr}\, B_t.$$

Im ersten Fall gilt:

$$\int_{\Delta} |x-\overset{t}{u}(\eta)|^{\gamma}\cdot B_t(\eta)\, d\eta \le K_B\cdot\int_{\Delta} |\overset{t}{u}(\rho)-\overset{t}{u}(\eta)|^{\gamma}\, d\eta \quad \text{(wegen (2.20))}$$

$$\le K_B\cdot(1\vee K_B^{\gamma})\cdot\int_{\Delta} |\rho-\eta|^{\gamma}\, d\eta \quad \text{(siehe (2.16), (2.21))}$$

$$\le K_B\cdot(1\vee K_B^{\gamma})\cdot 2\cdot\pi\cdot(\gamma+2)^{-1}\cdot(\mathrm{diam}\ \Delta)^{\gamma+2} =: Q_{1,1}(\gamma).$$

Im zweiten Fall ist

$$\int_{\Delta} |x-\overset{t}{u}(\eta)|^{\gamma}\cdot B_t(\eta)\, d\eta \le \max\{(\mathrm{diam}\ \Omega)^{\gamma}, \varepsilon_B^{\gamma}\cdot 2^{-\gamma}\}\cdot\int_{\Delta} B_t(\eta)\, d\eta$$

$$\le \max\{(\mathrm{diam}\ \Omega)^{\gamma}, \varepsilon_B^{\gamma}\cdot 2^{-\gamma}\}\cdot K_B\cdot \mathrm{Vol}(\Delta) =: Q_{1,2}(\gamma).$$

Man setze nun $Q_1(\gamma) := k_{\Omega}\cdot(Q_{1,1}(\gamma) \vee Q_{1,2}(\gamma))$. Dann folgt die Behauptung des Lemmas aus der vorangehenden Fallunterscheidung, sowie aus (2.18). □

Definition 4.1: Sei $\vec{\psi} \in C^0(\partial\Omega)^3$. Zu $x \in \mathbb{R}^3$ sei

$$\vec{V}(x,\vec{\psi}) := \Big(\int_{\partial\Omega} \sum_{m=1}^{3} E_{lm}(x-y)\cdot\psi_m(y)\, d\Omega(y)\Big)_{1\le l\le 3}.$$

Ferner setzt man für $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega$:

$$Q(x,\vec{\psi}) := \int_{\partial\Omega} \sum_{m=1}^{3} E_{4m}(x-y)\cdot\psi_m(y)\, d\Omega(y);$$

$$\vec{W}(x,\vec{\psi}) := \Big(\int_{\partial\Omega} -\sum_{j,k=1}^{3} S_{jkl}(x-y)\cdot\psi_j(y)\cdot n_k(y)\, d\Omega(y)\Big)_{1\le l\le 3};$$

(S_{ijk} wurde in Satz 3.1 definiert)

$$\Pi(x,\vec{\psi}) := 2\nu\cdot\sum_{j,k=1}^{3} \int_{\partial\Omega} D_j E_{4k}(x-y)\cdot\psi_j(y)\cdot n_k(y)\, d\Omega(y).$$

$\vec{V}(.,\vec{\psi}), Q(.,\vec{\psi})$ bezeichnet man als Einfachschichtpotentiale und $\vec{W}(.,\vec{\psi}), \Pi(.,\vec{\psi})$ als Doppelschichtpotentiale zur Dichte $\vec{\psi}$.

Sei $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$ offen, beschränkt, C^2-berandet. Sei n^{Λ} die äußere Einheitsnormale an Λ. Dann setzt man für $i,j \in \{1,2,3\}$, $x \in \mathbb{R}^3$, $y \in \partial\Lambda$ mit $x \ne y$:

$$K^{\Lambda}_{ij}(x,y) := -3/(4\cdot\pi)\cdot(x_i-y_i)\cdot(x_j-y_j)\cdot\langle x-y, n^{\Lambda}(y)\rangle\cdot|x-y|^{-5}.$$

Für K^{Ω}_{ij} schreiben wir im Folgenden nur K_{ij} $(1 \le i,j \le 3)$.

Wegen (1.13) und Lemma 4.1 ist $\vec{V}(x,\vec{\psi})$ auch für $x \in \partial\Omega$ wohldefiniert. Das Integral, das in der Definition von $\vec{W}(x,\vec{\psi})$ auftritt, existiert ebenfalls für alle $x \in \mathbb{R}^3$ – sogar für $x \in \partial\Omega$ (siehe Lemma 4.7). Man könnte also daran denken, $\vec{W}(.,\vec{\psi})$ mit obiger Definition auf ganz $\mathbb{R}^3$ einzuführen. Eine solche Funktion $\vec{W}(.,\vec{\psi}): \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ wäre aber nicht stetig (siehe Satz 4.1). Man beachte dagegen, daß $\vec{V}(.,\vec{\psi}) \in C^0(\mathbb{R}^3)^3$ (siehe Lemma 6.1).

Lemma 4.2: Sei $\vec{\psi} \in C^0(\partial\Omega)^3$.

I) Die Funktionen $V_l(.,\vec{\psi})|\mathbb{R}^3\setminus\partial\Omega$, $Q(.,\vec{\psi})$, $W_l(.,\vec{\psi})$, $\Pi(.,\vec{\psi})$ $(1 \le l \le 3)$ sind aus $C^{\infty}(\mathbb{R}^3\setminus\partial\Omega)$.

Für $a \in \mathbb{N}_0^3$, $l \in \{1,2,3\}$, $x \in \mathbb{R}^3\setminus\partial\Omega$ ist

$$D_a(V_l(.,\vec{\psi})|\mathbb{R}^3\setminus\partial\Omega)(x) = \int_{\partial\Omega} \sum_{m=1}^{3} D_a E_{lm}(x-y)\cdot\psi_m(y)\, d\Omega(y).$$

Entsprechende Formeln gelten für $Q(.,\vec{\psi})$, $\vec{W}(.,\vec{\psi})$, $\Pi(.,\vec{\psi})$.

II) <u>Es gilt ferner:</u>

$$-\nu\cdot\Delta(\vec{V}(.,\vec{\psi})|\mathbb{R}^3\setminus\partial\Omega)+\nabla Q(.,\vec{\psi})=0;$$

$$\mathrm{div}(\vec{V}(.,\vec{\psi})|\mathbb{R}^3\setminus\partial\Omega)=0;$$

$$-\nu\cdot\Delta\vec{W}(.,\vec{\psi})+\nabla\Pi(.,\vec{\psi})=0;$$

$$\mathrm{div}\,\vec{W}(.,\vec{\psi})=0.$$

III) <u>Für</u> $i\in\{1,2,3\}$, $x\in\mathbb{R}^3\setminus\partial\Omega$ <u>ist</u>

$$W_i(x,\vec{\psi})=\int_{\partial\Omega}\sum_{l=1}^{3}K_{il}(x,y)\cdot\psi_l(y)\,d\Omega(y).$$

Weiter gilt für $a\in\partial\Omega$, $\varepsilon\in[-\varepsilon_\Omega,\varepsilon_\Omega]\setminus\{0\}$, $j\in\{1,2,3\}$:

$$\sum_{k=1}^{3}T_{jk}(\vec{V}(.,\vec{\psi})|\mathbb{R}^3\setminus\partial\Omega,Q(.,\vec{\psi}))(a+\varepsilon\cdot n(a))\cdot n_k(a)$$

$$=\int_{\partial\Omega}-\sum_{k,l=1}^{3}S_{jkl}(a+\varepsilon\cdot n(a)-b)\cdot\psi_l(b)\cdot n_k(a)\,d\Omega(b)$$

$$=\int_{\partial\Omega}-\sum_{l=1}^{3}K_{jl}(b-\varepsilon\cdot n(a),a)\cdot\psi_l(b)\,d\Omega(b).$$

<u>Beweis:</u> Der erste Teil des Lemmas folgt aus elementaren Sätzen der Analysis (siehe etwa [RT3], 75.31). Die ersten beiden Formeln von Teil II) folgen sofort aus I) und (1.10). Die dritte und vierte Formel folgt ebenfalls aus I) und (1.10), wenn man beachtet: $D_jE_{4k}=D_kE_{4j}$, $\Delta E_{4k}=0$ $(1\le j,k\le 3)$. Zum Beweis der beiden Formeln in III) verwende man, daß

$$S_{jkl}(z)=3/(4\pi)\cdot z_j\cdot z_k\cdot z_l\cdot|z|^{-5}\text{ für }1\le j,k,l\le 3,\ z\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\}.\quad\square$$

$=-K_{jkl}$

<u>Lemma 4.3:</u> <u>Es gibt eine Konstante</u> $Q_2>0$ <u>mit folgenden Eigenschaften:</u>

<u>Für</u> $x,\tilde{x},y\in\partial\Omega$ <u>mit</u> $x\neq y\neq\tilde{x}$, $i,j\in\{1,2,3\}$ <u>gilt:</u>

(4.2) $|K_{ij}(x,y)|\le Q_2\cdot|x-y|^{-1}$;

(4.3) $|K_{ij}(x,y)-K_{ij}(\tilde{x},y)|\le Q_2\cdot|x-\tilde{x}|\cdot(|x-y|^{-2}\vee|\tilde{x}-y|^{-2})$.

<u>Für</u> $y\in\partial\Omega$, $t\in\{1,\dots,k_\Omega\}$, $\rho,\tilde{\rho}\in\Delta$ <u>mit</u> $\overset{t}{u}(\rho)\neq y\neq\overset{t}{u}(\tilde{\rho})$, $i,j\in\{1,2,3\}$, $l\in\{1,2\}$ <u>hat man:</u>

(4.4) $|\partial/\partial\rho_l(K_{ij}(\overset{t}{u}(\rho),y))|\le Q_2\cdot|\overset{t}{u}(\rho)-y|^{-2}$;

(4.5) $|\partial/\partial\rho_l(K_{ij}(\overset{t}{u}(\rho),y))-\partial/\partial\tilde{\rho}_l(K_{ij}(\overset{t}{u}(\tilde{\rho}),y))|$

$$\le Q_2\cdot|\overset{t}{u}(\rho)-\overset{t}{u}(\tilde{\rho})|\cdot(|\overset{t}{u}(\rho)-y|^{-3}\vee|\overset{t}{u}(\tilde{\rho})-y|^{-3}).$$

<u>Weiter ist für</u> $x,y\in\mathbb{R}^3$ <u>mit</u> $x\neq y$, $1\le i,j,m,n\le 3$:

(4.6) $|D_mK_{ij}(x,y)|\le Q_2\cdot|x-y|^{-3}$;

(4.7) $|D_nD_mK_{ij}(x,y)|\le Q_2\cdot|x-y|^{-4}$.

<u>Beweis:</u> Aus (2.22) folgt:

(4.8) $|K_{ij}(x,y)|\le Q_{2,1}\cdot|x-y|^{-1}$ für $x,y\in\partial\Omega$, $x\neq y$, $1\le i,j\le 3$

(mit $Q_{2,1}:=3/(4\cdot\pi)\cdot K_B$).

Setzt man $Q_{2,2} := 84\cdot 3/(4\cdot\pi)$, so kann man mit einer leichten Rechnung zeigen:

(4.9) $|D_m K_{ij}(x,y)|\cdot|x-y|^3 + |D_n D_m K_{ij}(x,y)|\cdot|x-y|^4 \le Q_{2,2}$

für $x,y \in \mathbb{R}^3$ mit $x \neq y$, $1 \le i,j,m,n \le 3$.

Wir setzen für $\gamma_1,\gamma_2 \in (0,1]$ mit $\gamma_1 < \gamma_2$:

$$\delta_{\gamma_1,\gamma_2} := \min\{\mathrm{dist}(\Lambda_i^{\gamma_1}, \partial\Omega\setminus\Lambda_i^{\gamma_2}) : 1 \le i \le k_\Omega\}.$$

Es ist $\delta_{\gamma_1,\gamma_2} > 0$ für $\gamma_1,\gamma_2 \in (0,1]$ mit $\gamma_1 < \gamma_2$; siehe dazu (2.12).

Sei $t \in \{1,\dots,k_\Omega\}$, $y \in \partial\Omega$, $\rho,\tilde\rho \in \Delta$, $i,j \in \{1,2,3\}$, $l \in \{1,2\}$, mit $\overset{t}{u}(\rho) \neq y \neq \overset{t}{u}(\tilde\rho)$, $\rho \neq \tilde\rho$. Wir setzen zunächst voraus:

(4.10) $|\rho-\tilde\rho| \le K_B^{-1}\cdot(1/4)\cdot\delta_{1/4,1}$.

Es trifft dann einer der beiden folgenden Fälle zu:

(4.11) 1. Fall: $\min\{|\overset{t}{u}(\rho)-y|, |\overset{t}{u}(\tilde\rho)-y|\} \ge (3/4)\cdot\delta_{1/4,1}$,

oder

(4.12) 2. Fall: $\overset{t}{u}(\rho), \overset{t}{u}(\tilde\rho), y \in \Lambda_s$ für ein $s \in \{1,\dots,k_\Omega\}$.

Zum Beweis dieser Behauptung gehe man davon aus, daß der 2. Fall nicht zutrifft. Wähle dann $s \in \{1,\dots,k_\Omega\}$ mit $y \in \Lambda_s^{1/4}$ (siehe (2.11)). Dann ist $\overset{t}{u}(\rho) \notin \Lambda_s$ oder $\overset{t}{u}(\tilde\rho) \notin \Lambda_s$. O.E. gelte: $\overset{t}{u}(\rho) \notin \Lambda_s$. Daraus folgt sofort: $|\overset{t}{u}(\rho)-y| \ge \delta_{1/4,1}$. Weiter gilt:

$$|\overset{t}{u}(\tilde\rho)-y| \ge |\overset{t}{u}(\rho)-y| - |\overset{t}{u}(\rho)-\overset{t}{u}(\tilde\rho)|$$

$$\ge \delta_{1/4,1} - K_B|\rho-\tilde\rho| \quad \text{(siehe (2.21))}$$

$$\ge (3/4)\cdot\delta_{1/4,1} \quad \text{(wegen (4.10))}.$$

Tatsächlich muß also die Aussage des 1. Falls gelten, wenn der 2. Fall nicht zutrifft.

Im 1. Fall findet man für $\theta \in [0,1]$:

(4.13) $|\overset{t}{u}(\tilde\rho+\theta(\rho-\tilde\rho))-y| \ge |\overset{t}{u}(\rho)-y| - |\overset{t}{u}(\tilde\rho+\theta(\rho-\tilde\rho))-\overset{t}{u}(\rho)|$

$$\ge (3/4)\cdot\delta_{1/4,1} - K_B\cdot(1-\theta)\cdot|\rho-\tilde\rho| \quad \text{(siehe (4.11),(2.21))}$$

$$\ge (3/4)\cdot\delta_{1/4,1} - (1/4)\cdot\delta_{1/4,1} \quad \text{(siehe (4.10))}$$

$$= (1/2)\cdot\delta_{1/4,1} > 0.$$

Somit folgt im 1. Fall:

(4.14) $|K_{ij}(\overset{t}{u}(\rho),y) - K_{ij}(\overset{t}{u}(\tilde\rho),y)|$

$$\le \left|\int_0^1 \sum_{r=1}^{2} \sum_{m=1}^{3} D_m K_{ij}(\overset{t}{u}(\rho+\theta(\rho-\tilde\rho)),y)\cdot D_r \overset{t}{u}_m(\tilde\rho+\theta(\rho-\tilde\rho))\,d\theta \cdot(\rho_r-\rho_r)\right|$$

(nach dem Mittelwertsatz, der wegen (4.13) angewandt werden kann)

$$\le 6\cdot Q_{2,2}\cdot\int_0^1 |\overset{t}{u}(\tilde\rho-\theta(\rho-\tilde\rho))-y|^{-3}\,d\theta\cdot K_B\cdot|\rho-\tilde\rho|$$

(wegen (4.9); beachte außerdem: $|\overset{t}{u}_m|_2 \le K_B$ für $1 \le m \le 3$ gemäß (2.20))

$$\leq Q_{2,3} \cdot |\rho - \tilde{\rho}|$$

(mit $Q_{2,3} := 6 \cdot Q_{2,2} \cdot ((1/2) \cdot \delta_{1/4,1})^{-3} \cdot K_B$; wegen (4.13))

$$\leq Q_{2,4} \cdot |\overset{t}{u}(\rho) - \overset{t}{u}(\tilde{\rho})| \cdot (|\overset{t}{u}(\rho) - y|^{-2} \vee |\overset{t}{u}(\tilde{\rho}) - y|^{-2})$$

(mit $Q_{2,4} := Q_{2,3} \cdot (\mathrm{diam}\ \Omega)^2$; siehe (2.16)).

Mit einer ähnlichen Rechnung findet man :

(4.15) $|\partial/\partial\rho_1 (K_{ij}(\overset{t}{u}(\rho), y))| \leq Q_{2,4} \cdot |\overset{t}{u}(\rho) - y|^{-2}$.

Schließlich ergibt sich im 1. Fall:

(4.16) $|\partial/\partial\rho_1 (K_{ij}(\overset{t}{u}(\rho), y)) - \partial/\partial\tilde{\rho}_1 (K_{ij}(\overset{t}{u}(\tilde{\rho}), y))|$

$$= \Big| \sum_{r=1}^{2} \sum_{m=1}^{3} \{ (D_m K_{ij}(\overset{t}{u}(\rho), y) - D_m K_{ij}(\overset{t}{u}(\tilde{\rho}), y)) \cdot D_r \overset{t}{u}_m(\rho) \}$$

$$+ D_m K_{ij}(\overset{t}{u}(\tilde{\rho}), y) \cdot (D_r \overset{t}{u}_m(\rho) - D_r \overset{t}{u}_m(\tilde{\rho})) \} \Big|$$

$$\leq \sum_{s,r=1}^{2} \sum_{m,n=1}^{3} \Big| \int_0^1 D_n D_m K_{ij}(\overset{t}{u}(\tilde{\rho} + \theta(\rho - \tilde{\rho})), y) \cdot D_s \overset{t}{u}_n(\tilde{\rho} + \theta(\rho - \tilde{\rho}))\, d\theta \Big|$$

$$\cdot |\rho_1 - \tilde{\rho}_1| \cdot |D_r \overset{t}{u}_m(\rho)|$$

$$+ \sum_{r=1}^{2} \sum_{m=1}^{3} |D_m K_{ij}(\overset{t}{u}(\tilde{\rho}), y)| \cdot |\overset{t}{u}_m|_2 \cdot |\rho - \tilde{\rho}|$$

$$\leq Q_{2,5} \cdot |\rho - \tilde{\rho}|$$

(mit $Q_{2,5} := 4 \cdot 9 \cdot Q_{2,2} \cdot ((1/2) \cdot \delta_{1/4,1})^{-3} \cdot K_B^2 +$

$+ 6 \cdot Q_{2,2} \cdot ((1/2) \cdot \delta_{1/4,1})^{-2} \cdot K_B$;

wegen (2.20), (4.9), (4.13))

$$\leq Q_{2,6} \cdot |\overset{t}{u}(\rho) - \overset{t}{u}(\tilde{\rho})| (|\overset{t}{u}(\rho) - y|^{-3} \vee |\overset{t}{u}(\tilde{\rho}) - y|^{-3})$$

(mit $Q_{2,6} := Q_{2,5} \cdot (\mathrm{diam}\ \Omega)^3$; siehe (2.16)).

Nun betrachten wir den 2. Fall:

Sei dann $s \in \{1, \dots, k_\Omega\}$ mit $y, \overset{t}{u}(\rho), \overset{t}{u}(\tilde{\rho}) \in \Lambda_s$. Wir wählen $\eta, \zeta, \tilde{\zeta} \in \Delta$ mit $y = \overset{s}{u}(\eta)$, $\overset{t}{u}(\rho) = \overset{s}{u}(\zeta)$, $\overset{t}{u}(\tilde{\rho}) = \overset{s}{u}(\tilde{\zeta})$. Gemäß Definition von ψ_{st} vor Lemma 2.1 ist

$$\overset{t}{u} | \overset{t}{u}^{-1}(\Lambda_t \cap \Lambda_s) = \overset{s}{u} \circ \psi_{st}.$$

Daher gilt: $\psi_{st}(\rho) = \zeta$, $\psi_{st}(\tilde{\rho}) = \tilde{\zeta}$, sowie:

(4.17) $\partial/\partial\rho_1 (K_{ij}(\overset{t}{u}(\rho), y))$

$$= \sum_{r=1}^{2} \partial/\partial\zeta_r (K_{ij}(\overset{s}{u}(\zeta), \overset{s}{u}(\eta))) \cdot D_1(\psi_{st})_r(\rho),$$

mit einer entsprechenden Gleichung für $\tilde{\rho}$.

Weil für $\eta, \xi \in \Delta$ gilt (siehe (2.15)):

$$\langle \overset{s}{u}(\xi) - \overset{s}{u}(\eta), n \circ \overset{s}{u}(\eta) \rangle = \langle (\xi - \eta, a_s(\xi) - a_s(\eta)), (-\mathrm{grad}\ a_s(\eta), 1) \rangle \cdot J_s(\eta)^{-1}$$

$$= (-\sum_{\nu=1}^{2} (\xi_\nu - \eta_\nu) \cdot D_\nu a_s(\eta) + a_s(\xi) - a_s(\eta)) / J_s(\eta),$$

folgt mit $r \in \{1,2\}$:

(4.18) $\partial/\partial\xi_r(\langle \overset{S}{\bar u}(\xi)-\overset{S}{\bar u}(\eta), n\circ\overset{S}{\bar u}(\eta)\rangle) = (-D_r a_s(\eta)+D_r a_s(\xi))/J_s(\eta)$.

Somit erhält man für $r \in \{1,2\}$:

(4.19) $|\partial/\partial\zeta_r(K_{ij}(\overset{S}{\bar u}(\zeta),\overset{S}{\bar u}(\eta)))|$

$$= \Big|\partial/\partial\zeta_r\{(\overset{S}{\bar u}(\zeta)-\overset{S}{\bar u}(\eta))_i\cdot(\overset{S}{\bar u}(\zeta)-\overset{S}{\bar u}(\eta))_j\cdot|\overset{S}{\bar u}(\zeta)-\overset{S}{\bar u}(\eta)|^{-5}\}$$

$$\cdot\langle\overset{S}{\bar u}(\zeta)-\overset{S}{\bar u}(\eta), n\circ\overset{S}{\bar u}(\eta)\rangle/J_s(\eta)$$

$$+\ (\overset{S}{\bar u}(\zeta)-\overset{S}{\bar u}(\eta))_i\cdot(\overset{S}{\bar u}(\zeta)-\overset{S}{\bar u}(\eta))_j\cdot|\overset{S}{\bar u}(\zeta)-\overset{S}{\bar u}(\eta)|^{-5}$$

$$\cdot(-D_r a_s(\eta)+D_r a_s(\zeta))/J_s(\eta)\Big|\cdot 3/(4\pi)$$

$$\le 3/(4\pi)\cdot\{7\cdot|\overset{S}{\bar u}(\zeta)-\overset{S}{\bar u}(\eta)|^{-4}\cdot|\overset{S}{\bar u}|_1\cdot|\langle\overset{S}{\bar u}(\zeta)-\overset{S}{\bar u}(\eta), n\circ\overset{S}{\bar u}(\eta)\rangle|$$

$$+\ |\overset{S}{\bar u}(\zeta)-\overset{S}{\bar u}(\eta)|^{-3}\cdot|D_r a_s(\eta)-D_r a_s(\zeta)|\}$$

$$\le 3/(4\pi)\cdot\{7\cdot K_B\cdot|\overset{S}{\bar u}(\zeta)-\overset{S}{\bar u}(\eta)|^{-2}\cdot K_B$$

$$+\ |\overset{S}{\bar u}(\zeta)-\overset{S}{\bar u}(\eta)|^{-3}\cdot|a_s|_2\cdot|\eta-\zeta|\}$$

(siehe (2.15), (2.20), (4.18))

$$\le Q_{2,7}\cdot|\overset{S}{\bar u}(\zeta)-\overset{S}{\bar u}(\eta)|^{-2}$$

(mit $Q_{2,7} := 3/(4\cdot\pi)\cdot(7\cdot K_B^2+K_B)$; wegen (2.20), (2.16)).

Zur Abschätzung von $|K_{ij}(\overset{S}{\bar u}(\zeta),y)-K_{ij}(\overset{S}{\bar u}(\tilde\zeta),y)|$ und von $|\partial/\partial\zeta_r(K_{ij}(\overset{S}{\bar u}(\zeta),y))-\partial/\partial\zeta_s(K_{ij}(\overset{S}{\bar u}(\zeta),y))|$ unterscheiden wir zwei Unterfälle:

1. Unterfall: $2\cdot K_B^{-1}\cdot|\zeta-\tilde\zeta| \ge |\overset{S}{\bar u}(\zeta)-\overset{S}{\bar u}(\eta)|$. Dann gilt für $1 \le r \le 2$:

(4.20) $|\partial/\partial\zeta_r(K_{ij}(\overset{S}{\bar u}(\zeta),\overset{S}{\bar u}(\eta)))-\partial/\partial\tilde\zeta_r(K_{ij}(\overset{S}{\bar u}(\tilde\zeta),\overset{S}{\bar u}(\eta))|$

$$\le 2\cdot\max_{\xi\in\{\zeta,\tilde\zeta\}}|\partial/\partial\xi_r(K_{ij}(\overset{S}{\bar u}(\xi),\overset{S}{\bar u}(\eta)))|$$

$$\le 2\cdot Q_{2,7}\cdot(|\overset{S}{\bar u}(\zeta)-\overset{S}{\bar u}(\eta)|^{-2}\vee|\overset{S}{\bar u}(\zeta)-\overset{S}{\bar u}(\eta)|^{-2})\quad\text{(siehe (4.19))}$$

$$\le 4\cdot K_B^{-1}\cdot Q_{2,7}\cdot|\zeta-\tilde\zeta|\cdot(|\overset{S}{\bar u}(\zeta)-\overset{S}{\bar u}(\eta)|^{-3}\vee|\overset{S}{\bar u}(\tilde\zeta)-\overset{S}{\bar u}(\eta)|^{-3})$$

(nach Voraussetzung im 1. Unterfall)

$$\le Q_{2,8}\cdot|\overset{S}{\bar u}(\zeta)-\overset{S}{\bar u}(\tilde\zeta)|\cdot(|\overset{S}{\bar u}(\zeta)-\overset{S}{\bar u}(\eta)|^{-3}\vee|\overset{S}{\bar u}(\tilde\zeta)-\overset{S}{\bar u}(\eta)|^{-3})$$

(mit $Q_{2,8} := 4\cdot K_B^{-2}\cdot Q_{2,7}$; mit (2.16)).

Ähnlich findet man

(4.21) $|K_{ij}(\overset{S}{\bar u}(\zeta),\overset{S}{\bar u}(\eta))-K_{ij}(\overset{S}{\bar u}(\tilde\zeta),\overset{S}{\bar u}(\eta))|$

$$\le 2\cdot Q_{2,1}\cdot(|\overset{S}{\bar u}(\zeta)-\overset{S}{\bar u}(\eta)|^{-1}\vee|\overset{S}{\bar u}(\tilde\zeta)-\overset{S}{\bar u}(\eta)|^{-1})\quad\text{(siehe (4.8))}$$

$$\le 4\cdot Q_{2,1}\cdot K_B^{-1}\cdot|\zeta-\tilde\zeta|\cdot(|\overset{S}{\bar u}(\zeta)-\overset{S}{\bar u}(\eta)|^{-2}\vee|\overset{S}{\bar u}(\tilde\zeta)-\overset{S}{\bar u}(\eta)|^{-2})$$

$$\le Q_{2,9}\cdot|\overset{S}{\bar u}(\zeta)-\overset{S}{\bar u}(\tilde\zeta)|\cdot(|\overset{S}{\bar u}(\zeta)-\overset{S}{\bar u}(\eta)|^{-2}\vee|\overset{S}{\bar u}(\tilde\zeta)-\overset{S}{\bar u}(\eta)|^{-2})$$

(mit $Q_{2,9} := 4\cdot Q_{2,1}\cdot K_B^{-2}$).

2. Unterfall: $2\cdot K_{\mathcal{B}}^{-1}\cdot|\zeta-\tilde\zeta| \le |\overset{s}{\bar u}(\zeta)-\overset{s}{\bar u}(\eta)|$. Dann gilt für $\theta\in[0,1]$:

$$\text{(4.22)}\quad |\overset{s}{\bar u}(\tilde\zeta+\theta\cdot(\zeta-\tilde\zeta))-\overset{s}{\bar u}(\eta)|$$

$$\ge |\overset{s}{\bar u}(\zeta)-\overset{s}{\bar u}(\eta)| - |\overset{s}{\bar u}(\tilde\zeta+\theta\cdot(\zeta-\tilde\zeta)) - \overset{s}{\bar u}(\zeta)|$$

$$\ge |\overset{s}{\bar u}(\zeta)-\overset{s}{\bar u}(\eta)| - K_{\mathcal{B}}^{-1}\cdot(1-\theta)\cdot|\zeta-\tilde\zeta| \quad \text{(wegen (2.21))}$$

$$\ge (1/2)\cdot|\overset{s}{\bar u}(\zeta)-\overset{s}{\bar u}(\eta)| \quad \text{(nach Voraussetzung im 2. Unterfall)}$$

$$\ge K_{\mathcal{B}}^{-1}\cdot|\zeta-\tilde\zeta| > 0.$$

Nun folgt für $r\in\{1,2\}$, mit der Abkürzung $D:=\{\tilde\zeta+\theta\cdot(\zeta-\tilde\zeta):\theta\in[0,1]\}$:

$$\text{(4.23)}\quad |\partial/\partial\zeta_r(K_{ij}(\overset{s}{\bar u}(\zeta),\overset{s}{\bar u}(\eta)))-\partial/\partial\tilde\zeta_r(K_{ij}(\overset{s}{\bar u}(\tilde\zeta),\overset{s}{\bar u}(\eta)))|$$

$$\le \sum_{\nu=1}^{2}\sup_{\xi\in D}\left|\partial^2/\partial\xi_\nu\partial\xi_r(K_{ij}(\overset{s}{\bar u}(\xi),\overset{s}{\bar u}(\eta)))\right|\,|\zeta_\nu-\tilde\zeta_\nu|$$

(nach dem Mittelwertsatz, den man wegen (4.22) anwenden kann)

$$\le |\zeta-\tilde\zeta|\cdot 6/(4\cdot\pi)\cdot\sup_{1\le\mu,\nu\le 2,\,\xi\in D}\Big(\Big|\partial^2/\partial\xi_\mu\partial\xi_\nu\Big\{(\overset{s}{\bar u}(\xi)-\overset{s}{\bar u}(\eta))_i\cdot$$

$$\cdot(\overset{s}{\bar u}(\xi)-\overset{s}{\bar u}(\eta))_j\cdot|\overset{s}{\bar u}(\xi)-\overset{s}{\bar u}(\eta)|^{-5}\Big\}$$

$$\cdot<\overset{s}{\bar u}(\xi)-\overset{s}{\bar u}(\eta),\mathrm{no}\overset{s}{\bar u}(\eta)>\Big|$$

$$+\ 2\cdot\Big|\partial/\partial\xi_\mu\{(\overset{s}{\bar u}(\xi)-\overset{s}{\bar u}(\eta))_i\cdot(\overset{s}{\bar u}(\xi)-\overset{s}{\bar u}(\eta))_j\cdot|\overset{s}{\bar u}(\xi)-\overset{s}{\bar u}(\eta)|^{-5}\}$$

$$\cdot\partial/\partial\xi_\nu(<\overset{s}{\bar u}(\xi)-\overset{s}{\bar u}(\eta),\mathrm{no}\overset{s}{\bar u}(\eta)>)\Big| +$$

$$+\ (\overset{s}{\bar u}(\xi)-\overset{s}{\bar u}(\eta))_i\cdot(\overset{s}{\bar u}(\xi)-\overset{s}{\bar u}(\eta))_j\cdot|\overset{s}{\bar u}(\xi)-\overset{s}{\bar u}(\eta)|^{-5}$$

$$\cdot\partial^2/\partial\xi_\nu\partial\xi_\mu(<\overset{s}{\bar u}(\xi)-\overset{s}{\bar u}(\eta),\mathrm{no}\overset{s}{\bar u}(\eta)>)\Big|\Big)$$

$$\le |\zeta-\tilde\zeta|\cdot 6/(4\pi)\cdot\sup_{\xi\in D}\Big(\Big(9\cdot 62\cdot|\overset{s}{\bar u}(\xi)-\overset{s}{\bar u}(\eta)|^{-5}\cdot(\max_{1\le l\le 3}|\overset{s}{\bar u}_l|_1)^2$$

$$+\ 21\cdot|\overset{s}{\bar u}(\xi)-\overset{s}{\bar u}(\eta)|^{-4}\cdot\max_{1\le l\le 3}|\overset{s}{\bar u}_l|_2\Big)\cdot|<\overset{s}{\bar u}(\xi)-\overset{s}{\bar u}(\eta),\mathrm{no}\overset{s}{\bar u}(\eta)>|$$

$$+\ 42\cdot|\overset{s}{\bar u}(\xi)-\overset{s}{\bar u}(\eta)|^{-4}\cdot\max_{1\le l\le 3}|\overset{s}{\bar u}_l|_1\cdot\max_{1\le\nu\le 2}|D_\nu a_s(\xi)-D_\nu a_s(\eta)|$$

$$+\ |\overset{s}{\bar u}(\xi)-\overset{s}{\bar u}(\eta)|^{-3}\cdot\max_{1\le\mu,\nu\le 2}|D_\mu D_\nu a_s|_0\Big)$$

(beachte (4.18))

$$\le |\zeta-\tilde\zeta|\cdot Q_{2,10}\cdot\sup_{\xi\in D}\Big(\Big(|\overset{s}{\bar u}(\xi)-\overset{s}{\bar u}(\eta)|^{-5}\cdot K_{\mathcal{B}}^2+|\overset{s}{\bar u}(\xi)-\overset{s}{\bar u}(\eta)|^{-4}\cdot K_{\mathcal{B}}\Big)$$

$$\cdot K_{\mathcal{B}}\cdot|\overset{s}{\bar u}(\xi)-\overset{s}{\bar u}(\eta)|^2$$

$$+\ |\overset{s}{\bar u}(\xi)-\overset{s}{\bar u}(\eta)|^{-4}\cdot K_{\mathcal{B}}\cdot|a_s|_2\cdot|\xi-\eta|$$

$$+\ |\overset{s}{\bar u}(\xi)-\overset{s}{\bar u}(\eta)|^{-3}\cdot K_{\mathcal{B}}\Big)$$

(mit $Q_{2,10}:=6/(4\pi)\cdot 9\cdot 62$. Hier wurde (2.20) und (2.22) angewandt.)

$$\le |\zeta-\tilde\zeta|\cdot Q_{2,11}\cdot\sup_{\xi\in D}\Big(|\overset{s}{\bar u}(\xi)-\overset{s}{\bar u}(\eta)|^{-3}+|\overset{s}{\bar u}(\xi)-\overset{s}{\bar u}(\eta)|^{-2}$$

$$+\ |\overset{s}{\bar u}(\xi)-\overset{s}{\bar u}(\eta)|^{-4}\cdot|\xi-\eta| + |\overset{s}{\bar u}(\xi)-\overset{s}{\bar u}(\eta)|^{-3}\Big)$$

(mit $Q_{2,11}:=Q_{2,10}\cdot(K_{\mathcal{B}}^3+2\cdot K_{\mathcal{B}}^2+K_{\mathcal{B}})$; wegen (2.20))

$$\leq |\overset{s}{u}(\zeta)-\overset{s}{u}(\tilde{\zeta})| \cdot 4 \cdot Q_{2,11} \cdot (1+\mathrm{diam}\ \Omega) \cdot \max_{\xi \in D} |\overset{s}{u}(\xi)-\overset{s}{u}(\eta)|^{-3}$$

(wegen (2.16))

$$\leq Q_{2,12} \cdot |\overset{s}{u}(\zeta)-\overset{s}{u}(\tilde{\zeta})| \cdot (|\overset{s}{u}(\zeta)-\overset{s}{u}(\eta)|^{-3} \vee |\overset{s}{u}(\tilde{\zeta})-\overset{s}{u}(\eta)|^{-3})$$

(mit $Q_{2,12} := Q_{2,11} \cdot (1+\mathrm{diam}\ \Omega) \cdot 32$; wegen (4.22), gelesen bis zur drittletzten Ungleichung).

Schließlich gilt im 2. Unterfall:

(4.24) $$|K_{ij}(\overset{s}{u}(\zeta),\overset{s}{u}(\eta))-K_{ij}(\overset{s}{u}(\tilde{\zeta}),\overset{s}{u}(\eta))|$$

$$\leq \sup_{\xi \in D} \sum_{r=1}^{2} |\partial/\partial\xi_r(K_{ij}(\overset{s}{u}(\xi),\overset{s}{u}(\eta)))| \cdot |\zeta_r-\tilde{\zeta}_r|$$

$$\leq \sup_{\xi \in D} Q_{2,7} \cdot |\overset{s}{u}(\xi)-\overset{s}{u}(\eta)|^{-2} \cdot |\zeta-\tilde{\zeta}|$$

(siehe die Rechnung in (4.19))

$$\leq 4 \cdot Q_{2,7} \cdot |\overset{s}{u}(\zeta)-\overset{s}{u}(\eta)|^{-2} \cdot |\zeta-\tilde{\zeta}| \qquad \text{(siehe (4.22))}$$

$$\leq 4 \cdot Q_{2,7} \cdot |\overset{s}{u}(\zeta)-\overset{s}{u}(\tilde{\zeta})| \cdot \max_{\xi \in \{\zeta,\tilde{\zeta}\}} |\overset{s}{u}(\xi)-\overset{s}{u}(\eta)|^{-2} \quad \text{(mit (2.16))}.$$

Im 2. Fall (siehe (4.12)) haben wir somit folgende Ergebnisse: Zunächst folgt aus (4.17) und (4.19):

(4.25) $$|\partial/\partial\rho_1(K_{ij}(\overset{t}{u}(\rho),y))| \leq \sum_{r=1}^{2} Q_{2,7} \cdot |\overset{t}{u}(\rho)-y|^{-2} \cdot |(\psi_{st})_r|_1$$

$$\leq Q_{2,13} \cdot |\overset{t}{u}(\rho)-y|^{-2} \quad \text{(mit } Q_{2,13} := 2 \cdot Q_{2,7} \cdot K_B\text{; siehe (2.20))}.$$

Weiterhin erhält man:

(4.26) $$|\partial/\partial\rho_1(K_{ij}(\overset{t}{u}(\rho),y)) - \partial/\partial\tilde{\rho}_1(K_{ij}(\overset{t}{u}(\tilde{\rho}),y))|$$

$$= \Big| \sum_{r=1}^{2} \{\partial/\partial\zeta_r(K_{ij}(\overset{s}{u}(\zeta),\overset{s}{u}(\eta)))-\partial/\partial\tilde{\zeta}_r(K_{ij}(\overset{s}{u}(\tilde{\zeta}),\overset{s}{u}(\eta)))\} \cdot D_1(\psi_{st})_r(\tilde{\zeta})$$

$$+ \sum_{r=1}^{2} \partial/\partial\zeta_r(K_{ij}(\overset{s}{u}(\zeta),\overset{s}{u}(\eta))) \cdot \Big(D_1(\psi_{st})_r(\zeta)-D_1(\psi_{st})_r(\tilde{\zeta})\Big)\Big|$$

(wegen (4.17))

$$\leq Q_{2,14} \cdot \sum_{r=1}^{2} \Big(|\overset{s}{u}(\zeta)-\overset{s}{u}(\tilde{\zeta})| \cdot (|\overset{s}{u}(\zeta)-\overset{s}{u}(\eta)|^{-3} \vee |\overset{s}{u}(\tilde{\zeta})-\overset{s}{u}(\eta)|^{-3}) \cdot |(\psi_{st})_r|_1$$

$$+ |\overset{s}{u}(\zeta)-\overset{s}{u}(\eta)|^{-2} \cdot K_B \cdot |\zeta_r-\tilde{\zeta}_r|\Big)$$

(mit $Q_{2,14} := Q_{2,7} \vee Q_{2,8} \vee Q_{2,12}$; wegen (2.20), (4.19), (4.20) bzw. (4.23))

$$\leq Q_{2,15} \cdot |\overset{t}{u}(\rho)-\overset{t}{u}(\tilde{\rho})| \cdot (|\overset{t}{u}(\rho)-y|^{-3} \vee |\overset{t}{u}(\tilde{\rho})-y|^{-3})$$

(mit $Q_{2,15} := Q_{2,14} \cdot 2 \cdot (K_B + \mathrm{diam}(\Omega) \cdot K_B)$; siehe (2.20)).

Schließlich gilt wegen (4.21) bzw. (4.24):

(4.27) $$|K_{ij}(\overset{t}{u}(\rho),y)-K_{ij}(\overset{t}{u}(\tilde{\rho}),y)|$$

$$\leq Q_{2,16} \cdot |\overset{t}{u}(\rho)-\overset{t}{u}(\tilde{\rho})| \cdot (|\overset{t}{u}(\rho)-y|^{-2} \vee |\overset{t}{u}(\tilde{\rho})-y|^{-2})$$

(mit $Q_{2,16} := Q_{2,9} \vee 4 \cdot Q_{2,7}$).

Setze nun $Q_{2,17} := \max\{Q_{2,i}:\ i = 4,6,13,15,16\}$. Aus (4.14)-(4.16) und (4.25)-(4.27) erhält man sowohl im ersten als auch im zweiten Fall (siehe (4.11), (4.12)):

$$(4.28)\quad |\partial/\partial\rho_l(K_{ij}(\overset{t}{u}(\rho),y)) - \partial/\partial\tilde{\rho}_l(K_{ij}(\overset{t}{u}(\tilde{\rho}),y))|$$

$$\leq Q_{2,17} \cdot |\overset{t}{u}(\rho)-\overset{t}{u}(\tilde{\rho})| \cdot (|\overset{t}{u}(\rho)-y|^{-3} \vee |\overset{t}{u}(\tilde{\rho})-y|^{-3});$$

$$(4.29)\quad |\partial/\partial\rho_l(K_{ij}(\overset{t}{u}(\rho),y))| \leq Q_{2,17} \cdot |\overset{t}{u}(\rho)-y|^{-2};$$

$$(4.30)\quad |K_{ij}(\overset{t}{u}(\rho),y)-K_{ij}(\overset{t}{u}(\tilde{\rho}),y)|$$

$$\leq Q_{2,17} \cdot |\overset{t}{u}(\rho)-\overset{t}{u}(\tilde{\rho})| \cdot (|\overset{t}{u}(\rho)-y|^{-2} \vee |\overset{t}{u}(\tilde{\rho})-y|^{-2}).$$

Diese Abschätzungen gelten für $t,y,\rho,\tilde{\rho},i,j,l$ wie in (4.10). Wenn nun aber $t \in \{1,\dots,k_\Omega\}$, $y \in \partial\Omega$, $i,j \in \{1,2,3\}$, $l \in \{1,2\}$, $\rho,\tilde{\rho} \in \Delta$ mit $|\rho-\tilde{\rho}| \geq K_B^{-1} \cdot (1/4) \cdot \delta_{1/4,1}$, $\overset{t}{u}(\rho) \neq y \neq \overset{t}{u}(\tilde{\rho})$ gegeben sind, so erhält man:

$$(4.31)\quad |\partial/\partial\rho_l K_{ij}(\overset{t}{u}(\rho),y) - \partial/\partial\tilde{\rho}_l K_{ij}(\overset{t}{u}(\tilde{\rho}),y)|$$

$$\leq 2 \cdot Q_{2,17} \cdot (K_B^{-1} \cdot (1/4) \cdot \delta_{1/4,1})^{-1} \cdot |\rho-\tilde{\rho}| \cdot (|\overset{t}{u}(\rho)-y|^{-2} \vee |\overset{t}{u}(\tilde{\rho})-y|^{-2})$$

(wegen (4.29), und nach Voraussetzung an $\rho,\tilde{\rho}$)

$$\leq Q_{2,18} \cdot |\overset{t}{u}(\rho)-\overset{t}{u}(\tilde{\rho})| \cdot (|\overset{t}{u}(\rho)-y|^{-3} \vee |\overset{t}{u}(\tilde{\rho})-y|^{-3})$$

(mit $Q_{2,18} := 2 \cdot Q_{2,17} \cdot (K_B^{-1} \cdot (1/4) \cdot \delta_{1/4,1})^{-1} \cdot \operatorname{diam} \Omega$; mit (2.16)).

Ebenso erhält man aus (4.8):

$$(4.32)\quad |K_{ij}(\overset{t}{u}(\rho),y)-K_{ij}(\overset{t}{u}(\tilde{\rho}),y)|$$

$$\leq Q_{2,19} \cdot |\overset{t}{u}(\rho)-\overset{t}{u}(\tilde{\rho})| \cdot (|\overset{t}{u}(\rho)-y|^{-2} \vee |\overset{t}{u}(\tilde{\rho})-y|^{-2})$$

(mit $Q_{2,19} := 2 \cdot Q_{2,1} \cdot (K_B^{-1} \cdot (1/4) \cdot \delta_{1/4,1})^{-1} \cdot \operatorname{diam} \Omega$).

Seien $1 \leq i,j \leq 3$, $x,x',y \in \partial\Omega$ mit $x \neq y \neq x'$. Nach (2.11) gibt es $t \in \{1,\dots,k_\Omega\}$ mit $x \in \Lambda_t^{1/4}$. Ist $\tilde{x} \in \Lambda_t$, so läßt sich $|K_{ij}(x,y)-K_{ij}(\tilde{x},y)|$ mit (4.30) bzw. (4.32) abschätzen. Wenn $\tilde{x} \notin \Lambda_t$, so ist $|x-\tilde{x}| \geq \delta_{1/4,1}$. Also gilt mit (4.8):

$$(4.32')\quad |K_{ij}(x,y)-K_{ij}(\tilde{x},y)|$$

$$\leq Q_{2,1} \cdot \delta_{1/4,1}^{-1} \cdot \operatorname{diam} \Omega \cdot |x-\tilde{x}| (|x-y|^{-2} \vee |\tilde{x}-y|^{-2}).$$

Setzt man nun

$$Q_2 := Q_{2,17} \vee Q_{2,18} \vee Q_{2,19} \vee Q_{2,2} \vee Q_{2,1} \vee (Q_{2,1} \cdot \delta_{1/4,1}^{-1} \cdot \operatorname{diam} \Omega),$$

so folgt die Behauptung aus (4.28)-(4.32), (4.32'), (4.8), (4.9). □

<u>Lemma 4.4 (Sprungrelation):</u> <u>Für</u> $x \in \mathbb{R}^3$, $i,j \in \{1,2,3\}$ <u>gilt</u>:

$$\int_{\partial\Omega} K_{ij}(x,y)\, d\Omega(y) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega} \\ \delta_{ij}, & \text{falls } x \in \Omega \\ (1/2) \cdot \delta_{ij}, & \text{falls } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

(<u>Beachte:</u> <u>Wegen</u> (4.2) <u>und Lemma</u> 4.1 <u>existiert das Integral</u>

$$\int_{\partial\Omega} K_{ij}(x,y)\, d\Omega(y) \qquad (1 \leq i,j \leq 3)$$

<u>auch für</u> $x \in \partial\Omega$.)

<u>Beweis:</u> Wir beginnen mit einer vorbereitenden Rechnung: Es ist für $z \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, $i,j \in \{1,2,3\}$:

$$(4.33) \quad \sum_{l=1}^{3} \partial/\partial z_l (z_i \cdot z_j \cdot z_l \cdot |z|^{-5})$$

$$= \sum_{l=1}^{3} (-1/3) \cdot \{\partial^2/\partial z_l^2 (z_i \cdot z_j \cdot |z|^{-3}) - \delta_{il} \cdot \partial/\partial z_l (z_j/|z|^{-3}) -$$

$$- \delta_{jl} \cdot \partial/\partial z_l (z_i/|z|^{-3})\}$$

$$= (-1/3) \cdot \{\Delta_z (z_i \cdot z_j/|z|^{-3}) - \partial/\partial z_i (z_j/|z|^{-3}) -$$

$$- \partial/z_j (z_i/|z|^{-3})\}$$

$$= (-1/3) \cdot \{\Delta_z (z_i \; z_j/|z|^{-3}) + 2 \cdot \partial^2/\partial z_i \partial z_j (|z|^{-1})\}$$

$$= (-1/3) \cdot \{\Delta_z (\delta_{ij} \cdot |z|^{-1} + z_i \cdot z_j \cdot |z|^{-3}) - 2 \cdot \partial/\partial z_i (z_j/|z|^{-3})\}$$

(Beachte: $\Delta_z(|z|^{-1}) = 0$).

$$= (-8 \cdot \pi/3) \{\nu \cdot \Delta_z E_{ij}(z) - \partial/\partial z_i E_{4j}(z)\} = 0 \quad \text{(siehe (1.10))}.$$

und beschränkt

Jetzt folgt für $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$ offen mit C^2-Berandung, $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Lambda}$, $1 \le i,j \le 3$:

$$(4.34) \quad \int_{\partial\Lambda} K_{ij}^{\Lambda}(x,y) \, d\Lambda(y) = -3/(4\pi) \int_{\partial\Lambda} \sum_{l=1}^{3} (x_i - y_i) \cdot (x_i - y_i) \cdot$$

$$\cdot (x_l - y_l) \cdot |x-y|^{-5} \cdot n_l^{\Lambda}(y) \, d\Lambda(y)$$

$$= -3/(4\pi) \int_{\Lambda} \sum_{l=1}^{3} \partial/\partial x_l \{(x_i - y_i) \cdot (x_j - y_j) \cdot (x_l - y_l) \cdot |x-y|^{-5}\} \, dy$$

(nach dem Satz von Gauß; beachte: $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Lambda}$).

$= 0$ (wegen (4.33)).

Sei nun $x \in \Omega$ und $\varepsilon \in (0, \mathrm{dist}(x, \partial\Omega)/2)$. Dann ist $\Lambda_\varepsilon := \Omega \setminus K_\varepsilon(x)$

beschränkt und

offen mit C^2-Berandung. Also folgt aus (4.34):

$$(4.35) \quad \int_{\partial\Lambda_\varepsilon} K_{ij}^{\Lambda_\varepsilon}(x,y) \, d\Lambda_\varepsilon(y) = 0 \text{ für } 1 \le i,j \le 3.$$

Es ist aber $\Lambda_\varepsilon = \partial\Omega \cup \partial K_\varepsilon(x)$, mit $\partial\Omega \cap \partial K_\varepsilon(x) = \emptyset$. Für die äußere Einheitsnormale $n_\varepsilon := n^{\Lambda_\varepsilon}$ an Λ_ε gilt: $n_\varepsilon(y) = n(y)$ für $y \in \partial\Omega$; $n_\varepsilon(y) = (x-y)/|x-y|$ für $y \in \partial K_\varepsilon(x)$. Damit erhält man aus (4.35) (beachte unsere Abkürzung $K_{ij} := K_{ij}^{\Omega}$):

$$\int_{\partial\Omega} K_{ij}(x,y) \, d\Omega(y) = \int_{\partial K_\varepsilon(x)} K_{ij}^{K_\varepsilon(x)}(x,y) \, do_y \text{ für } 1 \le i,j \le 3.$$

Nun rechnet man aber leicht nach:

$$\int_{\partial K_\varepsilon(x)} K_{ij}^{K_\varepsilon(x)}(x,y) \, do_y = \int_{\partial K_\varepsilon(x)} 3/(4 \cdot \pi) \cdot (x_i - y_i) \cdot (x_j - y_j) \cdot$$

$$\cdot |x-y|^{-4} \, do_y$$

$$= 3/(4 \cdot \pi) \cdot \int_{\partial K_1(0)} z_i \cdot z_j \, do_z = \delta_{ij}, \text{ für } 1 \le i,j \le 3.$$

Somit gilt:

$$\int_{\partial\Omega} K_{ij}(x,y) \, d\Omega(y) = \delta_{ij} \quad (1 \le i,j \le 3).$$

Sei nun $x \in \partial\Omega$, $i,j \in \{1,2,3\}$. Sei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit $0 \le \varphi \le 1$, $\varphi|(-\infty, 1/4) = 0$, $\varphi|(3/4, \infty) = 1$. Wir setzen für $\varepsilon \in (0,\infty)$, $z \in \mathbb{R}^3$: $\varphi_\varepsilon(z) := \varphi(|z|/\varepsilon)$. Das bedeutet:

$$\varphi_\varepsilon(z) \to 1 \; (\varepsilon \downarrow 0) \text{ für } z \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}; \; 0 \le \varphi_\varepsilon \le 1 \quad (\varepsilon \in (0,\infty)).$$

Sei $i,j \in \{1,2\}$. Dann ist:

$$(4.36)\quad \int_{\partial\Omega} K_{ij}(x,y)\, d\Omega(y) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{\partial\Omega} K_{ij}(x,y)\cdot\varphi_\varepsilon(x-y)\, d\Omega(y)$$

(Konvergenzsatz von Lebesgue; beachte Lemma 4.1 und (4.2))

$$= \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{\partial\Omega} (-3/(4\cdot\pi))\cdot \sum_{l=1}^{3} (x_i-y_i)\cdot(x_j-y_j)\cdot(x_l-y_l)\cdot|x-y|^{-5}\cdot$$

$$\cdot n_l(y)\cdot\varphi_\varepsilon(x-y)\, d\Omega(y)$$

$$= -3/(4\cdot\pi)\cdot \sum_{l=1}^{3} \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{\Omega} \Big\{\partial/\partial y_l((x_i-y_i)\cdot(x_j-y_j)\cdot(x_l-y_l)\cdot$$

$$\cdot|x-y|^{-5})\cdot\varphi_\varepsilon(x-y)$$

$$+ (x_i-y_i)\cdot(x_j-y_j)\cdot(x_l-y_l)\cdot|x-y|^{-5}\cdot\partial/\partial y_l(\varphi_\varepsilon(x-y))\Big\}\, dy$$

(nach dem Satz von Gauß; beachte:

$\varphi_\varepsilon(x-y) = 0$ für $y \in K_{\varepsilon/4}(x)$)

$$= -3/(4\cdot\pi)\cdot \sum_{l=1}^{3} \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{\Omega} (x_i-y_i)\cdot(x_j-y_j)\cdot(x_l-y_l)\cdot$$

$$\cdot|x-y|^{-5}\cdot\partial/\partial y_l(\varphi_\varepsilon(x-y))\, dy \quad \text{(wegen (4.33))}.$$

Sei $l \in \{1,2,3\}$. Wir zeigen, daß

$$(4.37)\quad \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\Big(\int_{\Omega} (x_i-y_i)\cdot(x_j-y_j)\cdot(x_l-y_l)\cdot|x-y|^{-5}\cdot\partial/\partial y_l(\varphi_{\varepsilon^2}(x-y))\, dy$$

$$+ (1/2)\cdot\int_{K_1(0)} z_i\cdot z_j\cdot z_l\cdot|z|^{-5}\cdot\partial/\partial z_l(\varphi_\varepsilon(z))\, dz\Big) = 0$$

gilt.

Da $x \in \partial\Omega$, gibt es wegen (2.11) eine Zahl $t \in \{1,\dots,k_\Omega\}$ mit $x \in U_t$ (siehe die Definition von U_t vor Lemma 2.2).

Sei $\varepsilon_0 > 0$ so klein, daß $K_{\varepsilon_0}(x) \subset U_t$ und $\varepsilon_0 < (1/2)\cdot(|a_t|_2+1)^{-1}$.

Für $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ ist dann

$$(4.38)\quad \int_{K_1(0)} \chi_{[-|a_t|_2\cdot\varepsilon,\,|a_t|_2\cdot\varepsilon]}(z_3/|z|)\cdot|z|^{-5/2}\, dz$$

$$= 2\cdot\pi\cdot\int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \chi_{[-|a_t|_2\cdot\varepsilon,\,|a_t|_2\cdot\varepsilon]}(\sin\theta)\cdot r^{-1/2}\, d\theta\, dr$$

(siehe [RT3], 80.8)

$$= 4\cdot\pi\cdot(\arcsin(|a_t|_2\cdot\varepsilon) - \arcsin(-|a_t|_2\cdot\varepsilon))$$

$$= 8\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot\int_0^1 1/\sqrt{1-|a_t|_2^2\cdot(2\cdot\theta-1)^2\cdot\varepsilon^2}\, d\theta \quad L \quad L\cdot|a_t|_2$$

$$\le 8\cdot\pi\cdot\varepsilon\cdot 1/\sqrt{1/2} \le 16\cdot\pi\cdot\varepsilon. \quad L\cdot|a_t|_2$$

Es ist $K_{\varepsilon_0}(x) \subset U_i$. Nach Lemma 2.1 gilt daher für $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, $y \in K_\varepsilon(x)$: y gehört genau dann zu Ω, wenn $g_t^{-1}(y)_3 < 0$ (g_t wurde vor Lemma 2.2 definiert). Wir definieren eine Abbildung $A_t\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$A_t(y) := \tilde{A}_t\cdot y + c_t \text{ für } y \in \mathbb{R}^3.$$

Nach Definition der Abbildung p_t vor Lemma 2.2 bedeutet dies:

$$p_t(z) = (A_t^{-1}(z)_1, A_t^{-1}(z)_2) \text{ für } z \in \mathbb{R}^3.$$

Weiter erhält man durch Ausrechnen von $(g_t^{-1})_3$:

(4.39) $K_\varepsilon(x) \cap \Omega = \{y \in K_\varepsilon(x) : A_t^{-1}(y)_3 - a_t(p_t(y)) < 0\}$.

Weil $x \in \partial\Omega \cap U_t = \Lambda_t$, gilt:

(4.40) $A_t^{-1}(x)_3 = a_t(p_t(x))$,

wie aus Lemma 2.1 folgt.

Für $\varepsilon \in (0,\varepsilon_o]$, $z \in K_1(0)$ ist $x+\varepsilon z \in K_{\varepsilon_o}(x) \subset U_i$, und somit $p_t(x+\varepsilon z) \in \Delta$. Damit kann man für $\varepsilon \in (0,\varepsilon_o]$, $z \in K_1(0)$ folgende Rechnung durchführen:

(4.41)
$$\begin{aligned}
& A_t^{-1}(x+\varepsilon\cdot z)_3 - a_t(p_t(x+\varepsilon\cdot z)) \\
&= A_t^{-1}(x)_3 + \varepsilon\cdot(\tilde{A}_t^{-1}\cdot z)_3 - a_t(p_t(x+\varepsilon\cdot z)) \qquad \text{(Nachrechnen!)} \\
&= a_t(p_t(x)) + \varepsilon\cdot(\tilde{A}_t^{-1}\cdot z)_3 - a_t(p_t(x+\varepsilon\cdot z)) \quad \text{(siehe (4.40))} \\
&= \int_0^1 - \sum_{l=1}^{2} D_l a_t(p_t(x)+\theta\cdot(p_t(x+\varepsilon\cdot z)-p_t(x)))\cdot \\
&\qquad \cdot(p_t(x+\varepsilon\cdot z)_l - p_t(x)_l)\, d\theta + \varepsilon\cdot(\tilde{A}_t^{-1}\cdot z)_3 \\
&= -\int_0^1 \sum_{l=1}^{2} D_l a_t(p_t(x)+\theta\cdot(p_t(x+\varepsilon\cdot z)-p_t(x)))\cdot \\
&\qquad \cdot\varepsilon\cdot(\tilde{A}_t^{-1}\cdot z)_l\, d\theta + \varepsilon\cdot(\tilde{A}_t^{-1}\cdot z)_3 \\
&= \varepsilon\cdot\Big(-\sum_{l=1}^{2} D_l a_t(p_t(x))\cdot(\tilde{A}_t^{-1}\cdot z)_l + (\tilde{A}_t^{-1}\cdot z)_3 + \\
&\qquad + \int_0^1 \sum_{l=1}^{2} \{D_l a_t(p_t(x)) - D_l a_t(p_t(x)+\theta\cdot(p_t(x+\varepsilon\cdot z)-p_t(x)))\}\cdot \\
&\qquad\qquad \cdot(\tilde{A}_t^{-1}\cdot z)_l\, d\theta\Big).
\end{aligned}$$

Ferner ist für $\varepsilon \in (0,\varepsilon_o]$, $z \in K_1(0)$:

(4.42)
$$\begin{aligned}
& \Big| \sum_{l=1}^{2} \int_0^1 \{D_l a_t(p_i(x)) - D_l a_t(p_i(x)+\theta\cdot(p_t(x+\varepsilon\cdot z)-p_t(x)))\}\, d\theta\cdot \\
&\qquad\qquad \cdot(\tilde{A}_t^{-1}\cdot z)_l \Big| \\
&\le |a_t|_2\cdot\int_0^1 |\theta\cdot(p_t(x+\varepsilon\cdot z)-p_t(x))|\, d\theta\cdot|\tilde{A}_t^{-1}\cdot z| \\
&= |a_t|_2\cdot|p_t(x+\varepsilon\cdot z)-p_t(x)|\cdot|z| \\
&\le |a_t|_2\cdot\varepsilon\cdot|z|^2 \le |a_t|_2\cdot\varepsilon\cdot|z|.
\end{aligned}$$

Hierbei gilt die vorletzte Ungleichung, weil

$$p_t(y)_l - p_t(z)_l = (\tilde{A}_t^{-1}\cdot(y-z))_l \quad \text{für } y,z \in \mathbb{R}^3,\ 1 \le l \le 2.$$

Nun überlegt man sich einerseits: Für $\varepsilon \in (0,\varepsilon_o]$, $z \in K_1(0)\setminus\{0\}$ mit $A_t^{-1}(x+\varepsilon\cdot z)_3 - a_t(p_t(x+\varepsilon\cdot z)) < 0$ ist

$$-\sum_{l=1}^{2} D_l a_t(p_t(x))\cdot(\tilde{A}_t^{-1}\cdot z)_l/|z| + (\tilde{A}_t^{-1}\cdot z)_3/|z| < |a_t|_2\cdot\varepsilon,$$

wie aus (4.41) und (4.42) folgt. Andererseits kann man aus (4.41) und (4.42) schließen: Für $\varepsilon \in (0,\varepsilon_o]$, $z \in K_1(0)\setminus\{0\}$ mit

$$-\sum_{l=1}^{2} D_l a_t(p_t(x))\cdot(\tilde{A}_t^{-1}\cdot z)_l/|z| + (\tilde{A}_t^{-1}\cdot z)_3/|z| < -|a_t|_2\cdot\varepsilon$$

ist

$$A_t^{-1}(x+\varepsilon\cdot z)_3 - a_t(p_t(x+\varepsilon\cdot z)) < 0.$$

Damit haben wir die beiden folgenden Ungleichungen, für $\varepsilon \in (0,\varepsilon_o]$, $z \in K_1(0)\setminus\{0\}$:

$$(4.43)\quad \chi_{(-\infty,0)}(A_t^{-1}(x+\varepsilon\cdot z)_3 - a_t(p_t(x+\varepsilon\cdot z)))$$

$$\leq \chi_{(-\infty,|a_t|_2\cdot\varepsilon)}((-\text{grad } a_t(p_t(x)),1)^T\cdot\tilde{A}_t^{-1}\cdot z\cdot(1/|z|))$$

$$(4.44)\quad \chi_{(-\infty,-|a_t|_2\cdot\varepsilon)}((-\text{grad } a_t(p_t(x)),1)^T\cdot\tilde{A}_t^{-1}\cdot z\cdot(1/|z|))$$

$$\leq \chi_{(-\infty,0)}(A_t^{-1}(x+\varepsilon\cdot z)_3 - a_t(p_t(x+\varepsilon\cdot z))).$$

Wir wählen nun eine orthonormale Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit

$$(4.45)\quad (-\text{grad } a_t(p_t(x)),1)^T\cdot B = (0,0,(\sum_{l=1}^{2} D_l a_t(p_t(x))^2+1)^{1/2}).$$

Dann findet man:

$$\int_{K_1(0)} \chi_{(-\infty,0)}((B^{-1}\cdot\tilde{A}_t^{-1}\cdot z)_3/|z|)\cdot z_i\cdot z_j\cdot z_l^2/|z|^6\cdot\varphi'(|z|/\varepsilon)\,dz$$

Ã $$= \int_{K_1(0)} \chi_{(0,\infty)}((B^{-1}\cdot A_t^{-1}\cdot(-z))_3/|z|)\cdot z_i\cdot z_j\cdot z_l^2/|z|^6\cdot\varphi'(|z|/\varepsilon)\,dz$$

$$= \int_{K_1(0)} \chi_{(0,\infty)}((B^{-1}\cdot\tilde{A}_t^{-1}\cdot z)_3/|z|)\cdot z_i\cdot z_j\cdot z_l^2/|z|^6\cdot\varphi'(|z|/\varepsilon)\,dz.$$

Mit dieser Rechnung folgt:

$$\int_{K_1(0)} z_i\cdot z_j\cdot z_l^2/|z|^6\cdot\varphi'(|z|/\varepsilon)\,dz =$$

$$= \int_{K_1(0)\setminus\{y\in\mathbb{R}^3:\ (B^{-1}\cdot A_t^{-1}\cdot y)_3=0\}} z_i\cdot z_j\cdot z_l^2/|z|^6\cdot\varphi'(|z|/\varepsilon)\,dz$$ Ã

$$= 2\cdot\int_{K_1(0)} \chi_{(-\infty,0)}((B^{-1}\cdot\tilde{A}_t^{-1}\cdot z)_3/|z|)\cdot z_i\cdot z_j\cdot z_l^2/|z|^6\cdot\varphi'(|z|/\varepsilon)\,dz.$$

Somit hat man:

$$(4.46)\quad (1/2)\cdot\int_{K_1(0)} z_i\cdot z_j\cdot z_l/|z|^5\cdot\partial/\partial z_l(\varphi_\varepsilon(z))\,dz$$

$$= \int_{K_1(0)} \chi_{(-\infty,0)}((B^{-1}\cdot\tilde{A}_t^{-1}\cdot z)_3/|z|)\cdot z_i\cdot z_j\cdot z_l/|z|^6$$ 2

$$\cdot\varphi'(|z|/\varepsilon)\,dz\cdot 1/\varepsilon.$$

Weiter findet man:

$$(4.47)\quad \int_\Omega (x_i-y_i)\cdot(x_j-y_j)\cdot(x_l-y_l)/|x-y|^5\cdot\partial/\partial y_l(\varphi_{\varepsilon^2}(x-y))\,dy$$

$$= \int_{\Omega\cap K_\varepsilon(x)} (x_i-y_i)\cdot(x_j-y_j)\cdot(x_l-y_l)/|x-y|^5\cdot\partial/\partial y_l(\varphi_{\varepsilon^2}(x-y))\,dy$$

$$= -\int_{K_\varepsilon(x)} \chi_{(-\infty,0)}(A_t^{-1}(y)_3 - a_t(p_t(y)))\cdot(1/\varepsilon)^2\cdot$$

$$\cdot(x_i-y_i)\cdot(x_j-y_j)\cdot(x_l-y_l)^2/|x-y|^6\cdot\varphi'(|x-y|/\varepsilon^2)\,dy$$

(siehe (4.39))

$$= -\int_{K_1(O)} \chi_{(-\infty,o)}(A_t^{-1}(x+\varepsilon\cdot z)_3 - a_t(p_t(x+\varepsilon\cdot z)))\cdot$$

$$\cdot z_i\cdot z_j\cdot z_l^2/|z|^6\cdot\varphi'(|z|/\varepsilon)\ dz\cdot 1/\varepsilon .$$

Nun setzen wir die vorangehenden Ergebnisse zusammen:

$$\Big|\int_\Omega (x_i-y_i)\cdot(x_j-y_j)\cdot(x_l-y_l)/|x-y|^5\cdot\partial/\partial y_l(\varphi_{\varepsilon^2}(x-y))\ dy$$

$$+ (1/2)\cdot\int_{K_1(O)} z_i\cdot z_j\cdot z_l/|z|^5\cdot\partial/\partial z_l(\varphi_\varepsilon(z))\ dz\Big|$$

$$= \Big|\int_{K_1(O)} \Big(-\chi_{(-\infty,o)}(A_t^{-1}(x+\varepsilon\cdot z)_3 - a_t(p_t(x+\varepsilon\cdot z)))$$

$$+ \chi_{(-\infty,o)}((B^{-1}\cdot\tilde{A}_t^{-1}\cdot z)_3/|z|)\Big)\cdot z_i\cdot z_j\cdot z_l^2/|z|^6\cdot\varphi'(|z|/\varepsilon)\ dz\Big|\cdot 1/\varepsilon$$

(wegen (4.46) und (4.47))

$$\le L_1\cdot\int_{K_1(O)} \Big|\chi_{(-\infty,o)}(A_t^{-1}(x+\varepsilon\cdot z)_3 - a_t(p_t(x+\varepsilon\cdot z)))$$

$$- \chi_{(-\infty,o)}((B^{-1}\cdot\tilde{A}_t^{-1}\cdot z)_3/|z|)\Big|\cdot|z|^{-5/2}\ dz\cdot 1/\sqrt{\varepsilon}$$

(mit $L_1 := |\varphi'|_o$. Beachte: Für $z \in K_1(O)$ mit $\varphi'(|z|/\varepsilon) \neq 0$ ist $|z|/\varepsilon \le 1$; also: $1/\varepsilon \le 1/|z|$, $1/\sqrt{\varepsilon} \le 1/\sqrt{|z|}$.)

$$= L_1\cdot\int_{K_1(O)} \max\Big\{\chi_{(-\infty,o)}(A_t^{-1}(x+\varepsilon\cdot z)_3 - a_t(p_t(x+\varepsilon\cdot z)))$$

$$- \chi_{(-\infty,o)}((B^{-1}\cdot\tilde{A}_t^{-1}\cdot z)_3/|z|),$$

$$\chi_{(-\infty,o)}((B^{-1}\cdot\tilde{A}_t^{-1}\cdot z)_3/|z|)$$

$$- \chi_{(-\infty,o)}(A_t^{-1}(x+\varepsilon\cdot z)_3 - a_t(p_t(x+\varepsilon\cdot z)))\Big\}\cdot|z|^{-5/2}\ dz\cdot 1/\sqrt{\varepsilon}.$$

$$\le L_1\cdot\int_{K_1(O)} \max\{\chi_{(-\infty,\delta)}((-\mathrm{grad}\ a_t(p_t(x)),1)^T\cdot\tilde{A}_t^{-1}\cdot z/|z|)$$

$$- \chi_{(-\infty,o)}((B^{-1}\cdot\tilde{A}_t^{-1}\cdot z)_3/|z|),$$

$$\chi_{(-\infty,o)}((B^{-1}\cdot\tilde{A}_t^{-1}\cdot z)_3 - \chi_{(-\infty,-\delta)}((-\mathrm{grad}\ a_t(p_t(x)),1)^T\cdot$$ [/|z|)

$$\cdot\tilde{A}_t^{-1}\cdot z/|z|)\}\cdot|z|^{-5/2}\ dz\cdot 1/\sqrt{\varepsilon}$$

(wegen (4.43), (4.44); wir verwenden die Abkürzung $\delta := \varepsilon\cdot|a_t|_2$).

$$= L_1\cdot\int_{K_1(O)} \max\{\chi_{(-\infty,\delta]}((-\mathrm{grad}\ a_t(p_t(x)),1)^T\cdot B\cdot z/|z|) -$$

$$- \chi_{(-\infty,o)}(z_3/|z|),$$

$$\chi_{(-\infty,o)}(z_3/|z|) - \chi_{(-\infty,-\delta)}((-\mathrm{grad}\ a_t(p_t(x)),1)^T\cdot B\cdot z/|z|)\}$$

$$\cdot|z|^{-5/2}\ dz\cdot 1/\sqrt{\varepsilon} \quad \text{(Substitution } z \to \tilde{A}_t\cdot B\cdot z)$$

$$= L_1\cdot\int_{K_1(O)} \max\{\chi_{(-\infty,\delta]}(z_3\cdot(\sum_{l=1}^{2} D_l a_t(p_t(x))^2+1)^{1/2}/|z|) -$$

$$- \chi_{(-\infty,o)}(z_3/|z|),$$

$$\chi_{(-\infty,o)}(z_3/|z|) - \chi_{(-\infty,-\delta)}(z_3\cdot(\sum_{l=1}^{2} D_l a_t(p_t(x))^2+1)^{1/2}/|z|)\}$$

$$\cdot|z|^{-5/2}\ dz\cdot 1/\sqrt{\varepsilon} \quad \text{(nach Auswahl von B in (4.45))}$$

$$\le L_1\cdot\int_{K_1(O)} \chi_{[-\delta,\delta]}(z_3/|z|)\cdot|z|^{-5/2}\ dz\cdot 1/\sqrt{\varepsilon}$$

(wegen $\sum_{l=1}^{2} D_l a_t(p_t(x))^2+1 \ge 1$)

$\le 16\cdot\pi\cdot\sqrt{\varepsilon}$ (wegen (4.38)); beachte: $\delta = |a_t|_2\cdot\varepsilon$, $L_1 = |\varphi'|_o$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_o]$). [$\cdot|a_t|_2^2\cdot L_1$

Damit ist (4.37) gezeigt. Nun gilt aber mit einer Rechnung wie in (4.36):

$$(4.48)\quad -3/(4\pi)\cdot\sum_{l=1}^{3}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{K_1(0)} z_i\cdot z_j\cdot z_l\,|z|^{-5}\,\partial/\partial z_l(\varphi_\varepsilon(z))\,dz$$

$$=-\int_{\partial K_1(0)} K_{ij}^{\partial K_1(0)}(0,z)\,do_z.$$

Faßt man nun (4.36), (4.37), (4.48) zusammen, so folgt:

$$\int_{\partial\Omega} K_{ij}(x,y)\,d\Omega(y) = (1/2)\cdot\int_{\partial K_1(0)} K_{ij}^{\partial K_1(0)}(0,z)\,do_z$$

H 3·π/8 $$= \cancel{(3\cdot\pi/3)}\cdot\int_{\partial K_1(0)} z_i\cdot z_j\,do_z = (1/2)\cdot\delta_{ij}.\qquad\square$$

__Lemma 4.5:__ __Es gibt__ $Q_3>0$, __so daß__

$$\int_{\partial\Omega}|K_{lm}(x,y)|\,d\Omega(y)\le Q_3 \text{ \underline{für} } x\in\mathbb{R}^3,\ l,m\in\{1,2,3\}.$$

__Beweis:__ Sei $x\in\partial\Omega$. Dann folgt aus (4.2) und Lemma 4.1:

$$(4.49)\quad \int_{\partial\Omega}|K_{lm}(x,y)|\,d\Omega(y)\le Q_2\cdot Q_1(-1) \text{ für } l,m\in\{1,2,3\}.$$

Sei $x\in\Omega$, $l\in\{1,2,3\}$, $i\in\{1,\dots,k_\Omega\}$. Nach (2.27) gibt es $\kappa\in(0,\varepsilon_B]$, $\rho\in\Delta$ mit $x=\overset{i}{u}(\rho)-\kappa\cdot no\overset{i}{u}(\rho)$, oder es ist $|x-\overset{i}{u}(\eta)|\ge\varepsilon_B/2$ für alle $\eta\in Tr\,B_i$.

Wir betrachten zunächst den ersten Fall; es gebe also $\rho\in\Delta$, $\kappa\in(0,\varepsilon_B]$ mit $x=\overset{i}{u}(\rho)-\kappa\cdot no\overset{i}{u}(\rho)$. Wir setzen zur Abkürzung

$\delta:=(1\wedge\kappa^{1/2})\cdot(2\cdot(1\vee K_B))^{-2}$. Dann ergibt sich:

$$(4.50)\quad \int_{\substack{\Delta\\|\rho-\eta|\ge\delta}} |K_{1l}(x,\overset{i}{u}(\eta))|\cdot B_i(\eta)\,d\eta$$

$$\le 3/(4\cdot\pi)\int_{\substack{\Delta\\|\rho-\eta|\ge\delta}} |\overset{i}{u}(\rho)-\kappa\cdot no\overset{i}{u}(\rho)-\overset{i}{u}(\eta)|^{-3}$$

$$\cdot|\langle\overset{i}{u}(\rho)-\kappa\cdot no\overset{i}{u}(\rho)-\overset{i}{u}(\eta),no\overset{i}{u}(\eta)\rangle|\cdot B_i(\eta)\,d\eta$$

$$\le 3/(4\cdot\pi)\cdot K_B\cdot\varepsilon_B^{-3}\cdot\int_{\substack{\Delta\\|\rho-\eta|\ge\delta}} |\overset{i}{u}(\rho)-\overset{i}{u}(\eta)|^{-3}\cdot$$

$$\cdot(|\langle\overset{i}{u}(\rho)-\overset{i}{u}(\eta),no\overset{i}{u}(\eta)\rangle|+\kappa)\,d\eta$$

(wegen (2.20), (2.25))

$$\le Q_{3,1}\cdot\int_{\substack{\Delta\\|\rho-\eta|\ge\delta}} |\overset{i}{u}(\rho)-\overset{i}{u}(\eta)|^{-3}\cdot(|\overset{i}{u}(\rho)-\overset{i}{u}(\eta)|^2+\kappa)\,d\eta$$

(mit $Q_{3,1}:=3/(4\cdot\pi)\cdot K_B\cdot\varepsilon_B^{-3}\cdot(K_B+1)$. Hier wurde (2.22) angewandt)

$$= Q_{3,1}\cdot\int_{\substack{\Delta\\|\rho-\eta|\ge\delta}} (|\overset{i}{u}(\rho)-\overset{i}{u}(\eta)|^{-1}+|\overset{i}{u}(\rho)-\overset{i}{u}(\eta)|^{-3}\cdot\kappa)\,d\eta$$

$$\le Q_{3,2}\cdot\int_{\substack{\Delta\\|\rho-\eta|\ge\delta}} (|\rho-\eta|^{-1}+|\rho-\eta|^{-3}\cdot\kappa)\,d\eta$$

(mit $Q_{3,2}:=Q_{3,1}\cdot(K_B^{-1}+K_B^{-3})$, wegen (2.21))

$$\leq Q_{3,3}\cdot\int\limits_{\substack{\Delta \\ |\rho-\eta|\geq\delta}} |\rho-\eta|^{-1}\, d\eta$$

(mit $Q_{3,3} := Q_{3,2}\cdot(1+(1\vee\varepsilon_B)\cdot 16\cdot(1\vee K_B)^4)$; beachte: Für $\eta\in\Delta$ mit $|\rho-\eta|\geq\delta$ ist $\kappa\cdot|\rho-\eta|^{-2}\leq\kappa\cdot\delta^{-2}\leq \kappa\cdot(1\wedge\kappa)^{-1}\cdot(2\cdot(1\vee K_B))^4\leq(1\vee\varepsilon_B)\cdot 16\cdot(1\vee K_B)^4$.)

$$\leq Q_{3,3}\cdot 2\pi\cdot\operatorname{diam}\Delta =: Q_{3,4}.$$

Für $\eta\in\Delta$ mit $|\rho-\eta|<\delta$ gilt:

$$\langle x-\overset{i}{u}(\eta), n\circ\overset{i}{u}(\eta)\rangle = \langle\overset{i}{u}(\rho)-\kappa\cdot n\circ\overset{i}{u}(\rho)-\overset{i}{u}(\eta), n\circ\overset{i}{u}(\eta)\rangle$$

$$= \langle\overset{i}{u}(\rho)-\overset{i}{u}(\eta), n\circ\overset{i}{u}(\eta)\rangle - \kappa\cdot\langle n\circ\overset{i}{u}(\rho)-n\circ\overset{i}{u}(\eta), n\circ\overset{i}{u}(\eta)\rangle - \kappa$$

$$\leq K_B\cdot|\overset{i}{u}(\rho)-\overset{i}{u}(\eta)|^2 + \kappa\cdot K_B\cdot|\overset{i}{u}(\rho)-\overset{i}{u}(\eta)| - \kappa$$

(wegen (2.22), (2.23))

$$\leq K_B^3\cdot|\rho-\eta|^2 + \kappa\cdot K_B^2\cdot|\rho-\eta| + \kappa \quad \text{(siehe (2.21))}$$

$$\leq K_B^3\cdot\delta^2 + \kappa\cdot K_B^2\cdot\delta - \kappa$$

$$\leq (1\vee K_B)^4\cdot\delta^2 + \kappa\cdot(1\vee K_B)^2\cdot\delta - \kappa$$

$$< 0 \quad \text{(nach Auswahl von } \delta\text{);}$$

also

$$|\langle x-\overset{i}{u}(\eta), n\circ\overset{i}{u}(\eta)\rangle| = -\langle x-\overset{i}{u}(\eta), n\circ\overset{i}{u}(\eta)\rangle.$$

Jetzt folgt:

$$(4.51)\quad \int\limits_{\substack{\Delta \\ |\rho-\eta|<\delta}} |K_{11}(x,\overset{i}{u}(\eta))|\cdot B_i(\eta)\, d\eta$$

$$= \int\limits_{\substack{\Delta \\ |\rho-\eta|<\delta}} 3/(4\cdot\pi)\cdot(x_1-\overset{i}{u}_1(\eta))^2\cdot|x-\overset{i}{u}(\eta)|^{-5}\cdot |\langle x-\overset{i}{u}(\eta), n\circ\overset{i}{u}(\eta)\rangle|\cdot B_i(\eta)\, d\eta$$

$$= \int\limits_{\substack{\Delta \\ |\rho-\eta|<\delta}} (-3)/(4\cdot\pi)\cdot(x_1-\overset{i}{u}_1(\eta))^2\cdot|x-\overset{i}{u}(\eta)|^{-5}\cdot \langle x-\overset{i}{u}(\eta), n\circ\overset{i}{u}(\eta)\rangle\cdot B_i(\eta)\, d\eta$$

$$= \int\limits_{\substack{\Delta \\ |\rho-\eta|<\delta}} K_{11}(x,\overset{i}{u}(\eta))\cdot B_i(\eta)\, d\eta$$

$$= \int\limits_{\Delta} K_{11}(x,\overset{i}{u}(\eta))\cdot B_i(\eta)\, d\eta - \int\limits_{\substack{\Delta \\ |\rho-\eta|\geq\delta}} K_{11}(x,\overset{i}{u}(\eta))\cdot B_i(\eta)\, d\eta$$

$$\leq \int\limits_{\Delta} K_{11}(x,\overset{i}{u}(\eta))\cdot B_1(\eta)\, d\eta + Q_{3,4} \quad \text{(wegen (4.50)).}$$

Aus (4.50) und (4.51) erhält man:

$$\int\limits_{\Delta} |K_{11}(x,\overset{i}{u}(\eta))|\cdot B_1(\eta)\, d\eta \leq \int\limits_{\Delta} K_{11}(x,\overset{i}{u}(\eta))\cdot B_1(\eta)\, d\eta + 2\cdot Q_{3,4}.$$

Wir betrachten nun den Fall, daß $|x-\overset{i}{u}(\eta)| \geq \varepsilon_B/2$ für alle $\eta \in \mathrm{Tr}\, B_i$. Dann gilt

$$\int_\Delta |K_{11}(x,\overset{i}{u}(\eta))| B_i(\eta)\, d\eta \leq 3/(4\cdot\pi)\cdot \int_\Delta |x-\overset{i}{u}(\eta)|^{-2}\cdot B_i(\eta)\, d\eta$$

$$\leq 3/(4\cdot\pi)\cdot \varepsilon^{-2}\cdot \int_\Delta B_i(\eta)\, d\eta$$

$$\leq 3/(4\cdot\pi)\cdot \varepsilon_B^{-2}\cdot K_B\cdot \mathrm{Vol}(\Delta) =: Q_{3,5}.$$

Daraus folgt für beide Fälle, mit $Q_{3,6} := 2\cdot Q_{3,4} \vee Q_{3,5}$:

$$(4.52)\quad \int_\Delta |K_{11}(x,\overset{i}{u}(\eta))|\cdot B_i(\eta)\, d\eta \leq \int_\Delta K_{11}(x,\overset{i}{u}(\eta))\cdot B_i(\eta)\, d\eta + Q_{3,6}.$$

Addiert man nun über $i \in \{1,\dots,k_\Omega\}$ und beachtet (2.19) sowie Lemma 4.4, so ergibt sich aus (4.52):

$$(4.53)\quad \int_{\partial\Omega} |K_{11}(x,y)|\, d\Omega(y) \leq 1 + 2\cdot k_\Omega\cdot Q_{3,6} =: Q_{3,7}.$$

Hierbei war $l \in \{1,2,3\}$ beliebig. Für $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ zeigt man Abschätzung (4.53) mit analogen Argumenten.

Jetzt findet man für $l,m \in \{1,2,3\}$, $x \in \Omega \cup \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$:

$$(4.54)\quad \int_{\partial\Omega} |K_{lm}(x,y)|\, d\Omega(y)$$

$$= \int_{\partial\Omega} 3/(4\cdot\pi)\cdot |x_l-y_l|\cdot|x_m-y_m|\cdot|x-y|^{-5}\cdot|\langle x-y,n(y)\rangle|\, d\Omega(y)$$

$$\leq \left(\int_{\partial\Omega} 3/(4\cdot\pi)\cdot(x_l-y_l)^2\cdot|x-y|^{-5}\cdot|\langle x-y,n(y)\rangle|\, d\Omega(y)\right)^{1/2}$$

$$\cdot\left(\int_{\partial\Omega} 3/(4\cdot\pi)\cdot(x_m-y_m)^2\cdot|x-y|^{-5}\cdot|\langle x-y,n(y)\rangle|\, d\Omega(y)\right)^{1/2}$$

$$= \left(\int_{\partial\Omega} |K_{ll}(x,y)|\, d\Omega(y)\right)^{1/2}\cdot\left(\int_{\partial\Omega} |K_{mm}(x,y)|\, d\Omega(y)\right)^{1/2}$$

$$\leq Q_{3,7} \quad \text{(wegen (4.53))}$$

Setzt man nun

$$Q_3 := \max\{Q_2\cdot Q_1(-1), Q_{3,7}\},$$

so folgt aus (4.49), (4.54) die Behauptung. □

<u>Lemma 4.6:</u> <u>Sei</u> $r \in (1,2)$. <u>Dann gibt es</u> $Q_4(r) > 0$, <u>so daß für</u> $l,m \in \{1,2,3\}$, $x,x' \in \partial\Omega$ <u>gilt:</u>

$$(4.55)\quad \int_{\partial\Omega} |K_{lm}(x,y)-K_{lm}(x',y)|^r\, d\Omega(y) \leq Q_4(r)\cdot|x-x'|^{-r+2};$$

$$(4.56)\quad \int_{\partial\Omega} |K_{lm}(y,x)-K_{lm}(y,x')|^r\, d\Omega(y) \leq Q_4(r)\cdot|x-x'|^{-r+2}.$$

<u>Beweis:</u> Sei $l,m \in \{1,2,3\}$, $x,x' \in \partial\Omega$, $i \in \{1,\dots,k_\Omega\}$. Nach (2.27) trifft einer der folgenden drei Fälle zu:

1\. Fall: Es gibt $\rho,\rho' \in \Delta$ mit $x = \overset{i}{u}(\rho)$, $x' = \overset{i}{u}(\rho')$. Dann stellt man zunächst fest: Für $\eta \in \Delta$ mit $|\rho-\eta| \geq 2|x-x'|$ ist wegen (2.16):

$$(4.57)\quad |x'-\overset{i}{u}(\eta)| \ge |x-\overset{i}{u}(\eta)|-|x-x'| \ge |\rho-\eta|-|x-x'| \ge (1/2)\cdot|\rho-\eta|;$$

$$|x-\overset{i}{u}(\eta)| \ge |\rho-\eta|.$$

Jetzt erhält man:

$$(4.58)\quad \int\limits_{\substack{\Delta\\ |\rho-\eta|\ge 2\cdot|x-x'|}} |K_{lm}(x,\overset{i}{u}(\eta))-K_{lm}(x',\overset{i}{u}(\eta))|^{r}\cdot B_i(\eta)\,d\eta$$

$$\le Q_2^r\cdot K_B\cdot \int\limits_{\substack{\Delta\\ |\rho-\eta|\ge 2|x-x'|}} |x-x'|^{r}\cdot(|x-\overset{i}{u}(\eta)|^{-2r}\vee|x'-\overset{i}{u}(\eta)|^{-2r})\,d\eta$$

(wegen (4.3), (2.20))

$$\le Q_2^r\cdot K_B\cdot 2^{2\cdot r}\cdot|x-x'|^{r}\cdot \int\limits_{\substack{\Delta\\ |\rho-\eta|\ge 2\cdot|x-x'|}} |\rho-\eta|^{-2r}\,d\eta$$

(siehe (4.57))

$$\le Q_{4,1}(r)\cdot|x-x'|^{2-r}$$

(mit $Q_{4,1}(r):= Q_2^r\cdot K_B\cdot 2^{2\cdot r}\cdot 2\cdot\pi\cdot(2\cdot r-2)^{-1}$).

Man findet weiterhin für $\eta\in\Delta$ mit $|\rho-\eta|\ge 2|x-x'|$:

$$(4.59)\quad |\langle\overset{i}{u}(\eta)-x,n(x)\rangle-\langle\overset{i}{u}(\eta)-x',n(x')\rangle|$$

$$= |\langle x'-x,n(x)\rangle+\langle\overset{i}{u}(\eta)-x',n(x)-n(x')\rangle|$$

$$\le K_B\cdot|x-x'|^2+|\overset{i}{u}(\eta)-x'|\cdot K_B\cdot|x-x'| \quad \text{(siehe (2.22), (2.23))}$$

$$\le 2\cdot K_B\cdot|x-x'|^2+K_B\cdot|\overset{i}{u}(\eta)-x|\cdot|x-x'|$$

$$\le (K_B+K_B^2)\cdot|\rho-\eta|$$

(nach Voraussetzung an η, und wegen (2.21)).

Jetzt ergibt sich für $\eta\in\Delta$ mit $|\rho-\eta|\ge 2\cdot|x-x'|$:

$$(4.60)\quad |K_{lm}(\overset{i}{u}(\eta),x)-K_{lm}(\overset{i}{u}(\eta),x')|$$

$$\le 3/(4\pi)\cdot\{(\overset{i}{u}(\eta)-x)_l\cdot(\overset{i}{u}(\eta)-x)_m\cdot\langle\overset{i}{u}(\eta)-x,n(x)\rangle\cdot|\overset{i}{u}(\eta)-x|^{-5}$$

$$-(\overset{i}{u}(\eta)-x')_l\cdot(\overset{i}{u}(\eta)-x')_m\cdot\langle\overset{i}{u}(\eta)-x',n(x')\rangle\cdot|\overset{i}{u}(\eta)-x'|^{-5}\}$$

$$\le 3/(4\pi)\cdot\{7\cdot|x-x'|\cdot(|\overset{i}{u}(\eta)-x|^{-4}\vee|\overset{i}{u}(\eta)-x'|^{-4})\cdot|\langle\overset{i}{u}(\eta)-x,n(x)\rangle|$$

$$+(|\overset{i}{u}(\eta)-x|^{-3}\vee|\overset{i}{u}(\eta)-x'|^{-3})$$

$$\cdot|\langle\overset{i}{u}(\eta)-x,n(x)\rangle-\langle\overset{i}{u}(\eta)-x',n(x')\rangle|\}$$

$$\le Q_{4,2}\cdot\{|x-x'|\cdot|\rho-\eta|^{-4}\cdot|\langle\overset{i}{u}(\eta)-x,n(x)\rangle|$$

$$+|\rho-\eta|^{-3}\cdot|\langle\overset{i}{u}(\eta)-x,n(x)\rangle-\langle\overset{i}{u}(\eta)-x',n(x')\rangle|\}$$

(mit $Q_{4,2}:= 3/(4\pi)\cdot 7\cdot 2^4$; wegen (4.57))

$$\le Q_{4,2}\cdot\{|x-x'|\cdot|\rho-\eta|^{-4}\cdot K_B\cdot|\overset{i}{u}(\eta)-x|^2+$$

$$+|\rho-\eta|^{-3}\cdot K_B\cdot(K_B+1)\cdot|\rho-\eta|\cdot|x-x'|\}$$

(wegen (2.22) und (4.59))

$$\leq Q_{4,3}\cdot|x-x'|\cdot|\rho-\eta|^{-2}$$

(mit $Q_{4,3}:=Q_{4,2}\cdot(K_B^3+K_B\cdot(K_B+1))$; wegen (2.21)).

Nun hat man

$$(4.61)\quad \int\limits_{\substack{\Delta\\|\rho-\eta|\geq 2\cdot|x-x'|}} |K_{1m}(\overset{i}{u}(\eta),x)-K_{1m}(\overset{i}{u}(\eta),x')|^r\cdot B_i(\eta)\,d\eta$$

$$\leq K_B\cdot Q_{4,3}^r\cdot|x-x'|^r\cdot\int\limits_{\substack{\Delta\\|\rho-\eta|\geq 2\cdot|x-x'|}} |\rho-\eta|^{-2r}\,d\eta$$

(mit (2.20) und (4.60))

$$\leq Q_{4,4}(r)\cdot|x-x'|^{-r+2}$$

(mit $Q_{4,4}(r):=K_B\cdot Q_{4,3}^r\cdot 2\pi\cdot(2r-2)^{-1}$).

Sei $z\in\{x,x'\}$, sowie $\xi\in\{\rho,\rho'\}$ mit $z=\overset{i}{u}(\xi)$. Dann ist

$$(4.62)\quad \int\limits_{\substack{\Delta\\|\rho-\eta|\leq 2\cdot|x-x'|}} |K_{1m}(z,\overset{i}{u}(\eta))|^r\cdot B_i(\eta)\,d\eta,$$

$$\int\limits_{\substack{\Delta\\|\rho-\eta|\leq 2\cdot|x-x'|}} |K_{1m}(\overset{i}{u}(\eta),z)|^r\cdot B_i(\eta)\,d\eta$$

$$\leq K_B\cdot Q_2^r\cdot\int\limits_{\substack{\Delta\\|\rho-\eta|\leq 2\cdot|x-x'|}} |z-\overset{i}{u}(\eta)|^{-r}\,d\eta$$

(wegen (2.20) und (4.2))

$$\leq K_B\cdot Q_2^r\cdot\int\limits_{\substack{\Delta\\|\xi-\eta|\leq 3\cdot|x-x'|}} |\xi-\eta|^{-r}\,d\eta \qquad \text{(mit (2.16))}$$

$$\leq Q_{4,5}(r)\cdot|x-x'|^{-r+2}$$

(mit $Q_{4,5}(r):=K_B\cdot Q_2^r\cdot 2\cdot\pi\cdot 3^{-r+2}(-r+2)^{-1}$).

Zusammen haben wir folgende Abschätzung:

$$(4.63)\quad \int\limits_{\Delta} |K_{1m}(x,\overset{i}{u}(\eta))-K_{1m}(x',\overset{i}{u}(\eta))|^r\cdot B_i(\eta)\,d\eta$$

$$\leq \sum_{z\in\{x,x'\}} 2\cdot\int\limits_{\substack{\Delta\\|\rho-\eta|\leq 2\cdot|x-x'|}} |K_{1m}(z,\overset{i}{u}(\eta))|^r\cdot B_i(\eta)\,d\eta$$

$$+\int\limits_{\substack{\Delta\\|\rho-\eta|\geq 2\cdot|x-x'|}} |K_{1m}(x,\overset{i}{u}(\eta))-K_{1m}(x'-\overset{i}{u}(\eta))|^r\cdot B_i(\eta)\,d\eta$$

(mit (4.1))

$$\leq Q_{4,6}(r)\cdot|x-x'|^{-r+2}$$

(mit $Q_{4,6}(r):=4\cdot Q_{4,5}(r)+Q_{4,1}(r)$).

Die letzte Ungleichung folgt mit (4.58) und (4.62). Mit einem analogen Schluß erhält man aus (4.61) und (4.62):

$$(4.64)\quad \int\limits_{\Delta} |K_{1m}(\overset{i}{u}(\eta),x)-K_{1m}(\overset{i}{u}(\eta),x')|^r\cdot B_i(\eta)\,d\eta$$

$$\leq Q_{4,7}(r)\cdot|x-x'|^{-r+2} \qquad (\text{mit } Q_{4,7}(r):=4\cdot Q_{4,5}(r)+Q_{4,4}(r)).$$

2. Fall: $|x'+\theta(x-x')-\overset{i}{u}(\eta)| \ge \varepsilon_B/2$ für $\theta \in [0,1]$, $\eta \in \mathrm{Tr}\, B_i$. Dann ist

$$(4.65)\quad \int_\Delta |K_{lm}(x,\overset{i}{u}(\eta))-K_{lm}(x',\overset{i}{u}(\eta))|^r \cdot B_i(\eta)\, d\eta,$$

$$\int_\Delta |K_{lm}(\overset{i}{u}(\eta),x)-K_{lm}(\overset{i}{u}(\eta),x')|^r \cdot B_i(\eta)\, d\eta$$

$$\le Q_2^r \cdot |x-x'|^r \cdot (\varepsilon_B/2)^{-2r} \cdot \int_\Delta B_i(\eta)\, d\eta \qquad (\text{mit } (4.3))$$

$$\le Q_{4,8}(r) \cdot |x-x'|^r$$

$$(\text{mit } Q_{4,8}(r) := Q_2^r \cdot (\varepsilon_B/2)^{-2r} \cdot K_B \cdot \mathrm{Vol}(\Delta))$$

$$\le Q_{4,8}(r) \cdot (\mathrm{diam}\ \Omega)^{2r-2} \cdot |x-x'|^{-r+2}.$$

3. Fall: $|x-x'| \ge \varepsilon_B/2$. Dann ist

$$(4.65')\quad \int_\Delta |K_{lm}(x,\overset{i}{u}(\eta))-K_{lm}(x',\overset{i}{u}(\eta))|^r \cdot B_i(\eta)\, d\eta,$$

$$\int_\Delta |K_{lm}(\overset{i}{u}(\eta),x)-K_{lm}(\overset{i}{u}(\eta),x')|^r \cdot B_i(\eta)\, d\eta$$

$$\le 2 \cdot Q_2^r \cdot \sum_{z \in \{x,x'\}} \int_\Delta |z-\overset{i}{u}(\eta)|^{-r} \cdot B_i(\eta)\, d\eta$$

(wegen (4.1), (4.2))

$$= 2 \cdot Q_2^r \cdot \sum_{z \in \{x,x'\}} \int_{\partial\Omega} |z-y|^{-r} \cdot \overset{i}{\omega}(y)\, d\Omega(y)$$

(siehe (2.18) und die Definition von B_i vor Lemma 2.1)

$$\le Q_{4,9}(r) \qquad (\text{mit } Q_{4,9}(r) := 2 \cdot Q_2^r \cdot 2 \cdot Q_1(-r);\ \text{wegen Lemma 4.1})$$

$$\le Q_{4,9}(r) \cdot (\varepsilon_B/2)^{r-2} \cdot |x-x'|^{-r+2}$$

(nach Voraussetzung im 3. Fall).

Man setze nun

$$Q_4(r) := k_\Omega \cdot \max\Big\{Q_{4,6}(r), Q_{4,7}(r), Q_{4,8}(r) \cdot (\mathrm{diam}\ \Omega)^{2r-2},\ Q_{4,9}(r) \cdot (\varepsilon_B/2)^{r-2}\Big\}.$$

Dann folgt die Behauptung des Lemmas aus (4.63)-(4.65') und (2.19). □

Lemma 4.7: Sei $p \in (2,\infty)$. Dann gibt es $Q_5(p) > 0$, so daß für $\vec{\psi} \in \mathcal{L}_p(\partial\Omega)^3$, $1 \le i \le 3$, $x \in \partial\Omega$ gilt:

$$\int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^{3} |K_{ij}(x,y)| \cdot |\psi_j(y)|\, d\Omega(y) \le Q_5(p) \cdot \|\vec{\psi}\|_p;$$

$$\int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^{3} |K_{ij}(y,x)| \cdot |\psi_j(y)|\, d\Omega(y) \le Q_5(p) \cdot \|\vec{\psi}\|_p.$$

Beweis: Sei $\vec{\psi} \in \mathcal{L}_p(\partial\Omega)^3$, $x \in \partial\Omega$, $i \in \{1,2,3\}$. Dann gilt:

$$\int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^{3} |K_{ij}(x,y)| \cdot |\psi_j(y)|\, d\Omega(y)$$

$$\le \sum_{j=1}^{3} \int_{\partial\Omega} Q_2 \cdot |x-y|^{-1} \cdot |\psi_j(y)|\, d\Omega(y) \qquad (\text{siehe } (4.2))$$

$$\leq Q_2 \cdot \Big(\int_{\partial\Omega} |x-y|^{-(1-1/p)^{-1}}\, d\Omega(y)\Big)^{1-1/p} \cdot \sum_{j=1}^{3} \|\psi_j\|_p$$

$$\leq Q_5(p) \cdot \|\vec{\psi}\|_p$$

(mit $Q_5(p) := Q_2 \cdot Q_1(-(1-1/p)^{-1})^{1-1/p} \cdot 3$;

nach Lemma 4.1; beachte: $-(1-1/p)^{-1} > -2$).

Die zweite Ungleichung des Lemmas zeigt man analog. □

Aufgrund von Lemma 4.7 können wir folgende Definition treffen:

<u>Definition 4.2:</u> <u>Zu</u> $p \in (2,\infty)$, $\vec{\psi} \in L_p(\partial\Omega)^3$, $x \in \partial\Omega$ <u>sei</u>

$$\vec{T}(\vec{\psi})(x) := \Big(-2 \cdot \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^{3} K_{ij}(x,y) \cdot \psi_j(y)\, d\Omega(y)\Big)_{1 \leq i \leq 3}$$

$$\vec{T}^*(\vec{\psi})(x) := \Big(-2 \cdot \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^{3} K_{ij}(y,x) \cdot \psi_j(y)\, d\Omega(y)\Big)_{1 \leq i \leq 3}.$$

<u>Satz 4.1:</u> <u>Sei</u> $\vec{\psi} \in C^0(\partial\Omega)^3$. <u>Definiere die Funktion</u> $\vec{W}(.,\psi)_i : \bar{\Omega} \to \mathbb{C}^3$ <u>durch</u>

$$\vec{W}(x,\vec{\psi})_i := \begin{cases} \vec{W}(x,\vec{\psi}), & \text{falls } x \in \Omega \\ (1/2) \cdot (\vec{\psi}(x) - \vec{T}(\vec{\psi})(x)), & \text{falls } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

<u>Ferner sei die Funktion</u> $\vec{W}(x,\vec{\psi})_a : \mathbb{R}^3 \setminus \Omega \to \mathbb{C}^3$ <u>erklärt durch</u>

$$\vec{W}(x,\vec{\psi})_a := \begin{cases} \vec{W}(x,\vec{\psi}), & \text{falls } x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega} \\ (1/2) \cdot (-\vec{\psi}(x) - \vec{T}(\vec{\psi})(x)), & \text{falls } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

<u>Dann ist</u> $W(.,\psi)_i \in C^0(\bar{\Omega})^3$ <u>und</u> $W(.,\psi)_a \in C^0(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega)^3$.

<u>Beweis:</u> Es ist klar: $\vec{W}(.,\vec{\psi})|_\Omega \in C^0(\Omega)^3$, $\vec{W}(.,\vec{\psi})|_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}} \in C^0(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega})^3$ (siehe Lemma 4.2, I)).

Wir zeigen, daß für $x \in \partial\Omega$ gilt:

(4.66) $\vec{W}(y,\vec{\psi}) \to (1/2) \cdot (\vec{\psi}(x) - \vec{T}(\vec{\psi})(x))$ für $y \to x$, $y \in \Omega$,

(4.67) $\vec{W}(y,\vec{\psi}) \to (1/2) \cdot (-\vec{\psi}(x) - \vec{T}(\vec{\psi})(x))$ für $y \to x$, $y \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$,

und daß die Konvergenz in (4.66) und (4.67) gleichmäßig in $x \in \partial\Omega$ ist. Hieraus folgt die Behauptung des Lemmas.

Zum Beweis von (4.66), (4.67) stellen wir zunächst fest, für $z \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega$, $x \in \partial\Omega$, $1 \leq i \leq 3$:

$$W_i(z,\vec{\psi}) + (1/2) \cdot T(\vec{\psi})_i(x)$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \int_{\partial\Omega} (K_{ij}(z,y) - K_{ij}(x,y)) \cdot \psi_j(y)\, d\Omega(y) \quad \text{(siehe Lemma 4.2,III))}$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \int_{\partial\Omega} (K_{ij}(z,y) - K_{ij}(x,y)) \cdot (\psi_j(y) - \psi_j(x))\, d\Omega(y)$$

$$+ \sum_{j=1}^{3} \psi_j(x) \cdot \int_{\partial\Omega} (K_{ij}(z,y) - K_{ij}(x,y))\, d\Omega(y)$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \int_{\partial\Omega} (K_{ij}(z,y) - K_{ij}(x,y)) \cdot (\psi_j(y) - \psi_j(x))\, d\Omega(y) + \begin{cases} (1/2)\psi_i(x), & \text{falls } z \in \Omega \\ (-1/2)\psi_i(x), & \text{falls } z \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega} \end{cases}$$

(nach Lemma 4.4).

Der Beweis von (4.66), (4.67) ist also geführt, wenn man für $1 \leq i,j \leq 3$ zeigen kann:

$$(4.68)\quad \int_{\partial\Omega} (K_{ij}(z,y)-K_{ij}(x,y))\cdot(\psi_j(y)-\psi_j(x))\, d\Omega(y) \to 0$$

für $z \to x$, $z \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega$, gleichmäßig in $x \in \partial\Omega$.

Seien also $i,j \in \{1,2,3\}$ festgehalten und sei $\varepsilon \in (0,\infty)$. Es gibt $\delta_1 > 0$, so daß für $y',y'' \in \partial\Omega$ mit $|y-y'| < \delta_1$ gilt:

$$(4.69)\quad |\phi_j(y)-\phi_j(y')| < \varepsilon/(4\cdot Q_3), \text{ mit } Q_3 \text{ aus Lemma 4.5.}$$

Sei $R > 0$ so groß, daß $\overline{\Omega} \subset K_R(0)$. Die Abbildung

$$\{(\tilde{z},\tilde{x},\tilde{y}) \ni \overline{K_R(0)}\times\partial\Omega\times\partial\Omega : |\tilde{z}-\tilde{y}| \geq \delta_1/2 \leq |\tilde{x}-\tilde{y}|\} \ni (z,x,y)$$

$$\to K_{ij}(z,y)\cdot(\phi_j(y)-\phi_j(x)) \in \mathbb{R}$$

ist stetig, also gleichmäßig stetig. Somit gibt es $\delta_2 > 0$, so daß für $z \in \overline{K_R(0)}$, $x,y \in \partial\Omega$ mit $|z-y| \geq \delta_1/2 \leq |x-y|$ und mit $|x-z| < \delta_2$ gilt:

$$(4.70)\quad |K_{ij}(z,y)\cdot(\phi_j(y)-\phi_j(x)) - K_{ij}(x,y)\cdot(\phi_j(y)-\phi_j(x))|$$

$$< \varepsilon/(2\cdot \mathrm{Vol}(\partial\Omega)).$$

Jetzt ergibt sich für $z \in \overline{K_R(0)}\setminus\partial\Omega$, $x \in \partial\Omega$ mit $|x-z| < \min\{\delta_1/2, \delta_2\}$:

$$\left|\int_{\partial\Omega} (K_{ij}(z,y)-K_{ij}(x,y))\cdot(\phi_j(y)-\phi_j(x))\, d\Omega(y)\right|$$

$$\leq \int_{\substack{\partial\Omega\\ |y-x|<\delta_1}} |K_{ij}(z,y)-K_{ij}(x,y)|\cdot|\phi_j(y)-\phi_j(x)|\, d\Omega(y)$$

$$+ \int_{\substack{\partial\Omega\\ |y-x|\geq\delta_1}} |K_{ij}(z,y)-K_{ij}(x,y)|\cdot|\phi_j(y)-\phi_j(x)|\, d\Omega(y)$$

$$\leq \varepsilon/(4\cdot Q_3)\cdot \int_{\substack{\partial\Omega\\ |x-y|<\delta_1}} |K_{ij}(z,y)-K_{ij}(x,y)|\, d\Omega(y)$$

$$+ \varepsilon/(2\cdot\mathrm{Vol}(\partial\Omega))\cdot\int_{\substack{\partial\Omega\\ |x-y|\geq\delta_1}} d\Omega(y)$$

(Wegen (4.69) und (4.70); beachte bei der Abschätzung des zweiten Integrals, daß für $y \in \partial\Omega$ mit $|x-y| \geq \delta_1$ gilt:
$|z-y| \geq |x-y|-|z-x| \geq \delta_1-\delta_1/2 = \delta_1/2$).

$$\leq \varepsilon/(4\cdot Q_3)\cdot\int_{\partial\Omega} (|K_{ij}(z,y)|+|K_{ij}(x,y)|)\, d\Omega(y) + \varepsilon/2$$

$\leq \varepsilon$ (wegen Lemma 4.5).

Weil $\overline{\Omega} \subset K_R(0)$, ist damit (4.68) gezeigt. □

<u>Lemma 4.8:</u> <u>Sei</u> $\vec{\psi} \in C^0(\partial\Omega)^3$, $j \in \{1,2,3\}$. <u>Dann gilt für</u> $x \in \partial\Omega$:

$$(4.71)\quad \sum_{k=1}^{3} T_{jk}(\vec{V}(.,\vec{\psi})|\mathbb{R}^3\setminus\partial\Omega, Q(.,\vec{\psi}))(x-\kappa\cdot n(x))\cdot n_k(x)$$

$$\to (1/2)\cdot(\psi_j(x)+T^*(\vec{\psi})_j(x)) \text{ für } \kappa \downarrow 0;$$

$$(4.72)\quad \sum_{k=1}^{3} T_{jk}(\vec{V}(.,\vec{\psi})|\mathbb{R}^3\setminus\partial\Omega, Q(.,\vec{\psi}))(x+\kappa\cdot n(x))\cdot n_k(x)$$

$$\to (1/2)\cdot(-\psi_j(x)+T^*(\vec{\psi})_j(x)) \text{ für } \kappa \downarrow 0.$$

Die Konvergenz in (4.71) und (4.72) ist gleichmäßig in $x \in \partial\Omega$.

<u>Bemerkung:</u> Für $\kappa \in (0,\varepsilon_\Omega]$, $x \in \partial\Omega$ ist $x-\kappa\cdot n(x) \in \Omega$, $x+\kappa\cdot n(x) \in \mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}$; siehe (2.24).

<u>Beweis:</u> Sei $F: \partial\Omega\times\partial\Omega\times[-\varepsilon_B,\varepsilon_B] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(x,y,\varepsilon) := \begin{cases} 0, \text{ falls } x=y \\ -3/(4\pi)\cdot \sum_{k,l=1}^{3} (x+\varepsilon\cdot n(x)-y)_j\cdot(x+\varepsilon\cdot n(x)-y)_k \\ \cdot(x+\varepsilon\cdot n(x)-y)_l\cdot|x+\varepsilon\cdot n(x)-y|^{-5}\cdot(n_k(x)-n_k(y))\cdot\psi_l(y), \\ \text{falls } x \neq y. \end{cases}$$

Ferner sei $H: \partial\Omega\times[-\varepsilon_B,\varepsilon_B] \to \mathbb{R}$ erklärt durch

$$H(x,\varepsilon) := \int_{\partial\Omega} F(x,y,\varepsilon)\, d\Omega(y).$$

Für $x,y \in \partial\Omega$ mit $x \neq y$, $\varepsilon \in [-\varepsilon_B,\varepsilon_B]$ gilt:

$$(4.73) \quad |F(x,y,\varepsilon)| \le 27/(4\pi)\cdot|x+\varepsilon\cdot n(x)-y|^{-2}\cdot|n(x)-n(y)|\cdot|\vec\psi|_0$$

$$\le 27/(4\pi)\cdot K_B\cdot|x+\varepsilon\cdot n(x)-y|^{-2}\cdot|x-y|\cdot|\vec\psi|_0 \quad \text{(wegen (2.23))}$$

$$\le K\cdot|x-y|^{-1}$$

$$\text{(mit } K := 27/(4\pi)\cdot K_B\cdot\varepsilon_B^{-2}\cdot|\vec\psi|_0\text{; wegen (2.25)).}$$

Mit Lemma 4.1 folgt insbesondere, daß $H(x,\varepsilon)$ auch im Fall $\varepsilon=0$ wohldefiniert ist. Man findet nun für $x \in \partial\Omega$, $\varepsilon \in [-\varepsilon_B,\varepsilon_B]\setminus\{0\}$:

$$(4.74) \quad \sum_{k=1}^{3} T_{jk}(\vec V(.,\vec\psi)|\mathbb{R}^3\setminus\partial\Omega, Q(.,\vec\psi))(x+\varepsilon\cdot n(x))\cdot n_k(x)$$

$$= \int_{\partial\Omega} -3/(4\pi)\cdot\sum_{k,l=1}^{3}(x+\varepsilon\cdot n(x)-y)_j\ (x+\varepsilon\cdot n(x)-y)_k$$

$$\cdot(x+\varepsilon\cdot n(x)-y)_l\cdot|x+\varepsilon\cdot n(x)-y|^{-5}\cdot\psi_l(y)\cdot n_k(x)\ d\Omega(y)$$

(siehe Lemma 4.2, III))

$$= H(x,\varepsilon) + W_j(x+\varepsilon\cdot n(x),\vec\psi) \quad \text{(siehe Lemma 4.2, III)).}$$

Man zeigt nun, daß H stetig, also gleichmäßig stetig ist. Aus (4.74) und Satz 4.1 folgt dann: Die linke Seite in (4.71) und (4.72) konvergiert für $\kappa\downarrow 0$, gleichmäßig in $x \in \partial\Omega$, mit Grenzwert

$$H(x,0) + (1/2)\cdot(\psi_j(x)-T(\vec\psi)_j(x)) \quad \text{im Fall von (4.71),}$$

bzw.

$$H(x,0) + (1/2)\cdot(-\psi_j(x)-T(\vec\psi)_j(x)) \quad \text{im Fall von (4.72)} \quad (x \in \partial\Omega).$$

Eine ähnliche Rechnung wie in (4.74) liefert aber:

$$H(x,0) - (1/2)\cdot T(\vec\psi)_j(x) = (1/2)\cdot T^*(\vec\psi)_j(x) \quad (x \in \partial\Omega).$$

Zusammen ergibt sich (4.71) und (4.72).

Zu zeigen bleibt damit die Stetigkeit von H. Wir geben dazu $\gamma > 0$ vor. Sei dann

$$\delta_1 := \gamma^2\cdot(3\cdot K\cdot Q_1(-3/2))^{-2}, \text{ mit } Q_1(-3/2) \text{ aus Lemma 4.1.}$$

Dann ist für $x \in \partial\Omega$, $\varepsilon \in [-\varepsilon_B, \varepsilon_B]$:

$$(4.75)\quad \int_{\substack{\partial\Omega \\ |x-y|\le\delta_1}} |F(x,y,\varepsilon)|\, d\Omega(y) \le$$

$$\le K\cdot \int_{\substack{\partial\Omega \\ |x-y|\le\delta_1}} |x-y|^{-1}\, d\Omega(y) \quad \text{(siehe (4.73))}$$

$$\le K\cdot \delta_1^{1/2}\cdot \int_{\substack{\partial\Omega \\ |x-y|\le\delta_1}} |x-y|^{-3/2}\, d\Omega(y)$$

$$\le K\cdot \delta_1^{1/2}\cdot Q_1(-3/2) \quad \text{(nach Lemma 4.1)}$$

$$= \gamma/3.$$

Für $x,y \in \partial\Omega$ mit $|x-y| \ge \delta_1/4$ und für $\varepsilon \in [-\varepsilon_B, \varepsilon_B]$ ist wegen (2.25):

$$|x+\varepsilon\cdot n(x)-y| \ge \varepsilon_B^{-1}\cdot|x-y| \ge \varepsilon_B^{-1}\cdot\delta_1/4 > 0.$$

Somit ist die Abbildung

$$F|\{(x,y,\varepsilon) \in \partial\Omega\times\partial\Omega\times[-\varepsilon_B,\varepsilon_B]:\ |x-y| \ge \delta_1/4\}$$

gleichmäßig stetig. Es existiert also $\delta_2 \in (0,\infty)$, so daß

$$(4.76)\quad |F(x,y,\varepsilon)-F(z,y,\sigma)| < \gamma/(3\cdot \mathrm{Vol}(\partial\Omega))$$

für $x,z,y \in \partial\Omega$ mit $|x-y| \ge \delta_1/4 \le |z-y|$, $|x-z| \le \delta_2$, sowie für $\varepsilon,\sigma \in [-\varepsilon_\Omega, \varepsilon_\Omega]$ mit $|\varepsilon-\sigma| \le \delta_2$.

Jetzt ergibt sich für $z,x \in \partial\Omega$, $\varepsilon,\sigma \in [-\varepsilon_B, \varepsilon_B]$ mit $|x-z| \le \delta_2 \wedge \delta_1/4$, $|\varepsilon-\sigma| \le \delta_2$:

$$|H(x,\varepsilon)-H(z,\sigma)|$$

$$\le \Big(\int_{\substack{\partial\Omega \\ |x-y|\le\delta_1/2}} + \int_{\substack{\partial\Omega \\ |x-y|\ge\delta_1/2}}\Big) |F(x,y,\varepsilon)-F(z,y,\sigma)|\, d\Omega(y)$$

$$\le \int_{\substack{\partial\Omega \\ |x-y|\le\delta_1/2}} |F(x,y,\varepsilon)|\, d\Omega(y) + \int_{\substack{\partial\Omega \\ |z-y|\le\delta_1}} |F(z,y,\sigma)|\, d\Omega(y)$$

$$+ \int_{\substack{\partial\Omega \\ |x-y|\ge\delta_1/2}} |F(x,y,\varepsilon)-F(z,y,\sigma)|\, d\Omega(y)$$

$$\le 2\cdot\gamma/3 + \int_{\substack{\partial\Omega \\ |x-y|\ge\delta_1/2}} \gamma/(3\cdot\mathrm{Vol}(\partial\Omega))\, d\Omega(y)$$

(wegen (4.75) und (4.76); beachte, daß für $y \in \partial\Omega$ mit $|x-y| \ge \delta_1/2$ gilt:

$$|z-y| \ge |x-y|-|z-x| \ge \delta_1/2-\delta_1/4 = \delta_1/4)$$

$$\le \gamma.$$

□

§ 5. Ein kompakter Operator auf $L_p(\partial\Omega)^3$

<u>Lemma 5.1: Sei</u> $q \in (1,\infty)$ <u>und</u> $\lambda \in (1,2)$ <u>mit</u> $1/q+\lambda/2-1 > 0$. <u>Setze</u> $\tilde{q} := (1/q+\lambda/2-1)^{-1}$. <u>Dann gibt es eine Konstante</u> $M_1(\lambda,q) > 0$, <u>so daß für</u> $i,j \in \{1,2,3\}$ <u>und für</u> $f \in L_q(\partial\Omega)$ <u>gilt:</u>

(5.1) $$\left(\int_{\partial\Omega}\left(\int_{\partial\Omega}|K_{ij}(x,y)|\cdot|f(y)|\;d\Omega(y)\right)^{\tilde{q}}d\Omega(x)\right)^{1/\tilde{q}} \le M_1(\lambda,q)\cdot\|f\|_q;$$

(5.2) $$\left(\int_{\partial\Omega}\left(\int_{\partial\Omega}|K_{ij}(y,x)|\cdot|f(y)|\;d\Omega(y)\right)^{\tilde{q}}d\Omega(x)\right)^{1/\tilde{q}} \le M_1(\lambda,q)\cdot\|f\|_q.$$

<u>Das bedeutet insbesondere, daß für</u> $i,j \in \{1,2,3\}$, $f \in L_q(\partial\Omega)$ <u>und für fast alle</u> $x \in \partial\Omega$ <u>die Integrale</u>

$$\int_{\partial\Omega} K_{ij}(x,y)\, f(y)\; d\Omega(y),\ \int_{\partial\Omega} K_{ij}(y,x)\, f(y)\; d\Omega(y)$$

<u>existieren</u>.

<u>Beweis:</u> Es ist $2/(2-\lambda) > q$, wie aus der Bedingung $1/q+\lambda/2-1 > 0$ folgt. Damit ergibt sich aus der Hardy-Littlewood-Sobolev-Ungleichung (siehe Satz 1.1), für $h \in L_q(\mathbb{R}^2)$:

(5.3) $$\|G_{2,-\lambda}*h\|_{\tilde{q}} \le P_1(2,\lambda,q)\cdot\|h\|_q,$$

wobei $G_{2,-\lambda}$ in Satz 1.1 definiert wurde.

Sei nun $i,j \in \{1,2,3\}$, $f \in L_q(\partial\Omega)$. Sei $s \in \{1,\dots,k_\Omega\}$ und $f_{(s)}$ die triviale Fortsetzung von $f\circ\overset{s}{u}$ auf $\mathbb{R}^2$. Das bedeutet: $f_{(s)} \in L_q(\mathbb{R}^2)$,

(5.4) $$\|f_{(s)}\|_q = \left(\int_\Delta |f\circ\overset{i}{u}(\eta)|^q\; d\eta\right)^{1/q} \le \|f\|_q.$$

Beachte die in § 2 eingeführten Abkürzungen: Auf der linken Seite von (5.4) ist $\|\ \|_q \equiv \|\ \|_{q,\mathbb{R}^2}$ gemeint, auf der rechten: $\|\ \|_q \equiv \|\ \|_{q,B}$.

Es ergibt sich nun:

(5.5) $$\int_\Delta B_s(\sigma)\cdot\left(\int_{\Lambda_s}|K_{ij}(\overset{s}{u}(\sigma),y)|\cdot|f(y)|\; d\Omega(y)\right)^{\tilde{q}} d\sigma$$

$$= \int_\Delta\left(\int_\Delta|K_{ij}(\overset{s}{u}(\sigma),\overset{s}{u}(\eta))|\cdot|f\circ\overset{s}{u}(\eta)|\cdot J_s(\eta)\; d\eta\right)^{\tilde{q}}\cdot B_s(\sigma)\; d\sigma$$

(wegen (2.18))

$$\le M_{1,1}(\lambda,q)\cdot\int_\Delta\left(\int_\Delta|K_{ij}(\overset{s}{u}(\sigma),\overset{s}{u}(\xi))|\cdot|f\circ\overset{s}{u}(\xi)|\; d\xi\right)^{\tilde{q}} d\sigma$$

(mit $M_{1,1}(\lambda,q) := K_B^{1+\tilde{q}}$; wegen (2.20))

$$\le M_{1,2}(\lambda,q)\cdot\int_\Delta\left(\int_\Delta|\overset{s}{u}(\sigma)-\overset{s}{u}(\xi)|^{-1}\cdot|f\circ\overset{s}{u}(\xi)|\; d\xi\right)^{\tilde{q}} d\sigma$$

(mit $M_{1,2}(\lambda,q) := M_{1,1}(\lambda,q)\cdot Q_2^{\tilde{q}}$; wegen (4.2))

$$\le M_{1,2}(\lambda,q)\cdot\int_\Delta\left(\int_\Delta|\sigma-\xi|^{-1}\cdot|f\circ\overset{s}{u}(\xi)|\; d\xi\right)^{\tilde{q}} d\sigma$$

(siehe (2.16))

$$\le M_{1,3}(\lambda,q)\cdot\int_\Delta\left(\int_\Delta|\sigma-\xi|^{-\lambda}\cdot|f\circ\overset{s}{u}(\xi)|\; d\xi\right)^{\tilde{q}} d\sigma$$

(mit $M_{1,3}(\lambda,q) := M_{1,2}(\lambda,q)\cdot(\mathrm{diam}\ \Delta)^{(\lambda-1)\tilde{q}}$)

$$\le M_{1,3}(\lambda,q)\cdot\int_{\mathbb{R}^2}\left(\int_{\mathbb{R}^2}|\sigma-\xi|^{-\lambda}\cdot f_{(s)}(\xi)\; d\xi\right)^{\tilde{q}} d\sigma$$

$$\le M_{1,3}(\lambda,q)\cdot P_1(2,\lambda,q)^{\tilde q}\cdot\|f_{(s)}\|_q^{\tilde q} \quad \text{(siehe (5.3))}$$

$$\le M_{1,4}(\lambda,q)\cdot\|f\|_q^{\tilde q}$$

(mit $M_{1,4}(\lambda,q) := M_{1,3}(\lambda,q)\cdot P_1(2,\lambda,q)^{\tilde q}$; wegen (5.4)).

Sei $\sigma \in \mathrm{Tr}\, B_s$, $y \in \partial\Omega\setminus\Lambda_s$. Dann ist $\sigma\in\Delta^{1/4}$ (siehe (2.14)), also $\overset{s}{u}(\sigma)\in\Lambda_s^{1/4}$. Dies bedeutet:

$$|\overset{s}{u}(\sigma)-y| \ge \min\{\mathrm{dist}(\Lambda_t^{1/4},\partial\Omega/\Lambda_t):\ 1\le t\le k_\Omega\} =: \delta_{1/4,1},$$

wobei $\delta_{1/4,1}>0$ gemäß (2.12). Es folgt mit (4.2):

$$|K_{ij}(\overset{s}{u}(\sigma),y)| \le Q_2\cdot|\overset{s}{u}(\sigma)-y|^{-1} \le Q_2\cdot\delta_{1/4,1}^{-1}.$$

Dies führt zu folgender Abschätzung:

$$\text{(5.6)}\quad \int_\Delta B_s(\sigma)\cdot\Big(\int_{\partial\Omega\setminus\Lambda_s}|K_{ij}(\overset{s}{u}(\sigma),y)|\cdot|f(y)|\,d\Omega(y)\Big)^{\tilde q}\,d\sigma$$

$$\le (Q_2\cdot\delta_{1/4,1}^{-1})^{\tilde q}\cdot\int_\Delta B_s(\sigma)\cdot\Big(\int_{\partial\Omega\setminus\Lambda_s}|f(y)|\,d\Omega(y)\Big)^{\tilde q}\,d\sigma$$

$$\le M_{1,5}(\lambda,q)\cdot\Big(\int_{\partial\Omega}|f(y)|\,d\Omega(y)\Big)^{\tilde q}$$

(mit $M_{1,5}(\lambda,q) := (Q_2\cdot\delta_{1/4,1}^{-1})^{\tilde q}\cdot K_B\cdot\mathrm{Vol}(\Delta)$)

$$\le M_{1,5}(\lambda,q)\cdot\Big(\int_{\partial\Omega}d\Omega\Big)^{(1-1/q)\tilde q}\cdot\Big(\int_{\partial\Omega}|f|^q\,d\Omega\Big)^{\tilde q/q}$$

$$\le M_{1,6}(\lambda,q)\cdot\|f\|_q^{\tilde q}$$

(mit $M_{1,6}(\lambda,q) := M_{1,5}(\lambda,q)\cdot\big(\int_{\partial\Omega}d\Omega\big)^{(1-1/q)/\tilde q}\cdot Q_B^{\tilde q}$;
mit Lemma 2.3).

Aus (5.5) und (5.6) folgt:

$$\int_\Delta B_s(\sigma)\cdot\Big(\int_{\partial\Omega}|K_{ij}(\overset{s}{u}(\sigma),y)|\cdot|f(y)|\,d\Omega(y)\Big)^{\tilde q}\,d\sigma$$

$$\le M_{1,7}(\lambda,q)\cdot\|f\|_q^{\tilde q}$$

(mit $M_{1,7}(\lambda,q) \le 2^{\tilde q-1}\cdot(M_{1,4}(\lambda,q)+M_{1,6}(\lambda,q))$; beachte (4.1)).

Hierbei war s beliebig aus $\{1,\dots,k_\Omega\}$. Mit (2.19) ergibt sich nun:

$$\Big(\int_{\partial\Omega}\Big(\int_{\partial\Omega}|K_{ij}(x,y)|\cdot|f(y)|\,d\Omega(y)\Big)^{\tilde q}\,dx\Big)^{1/\tilde q}$$

$$\le M_1(\lambda,q)\cdot\|f\|_q$$

(mit $M_1(\lambda,q) := (k_\Omega\cdot M_{1,7}(\lambda,q))^{1/\tilde q}$.

Damit ist Abschätzung (5.1) gezeigt. Zum Beweis von (5.2) genügt es, in den vorangehenden Abschätzungen die Argumente von K_{ij} zu vertauschen.

Aus der Hölderungleichung und aus (5.1) ergibt sich

$$\int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} |K_{ij}(x,y)|\cdot|f(y)|\;d\Omega(y)\;d\Omega(x)$$

$$\le \Big(\int_{\partial\Omega} d\Omega\Big)^{1-1/\tilde q}\cdot M_1(\lambda,q)\cdot\|f\|_q < \infty .$$

Eine entsprechende Folgerung kann man aus (5.2) ziehen. Der letzte Teil des Lemmas folgt nun aus dem Satz von Fubini. □

In Definition 4.2 hatten wir $\vec T(\vec\psi)$, $\vec T^*(\vec\psi)$ für $\vec\psi \in L_p(\partial\Omega)^3$, unter der Voraussetzung $p \in (2,\infty)$, definiert. Weil für $p \in (1,2]$ gilt: $1/p + (3/2)/2 - 1 > 0$, können wir Lemma 5.1 heranziehen, um $\vec T(\vec\psi)$, $\vec T^*(\vec\psi)$ auch im Fall $p \in (1,2]$ einzuführen:

<u>Definition 5.1:</u> <u>Sei</u> $p \in (1,2]$, $\vec\psi \in L_p(\partial\Omega)^3$. <u>Dann seien</u> $\vec T(\vec\psi)$, $\vec T^*(\vec\psi): \partial\Omega \to \mathbb{C}^3$ <u>definiert durch</u>

$$\vec T(\vec\psi)(x) := \Big(-2\cdot\int_{\partial\Omega}\sum_{j=1}^{3} K_{ij}(x,y)\cdot\psi_j(y)\;d\Omega(y)\Big)_{1\le i\le 3},$$

<u>bzw.</u>

$$\vec T^*(\vec\psi)(x) := \Big(-2\cdot\int_{\partial\Omega}\sum_{j=1}^{3} K_{ij}(y,x)\cdot\psi_j(y)\;d\Omega(y)\Big)_{1\le i\le 3},$$

<u>falls das auf der rechten Seite der jeweiligen Definition erscheinende Integral existiert,</u> <u>und</u> $\vec T(\vec\psi)(x) := 0$ <u>bzw.</u> $\vec T^*(\vec\psi)(x) := 0$ <u>sonst</u> (<u>Nach Lemma</u> 5.1 <u>tritt der zweite Fall nur für</u> x <u>aus einer Nullmenge in</u> $\partial\Omega$ <u>auf</u>).

<u>Lemma 5.2:</u> <u>Für</u> $q \in (1,\infty)$, $\lambda \in (1,2)$ <u>mit</u> $1/q + \lambda/2 - 1 > 0$ <u>gibt es</u> $M_2(\lambda,q) > 0$, <u>so daß für</u> $\vec\psi \in L_q(\partial\Omega)^3$ <u>gilt,</u> <u>mit</u> $\tilde q := (1/q+\lambda/2-1)^{-1}$:

$$(5.7)\qquad \|\vec T(\vec\psi)\|_{\tilde q} \le M_2(\lambda,q)\cdot\|\vec\psi\|_q ;$$

$$\|\vec T^*(\vec\psi)\|_{\tilde q} \le M_2(\lambda,q)\cdot\|\vec\psi\|_q .$$

<u>Sei</u> $r \in (1,2]$. <u>Dann gibt es</u> $M_3(r) > 0$, <u>so daß</u>

$$\|\vec T(\vec\psi)\|_r, \|\vec T^*(\vec\psi)\|_r \le M_3(r)\cdot\|\vec\psi\|_r$$

<u>für</u> $\vec\psi \in L_r(\partial\Omega)^3$.

<u>Insbesondere gilt:</u> $\vec T(\vec\psi), \vec T^*(\vec\psi) \in L_r(\partial\Omega)^3$ <u>für</u> $\vec\psi \in L_r(\partial\Omega)^3$.

<u>Beweis:</u> Zu $q \in (1,\infty)$, $\lambda \in (1,2)$ mit $1/q + \lambda/2 - 1 > 0$ setze man

$$M_2(\lambda,q) := 27\cdot\Omega_B\cdot M_1(\lambda,q).$$

Dann folgt (5.7) aus (4.1), Lemma 2.3, 5.1.

Den zweiten Teil des Lemmas kann man aus (5.7) ableiten:

Wegen $r \le 2$ ist $1/r+3/4-1 > 0$. Man setze

$$\tilde r := (1/r+3/4-1)^{-1} = (1/r-1/4)^{-1}.$$

Dann ist $\tilde r > r > 1$. Es ergibt sich für $\vec\psi \in L_r(\partial\Omega)^3$:

$$\|\vec T(\vec\psi)\|_r = \Big(\sum_{j=1}^{3}\|T(\vec\psi)_j\|_r^2\Big)^{1/2}$$

$$\le 3\cdot\sum_{j=1}^{3}\|T(\vec\psi)_j\|_r \qquad \text{(siehe (4.1))}$$

$$\leq 3\cdot\sum_{j=1}^{3}\Big(\int_{\partial\Omega} d\Omega\Big)^{1/r-1/\tilde{r}}\cdot\|T(\vec{\psi})_j\|_{\tilde{r}} \qquad (\text{da } r<\tilde{r})$$

$$\leq 9\cdot\Big(\int_{\partial\Omega} d\Omega\Big)^{1/r-1/\tilde{r}}\cdot\|\vec{T}(\vec{\psi})\|_{\tilde{r}}$$

$$\leq M_3(r)\cdot\|\vec{\psi}\|_r$$

(mit $M_3(r) := \Big(\int_{\partial\Omega} d\Omega\Big)^{1/r-1/\tilde{r}}\cdot 9\cdot M_2(3/2,r)$;

wegen (5.7), mit $\lambda = 3/2$, $q = r$).

Ebenso folgt für $\vec{\psi}\in L_r(\partial\Omega)^3$:

$$\|\vec{T}^*(\vec{\psi})\|_r \leq M_3(r)\cdot\|\vec{\psi}\|_r. \qquad \square$$

Lemma 5.3: Sei $p\in(2,\infty)$. Dann gibt es $M_4(p)>0$, so daß

(5.8) $|\vec{T}(\vec{\psi})|_{(2-q)/q},|\vec{T}^*(\vec{\psi})|_{(2-q)/q} \leq M_4(p)\cdot\|\vec{\psi}\|_p$

für $\vec{\psi}\in L_p(\partial\Omega)^3$, wobei $q := (1-1/p)^{-1}$ gesetzt wurde. Dies bedeutet insbesondere:

$$\vec{T}(\vec{\psi}),\vec{T}^*(\vec{\psi}) \in L_p(\partial\Omega)^3 \text{ für } \vec{\psi}\in L_p(\partial\Omega)^3.$$

Für $\vec{\psi}\in L_p(\partial\Omega)^3$, $\vec{\phi}\in L_q(\partial\Omega)^3$ gilt:

(5.9) $\int_{\partial\Omega} \langle\vec{T}(\vec{\psi}),\vec{\phi}\rangle\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \langle\vec{\psi},\vec{T}^*(\vec{\phi})\rangle\, d\Omega$;

(5.10) $\int_{\partial\Omega} \langle\vec{T}^*(\vec{\psi}),\vec{\phi}\rangle\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \langle\vec{\psi},\vec{T}(\vec{\phi})\rangle\, d\Omega$.

Beweis: Sei $\vec{\psi}\in L_p(\partial\Omega)^3$. Für $i\in\{1,2,3\}$, $x,x'\in\partial\Omega$ gilt:

(5.11) $|T(\vec{\psi})_i(x)-T(\vec{\psi})_i(x')|$

$$\leq 2\cdot\sum_{j=1}^{3}\int_{\partial\Omega}|K_{ij}(x,y)-K_{ij}(x',y)|\cdot|\psi_j(y)|\, d\Omega(y)$$

$$\leq 2\cdot\sum_{j=1}^{3}\Big(\int_{\partial\Omega}|K_{ij}(x,y)-K_{ij}(x',y)|^q\, d\Omega(y)\Big)^{1/q}\cdot\|\psi_j\|_p$$

$$\leq 2\cdot Q_4(p)^{1/q}\cdot|x-x'|^{(2-q)/q}\cdot\sum_{j=1}^{3}\|\psi_j\|_p \qquad (\text{wegen } (4.55))$$

$$\leq M_{4,1}(p)\cdot\|\vec{\psi}\|_p\cdot|x-x'|^{(2-q)/q} \qquad (\text{mit } M_{4,1}(p) := 6\cdot Q_4(p)^{1/q}).$$

Weiter gilt für $x\in\partial\Omega$, $1\leq i\leq 3$:

(5.12) $|T(\psi)_i(x)| \leq 2\cdot\int_{\partial\Omega}\sum_{j=1}^{3}|K_{ij}(x,y)|\cdot|\psi_j(y)|\, d\Omega(y)$

$$\leq 2\cdot Q_5(p)\cdot\|\vec{\psi}\|_p \qquad (\text{siehe Lemma 4.7}).$$

Aus (5.11) und (5.12) folgt:

$$|\vec{T}(\vec{\psi})|_{(2-q)/q} \leq M_4(p)\cdot\|\vec{\psi}\|_p$$

(mit $M_4(p) := 3\cdot M_{4,1}(p) + 6\cdot Q_5(p)$).

Für $\vec{T}^*(\vec{\psi})$ gelten analoge Abschätzungen, wobei (4.56) anstelle von (4.55) anzuwenden ist.

Es ist für $i,j \in \{1,2,3\}$:

$$\int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} |K_{ij}(x,y)|\cdot|\phi_i(x)|\cdot|\psi_j(y)|\ d\Omega(y)\ d\Omega(x)$$

$$\leq \int_{\partial\Omega} Q_5(p)\cdot\|\psi_j\|_p\cdot|\phi_i(x)|\ d\Omega(x) \quad \text{(siehe Lemma 4.7)}$$

$$\leq Q_5(p)\cdot \mathrm{Vol}(\partial\Omega)^{1-1/q}\cdot\|\psi_j\|_p\cdot\|\phi_i\|_q < \infty.$$

Aufgrund der vorangehenden Abschätzung kann man den Satz von Fubini anwenden. Man erhält:

$$\int_{\partial\Omega}\sum_{i=1}^{3}\left(\int_{\partial\Omega}\sum_{j=1}^{3} K_{ij}(x,y)\cdot\psi_j(y)\ d\Omega(y)\right)\cdot\phi_i(x)\ d\Omega(x)$$

$$= \int_{\partial\Omega}\sum_{j=1}^{3}\left(\int_{\partial\Omega}\sum_{i=1}^{3} K_{ij}(x,y)\cdot\phi_i(x)\ d\Omega(x)\right)\cdot\psi_j(y)\ d\Omega(y).$$

Wegen $K_{ij} = K_{ji}$ $(1 \leq i,j \leq 3)$ folgt hieraus (5.9). Die Gültigkeit von (5.10) zeigt man analog. □

Für $r \in (1,\infty)$, $\vec{\psi} \in \mathcal{L}_r(\partial\Omega)^3$ gilt also wegen Lemma 5.2 und 5.3: $\vec{T}(\vec{\psi}), \vec{T}^*(\vec{\psi}) \in \mathcal{L}_r(\partial\Omega)^3$. Somit kann man folgende Definition vornehmen:

Definition 5.2: Seien $p,q \in (1,\infty)$ mit $1/p+1/q = 1$. Sei T_p: $L_p(\partial\Omega)^3 \to L_p(\partial\Omega)^3$ definiert durch $T_pF := [\vec{T}(\vec{\psi})]$, wobei $F \in L_p(\partial\Omega)^3$, $\vec{\psi} \in F$.

($[\vec{T}(\vec{\psi})]$ bezeichnet die zu $\vec{T}(\vec{\psi})$ gehörende Äquivalenzklasse; siehe die Bezeichnungen, die im Anschluß an Lemma 2.2 eingeführt wurden).

Weiterhin sei T_p^*: $L_q(\partial\Omega)^3 \to L_q(\partial\Omega)^3$ erklärt durch

$$T_p^*G := [\vec{T}^*(\vec{\phi})], \text{ für } G \in L_q(\partial\Omega)^3,\ \vec{\phi} \in G.$$

Aus dieser Definition folgt sofort, daß für $r,r' \in (1,\infty)$ mit $r \leq r'$ und für $F \in L_{r'}(\partial\Omega)^3$ gilt: $T_rF = T_{r'}F$.

Für $p \in (1,\infty)$ läßt sich der duale Raum $(L_p(\partial\Omega)^3)'$ zu $L_p(\partial\Omega)^3$ in Analogie zum dualen Raum von $L_p(\partial\Omega)$ charakterisieren: Zu jedem Funktional $F \in (L_p(\partial\Omega)^3)'$ gibt es genau ein Element U aus $L_q(\partial\Omega)^3$, mit $q := (1-1/p)^{-1}$, so daß

$$F(V) = \int_{\partial\Omega} \langle\vec{u},\vec{v}\rangle\ d\Omega \text{ für } V \in L_p(\partial\Omega)^3,\ \vec{u} \in U,\ \vec{v} \in V.$$

Diese Zuordnung definiert einen normtreuen Isomorphismus von $(L_p(\partial\Omega)^3)'$ auf $L_q(\partial\Omega)^3$, aufgrund dessen zwischen diesen beiden Räumen nicht unterschieden werden muß. Diese Ergebnisse folgen leicht aus den entsprechenden Eigenschaften von $L_p(\partial\Omega)$.

Satz 5.1: Für $p \in (1,\infty)$ sind T_p und T_p^* linear und kompakt.

Zu $p \in (1,\infty)$ ist T_p^* der duale Operator zu T_p.

<u>Beweis:</u> Die Linearität von T_p, T_p^* ($p \in (1,\infty)$) ist klar. Sei $p \in (2,\infty)$, $q := (1-1/p)^{-1}$. Sei (F_n) beschränkte Folge in $L_p(\partial\Omega)^3$. Zu $n \in \mathbb{N}$ sei $\psi_n \in F_n$. Dann ist (ψ_n) eine beschränkte Folge in $\mathcal{L}_p(\partial\Omega)^3$. Aus (5.8) folgt, daß $(\vec{T}(\vec{\psi}_n))$ eine beschränkte Folge in $C^{(2-q)/q}(\partial\Omega)^3$ ist. Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli gibt es somit eine streng monoton wachsende Abbildung $\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so daß $(\vec{T}(\vec{\psi}_{\sigma(n)}))$ in $C^0(\partial\Omega)^3$ konvergiert. Insbesondere konvergiert $(\vec{T}(\vec{\psi}_{\sigma(n)}))$ in $\mathcal{L}_p(\partial\Omega)^3$. Das bedeutet aber, daß $(T_p(F_{\sigma(n)}))$ in $L_p(\partial\Omega)^3$ konvergiert. Damit ist gezeigt: Für $p \in (2,\infty)$ ist T_p kompakt. Analog kann man aus (5.8) folgern, daß T_p^* für $p \in (1,2)$ kompakt ist.

Nach Lemma 5.2 gilt für $p \in (1,2]$: T_p ist stetig. Weil T_p kompakt und linear ist für $p \in (2,\infty)$, gilt auch für $p \in (2,\infty)$: T_p stetig. Für alle $p \in (1,\infty)$ ist also der duale Operator T_p' zu T_p auf dem ganzen Raum $L_q(\partial\Omega)^3$ definiert (siehe [Y], S. 194). Aus (5.10) im Fall $p \in (1,2)$, sowie aus (5.11) im Fall $p \in (2,\infty)$ kann man folgern: Für $p \in (1,\infty)\setminus\{2\}$ ist T_p^* der duale Operator zu T_p. Hieraus und aus der Kompaktheit von T_p im Fall $p > 2$, bzw. von T_p^* im Fall $1 < p < 2$, ergibt sich nun (siehe [Y], S. 282): Für $p \in (2,\infty)$ ist T_p^* kompakt; für $p \in (1,2)$ ist T_p kompakt.

Jetzt ist nur noch zu zeigen: T_2^* ist die duale Abbildung zu T_2; T_2 ist kompakt.

Für $\vec{\psi}, \vec{\phi} \in L_2(\partial\Omega)^3$, $i,j \in \{1,2,3\}$ ist aber

$$\int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} |K_{ij}(x,y)|\cdot|\psi_j(y)|\cdot|\phi_i(x)|\, d\Omega(y)\, d\Omega(x)$$

$$\le \left(\int_{\partial\Omega}\left(\int_{\partial\Omega} |K_{ij}(x,y)|\cdot|\psi_j(y)|\, d\Omega(y)\right)^2 dx\right)^{1/2}\cdot\|\phi_i\|_2$$

$$\le \left(\int_{\partial\Omega} d\Omega\right)^{1/4}\cdot\left(\int_{\partial\Omega}\left(\int_{\partial\Omega} |K_{ij}(x,y)|\cdot|\psi_j(y)|\, d\Omega(y)\right)^4 dx\right)^{1/4}\cdot\|\phi_i\|_2$$

$$\le \left(\int_{\partial\Omega} d\Omega\right)^{1/4}\cdot M_1(3/2,2)\cdot\|\psi_j\|_2\cdot\|\phi_i\|_2 \quad \text{(wegen (5.1))} \quad < \infty.$$

Nach dem Satz von Fubini und wegen $K_{ij} = K_{ji}$ folgt, daß (5.9) und (5.10) auch für $\vec{\psi}, \vec{\phi}$ aus $\mathcal{L}_2(\partial\Omega)^3$ gelten. Dies bedeutet, daß T_2^* die duale Abbildung zu T_2 ist. Zum Beweis der Kompaktheit von T_2 ist jetzt nur noch zu zeigen (siehe [W], Theorem 6.4c)): $\overline{T_2^*}\circ T_2$ kompakt, wobei $\overline{T_2^*}: L_2(\partial\Omega)^3 \to L_2(\partial\Omega)^3$ definiert ist durch $\overline{T_2^*}(F) := [i_{\mathbb{C}}\circ\vec{T}(i_{\mathbb{C}}\circ\vec{f})]$ für $F \in L_2(\partial\Omega)^3$, $\vec{f} \in F$. Hierbei bezeichnet $i_{\mathbb{C}}: F^3_{\partial\Omega} \to F^3_{\partial\Omega}$ diejenige Abbildung, die jeder Funktion $\vec{f} \in F^3_{\partial\Omega}$ ihre konjungiert komplexe Funktion $\overline{\vec{f}}$ zuordnet. ($F_{\partial\Omega}$ wurde nach Lemma 2.2 eingeführt.) $\overline{T_2^*}$ ist der zu T_2 adjungierte Operator im Hilbertraum $L_2(\partial\Omega)^3$ (siehe [W], S. 70, [Y], S. 196).

Sei also (F_n) beschränkte Folge in $L_2(\partial\Omega)^3$. (F_n) ist dann auch beschränkte Folge in $L_{4/3}(\partial\Omega)^3$. Weil $T_{4/3}$ kompakt ist, gibt es eine streng monoton wachsende Abbildung $\tau: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so daß $(T_{4/3}F_{\tau(n)})$ in $L_{4/3}(\partial\Omega)^3$ konvergiert. Das bedeutet: $(T_2F_{\tau(n)})$ ist in $L_{4/3}(\partial\Omega)^3$ konvergent. Für $m,n \in \mathbb{N}$ ist aber

$$\|\overline{T_2^*}(T_2F_{\tau(n)}) - \overline{T_2^*}(T_2F_{\tau(m)})\|_2$$

$$= \|\overline{T_2^*}(T_2F_{\tau(n)} - T_2F_{\tau(m)})\|_2$$

$$\le M_2(3/2,4/3)\cdot\|T_2F_{\tau(n)} - T_2F_{\tau(m)}\|_{4/3}$$

(gemäß (5.7), mit $\lambda = 3/2$, $q = 4/3$).

Somit ist $(\overline{T_2^*}(T_2F_{\tau(n)}))$ konvergent in $L_2(\partial\Omega)^3$. Das bedeutet: $\overline{T_2^*}\circ T_2$ ist kompakt. □

Lemma 5.4: Sei $\rho \in [0,1)$, $\vec{B} \in C^{\rho}(\partial\Omega)^3$. Ist dann $p \in (1,\infty)$, $\vec{\psi} \in L_p(\partial\Omega)^3$ mit

$$(5.13)\quad \vec{\psi} \pm \vec{T}(\vec{\psi}) = \vec{B} \text{ oder } \vec{\psi} \pm \vec{T}^*(\vec{\psi}) = \vec{B},$$

so folgt: $\vec{\psi} \in C^{\rho}(\partial\Omega)^3$.

Beweis: Wir beweisen die Behauptung zunächst für den Fall $p > 2$.

Sei $p \in (2,\infty)$, $\vec{\psi} \in L_p(\partial\Omega)^3$, und es gelte (5.13). Aus Lemma 5.3 erhält man: $\vec{T}(\vec{\psi}), \vec{T}^*(\vec{\psi}) \in C^0(\partial\Omega)^3$. Weil auch $\vec{B} \in C^0(\partial\Omega)^3$, haben wir wegen (5.13): $\vec{\psi} \in C^0(\partial\Omega)^3$. Dies wiederum bedeutet, daß $\vec{\psi} \in L_q(\partial\Omega)^3$ ist für alle $q \in (1,\infty)$. Wir können erneut Lemma 5.3 anwenden und erhalten: $\vec{T}(\vec{\psi}), \vec{T}^*(\vec{\psi}) \in C^{(2-r)/r}(\partial\Omega)^3$ für alle $r \in (1,2)$. Hieraus folgt: $\vec{T}(\vec{\psi}), \vec{T}^*(\vec{\psi}) \in C^{\alpha}(\partial\Omega)^3$ für $\alpha \in (0,1)$. Da $b \in C^{\rho}(\partial\Omega)^3$, ergibt sich nun wegen (5.13): $\vec{\psi} \in C^{\rho}(\partial\Omega)^3$.

Bevor wir den Fall $p \in (1,2]$ behandeln, stellen wir zunächst fest:

$$(5.14)\quad \begin{cases} \text{Sei } \tilde{p} \in (1,2],\ \tilde{\lambda} \in (1,2) \text{ mit } 1/\tilde{p}+\tilde{\lambda}/2-1 > 0. \text{ Sei } \vec{\psi} \in L_{\tilde{p}}(\partial\Omega)^3, \\ \text{und es gelte (5.13). Dann ist } \vec{\psi} \in L_r(\partial\Omega)^3, \text{ mit} \\ r := (1/\tilde{p}+\tilde{\lambda}/2-1)^{-1}. \end{cases}$$

Tatsächlich ist nach Lemma 5.2:

$$\|\vec{T}(\vec{\psi})\|_r, \|\vec{T}^*(\vec{\psi})\|_r \le M_2(\tilde{\lambda},\tilde{p}) \cdot \|\vec{\psi}\|_{\tilde{p}};$$

also: $\vec{T}(\vec{\psi}), \vec{T}^*(\vec{\psi}) \in L_r(\partial\Omega)^3$. Weil $\vec{B} \in C^0(\partial\Omega)^3 \subset L_r(\partial\Omega)^3$, folgt aus (5.13): $\vec{\psi} \in L_r(\partial\Omega)^3$.

Sei nun $p \in (1,2]$ und $\vec{\psi} \in L_p(\partial\Omega)^3$ mit Eigenschaft (5.13). Dann können wir $n \in \mathbb{N}$ wählen mit $n/2 \le 1/p < (n+1)/2$. Weiterhin halten wir eine Zahl $\lambda \in (1,2)$ fest mit

$$(5.15)\quad (n/2)\cdot(2-\lambda) < 1/p < (n+1)\cdot(2-\lambda)/2.$$

Schließlich setzen wir für $k \in \{0,\dots,n\}$:

$$p_k := (1/p - k\cdot(2-\lambda)/2)^{-1}.$$

Das bedeutet insbesondere: $p_0 = p$, $p < p_1 < \dots < p_k$.

Für $k \in \{1,\dots,n\}$ ist

$$1/p_k = 1/p - (k-1)\cdot(2-\lambda)/2 - 1 + \lambda/2$$
$$= 1/p_{k-1} + \lambda/2 - 1;$$

$$1/p_k \ge 1/p - n(2-\lambda)/2 > 0.$$

Aus (5.14) folgt jetzt durch Induktion über $k \in \{1,\dots,n\}$: $\vec{\psi} \in L_{p_n}(\partial\Omega)^3$. Aus der zweiten Ungleichung in (5.15) kann man aber folgern, daß $p_n > 2/(2-\lambda)$ ist. Das bedeutet insbesondere: $p_n > 2$. Somit folgt aus dem ersten Teil des Beweises: $\vec{\psi} \in C^{\rho}(\partial\Omega)^3$. □

§ 6. Das homogene, lineare Stokesproblem im Innen- und Außenraum

Lemma 6.1: Sei $L \in C^1(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$; es gebe $c > 0$, so daß

$$|L(z)| \le c\cdot|z|^{-1}, \quad |D_k L(z)| \le c\cdot|z|^{-2} \text{ für } z \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

Sei $\phi \in C^0(\partial\Omega)$, $\alpha \in (0,1)$. Dann ist die Funktion

$$S:\ \mathbb{R}^3 \ni x \to \int_{\partial\Omega} L(x-y)\cdot\phi(y)\, dy \in \mathbb{C}$$

aus $C^\alpha(\mathbb{R}^3)$.

Insbesondere bedeutet dies: $\vec{V}(.,\vec{\Psi}) \in C^\alpha(\mathbb{R}^3)^3$ für $\vec{\Psi} \in C^0(\partial\Omega)^3$.

Beweis: Sei $t \in \{1,\dots,k_\Omega\}$. Dann gilt für $x,x' \in \mathbb{R}^3$:

$$(6.1)\quad \Big|\int_\Delta \big(L(x-\overset{t}{u}(\eta)) - L(x'-\overset{t}{u}(\eta))\big)\cdot\phi\circ\overset{t}{u}(\eta)\cdot B_t(\eta)\, d\eta\Big|$$

$$\le \sum_{z\in\{x,x'\}} \Big|\int_{\substack{\Delta \\ |p_t(x)-\eta| \le 2\cdot|x-x'|}} L(z-\overset{t}{u}(\eta))\cdot\phi\circ\overset{t}{u}(\eta)\cdot B_t(\eta)\, d\eta\Big|$$

$$+ \Big|\int_{\substack{\Delta \\ |p_t(x)-\eta| \ge 2\cdot|x-x'|}} \big(L(x-\overset{t}{u}(\eta)) - L(x'-\overset{t}{u}(\eta))\big)\cdot \phi\circ\overset{t}{u}(\eta)\cdot B_t(\eta)\, d\eta\Big|$$

($p_t: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ wurde vor Lemma 2.2 definiert)

$$\le \sum_{z\in\{x,x'\}} |\phi|_0\cdot K_\beta\cdot c\cdot \int_{\substack{\Delta \\ |p_t(x)-\eta| \le 2\cdot|x-x'|}} |z-\overset{t}{u}(\eta)|^{-1}\, d\eta$$

$$+ \Big|\int_{\substack{\Delta \\ |p_t(x)-\eta| \ge 2\cdot|x-x'|}} \int_0^1 \sum_{k=1}^3 D_k L(x'+\theta(x-x')-\overset{t}{u}(\eta))\cdot \phi\circ\overset{t}{u}(\eta)\cdot B_t(\eta)\cdot(x_k-x'_k)\, d\theta\, d\eta\Big|$$

(Beachte: $|B_t|_0 \le K_\beta$; siehe (2.20))

$$\le |\phi|_0\cdot K_\beta\cdot c\cdot\Big\{ \sum_{z\in\{x,x'\}} \int_{|p_t(x)-\eta| \le 2\cdot|x-x'|} |p_t(z)-\eta|^{-1}\, d\eta + |x-x'| \int_0^1 \int_{\substack{\Delta \\ |p_t(x)-\eta| \ge 2\cdot|x-x'|}} |x'+\theta(x-x')-\overset{t}{u}(\eta)|^{-2}\, d\eta\, d\theta\Big\}.$$

In der letzten Ungleichung wurde der erste Summand mit (2.17) abgeschätzt. Mit (2.17) findet man außerdem, für $\theta \in [0,1]$, $\eta \in \Delta$ mit $|p_t(x)-\eta| \ge 2\cdot|x-x'|$:

$$|x'+\theta\cdot(x-x')-\overset{t}{u}(\eta)| \ge |x-\overset{t}{u}(\eta)| - |x-x'|$$

$$\ge |p_t(x)-\eta| - |x-x'| \ge (1/2)\cdot|p_t(x)-\eta|.$$

Aus der Definition von p_t ersieht man:

$$|p_t(x)-p_t(x')| \le |x-x'|.$$

Daher gilt:

$|p_t(z)-\eta| \le 3\cdot|x-x'|$ für $z\in\{x,x'\}$,

$\eta\in\mathbb{R}^2$ mit $|p_t(x)-\eta| \le 2\cdot|x-x'|$.

Jetzt folgt, daß die rechte Seite von (6.1) beschränkt ist durch

$$(6.2)\quad |\phi|_0\cdot K_\beta\cdot c\cdot\Big\{\sum_{z\in\{x,x'\}}\ \int\limits_{|p_t(z)-\eta|\le 3\cdot|x-x'|} |p_t(z)-\eta|^{-1}\,d\eta$$

$$+\ |x-x'|\cdot\int\limits_{\substack{\Delta\\ |p_t(x)-\eta|\ge 2\cdot|x-x'|}} 4\cdot|p_t(x)-\eta|^{-2}\,d\eta\Big\}.$$

Durch Integration erhalten wir als obere Schranke von (6.2):

$$K_1\cdot\{|x-x'| + |x-x'|\cdot\ln((|p_t(x)|+\mathrm{diam}\,\Delta)/(2|x-x'|))\}$$

(mit $K_1 := |\phi|_0\cdot K_\beta\cdot c\cdot 8\cdot\pi$)

$$\le K_1\cdot\{|x-x'| + |x-x'|\cdot\ln(|p_t(x)|+\mathrm{diam}\,\Delta+1)$$

$$+\ \ln 2\cdot|x-x'|\cdot|\ln|x-x'||\}.$$

Wir wählen $\gamma\in(0,\infty)$, so daß $\overline{\Omega}\subset K_\gamma(0)$, und setzen

$$K_2 := \sup\{\ln(|p_s(y)|+\mathrm{diam}\,\Delta+1):\ 1\le s\le k_\Omega,\ y\in K_{\gamma+2}(0)\}.$$

Man beachte, daß aus der Integraldarstellung des Logarithmus folgt:

$|\ln t| \le (1-\alpha)^{-1}\cdot t^{-1+\alpha}$ für $t\in(0,1]$.

Damit ergibt sich aus den vorangehenden Abschätzungen, für $x,x'\in K_{\gamma+2}(0)$ mit $|x-x'|\le 1$, und für $t\in\{1,\dots,k_\Omega\}$:

$$\Big|\int_\Delta (L(x-\overset{i}{u}(\eta))-L(x-\overset{i}{u}(\eta)))\cdot\phi\circ\overset{i}{u}(\eta)\cdot B_i(\eta)\,d\eta\Big| \le K_3\cdot|x-x'|^\alpha$$

(mit $K_3 := K_1\cdot\{1+K_2+\ln 2\cdot(1-\alpha)^{-1}\}$).

Mit (2.19) kann man folgern:

$$(6.3)\quad |S(x)-S(x')| \le k_\Omega\cdot K_3\cdot|x-x'|^\alpha \text{ für } x,x'\in K_{\gamma+2}(0) \text{ mit } |x-x'|\le 1.$$

Für $x\in\mathbb{R}^3$ ist

$$(6.4)\quad |S(x)| \le \sum_{t=1}^{k_\Omega}\int_\Delta |L(x-\overset{t}{u}(\eta))|\cdot|\phi\circ\overset{t}{u}(\eta)|\cdot B_t(\eta)\,d\eta$$

$$\le K_4\cdot\int_\Delta |x-\overset{i}{u}(\eta)|^{-1}\,d\eta \qquad (\text{mit } K_4 := k_\Omega\cdot c\cdot|\phi|_0\cdot K_\beta)$$

Für $x\in\mathbb{R}^3\setminus K_{\gamma+1}(0)$ gilt wegen $\overline{\Omega}\subset K_\gamma(0)$:

$|x-\overset{t}{u}(\eta)| \ge 1$ für $\eta\in\Delta$.

Ist dagegen $x\in K_{\gamma+1}(0)$, so stellt man fest: $p_t(x)+\Delta\subset K_{\gamma+1+\mathrm{diam}\,\Delta}(0)$. Damit erhält man aus (6.4), für $x\in\mathbb{R}^3$:

$$(6.5)\quad |S(x)| \le K_4\cdot\max\{\mathrm{Vol}(\Delta), 2\cdot\pi\cdot(\gamma+1+\mathrm{diam}\,\Delta)\} =: K_5.$$

Insbesondere ist für $x,x'\in\mathbb{R}^3$ mit $|x-x'|\ge 1$:

(6.6) $|S(x)-S(x')| \leq 2\cdot K_5\cdot|x-x'|$.

Zu betrachten ist noch der Fall, daß für $x,x' \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$|x-x'| \leq 1 \text{ und } \{x,x'\} \cap \mathbb{R}^3\setminus K_{\gamma+2}(0) \neq \phi.$$

Dann ist

$$|x'+\theta\cdot(x-x')-y| \geq 1 \text{ für } \theta \in [0,1],\ y \in \partial\Omega.$$

Damit ergibt sich:

(6.7) $|S(x)-S(x')| =$

$$= |\int_{\partial\Omega}\int_0^1 \sum_{k=1}^3 D_k L(x'+\theta(x-x')-y)\cdot(x_k-x_k')\ d\theta\cdot\phi(y)\ d\Omega(y)|$$

$$\leq K_6\cdot|x-x'| \quad (\text{mit } K_6 := 3\cdot c\cdot|\phi|_0\cdot\int_{\partial\Omega} d\Omega)$$

$$\leq K_6\cdot|x-x'|^{\alpha}.$$

Aus (6.3) und (6.5)-(6.7) folgt die Behauptung. □

<u>Lemma 6.2:</u> <u>Sei</u> $\vec{\psi} \in C^0(\partial\Omega)^3$. <u>Zu</u> $\varepsilon \in (0,\varepsilon_B]$, $x \in \bar{\Omega}$ <u>setzt man</u>

$$\vec{V}_\varepsilon(x,\vec{\psi}) := (\sum_{k=1}^3 \int_{\partial\Omega} E_{ik}(x-y-\varepsilon\cdot n(y))\cdot\psi_k(y)\ d\Omega(y))_{1\leq i\leq 3};$$

$$Q_\varepsilon(x,\vec{\psi}) := \sum_{k=1}^3 \int_{\partial\Omega} E_{4k}(x-y-\varepsilon\cdot n(y))\cdot\psi_k(y)\ d\Omega(y).$$

(E_{jk} <u>wurde in Lemma</u> 1.7 <u>definiert</u> $(1 \leq j \leq 4,\ 1 \leq k \leq 3)$.)

<u>Dann gilt:</u> <u>Für</u> $\varepsilon \in (0,\varepsilon_B]$ <u>ist</u> $\vec{V}_\varepsilon(.,\vec{\psi}) \in C^\infty(\bar{\Omega})^3$, $Q_\varepsilon(.,\vec{\psi}) \in C^\infty(\bar{\Omega})$;

(6.8) $-\nu\cdot\Delta\vec{V}_\varepsilon(.,\vec{\psi}) + \nabla Q_\varepsilon(.,\vec{\psi}) = 0$, $\operatorname{div} \vec{V}_\varepsilon(.,\vec{\psi}) = 0$.

<u>Weiter hat man für</u> $x \in \Omega$, $l \in \{1,2,3\}$ <u>folgende Konvergenz:</u>

(6.9) $D_l\vec{V}_\varepsilon(x,\vec{\psi}) \to D_l\vec{V}(x,\vec{\psi})$, $Q_\varepsilon(x,\vec{\psi}) \to Q(x,\vec{\psi})$ <u>für</u> $\varepsilon\downarrow 0$.

<u>Schließlich gilt:</u>

(6.10) $\vec{V}_\varepsilon(x,\vec{\psi}) \to \vec{V}(x,\vec{\psi})$ $(\varepsilon\downarrow 0)$ <u>gleichmäßig in</u> $x \in \partial\Omega$.

<u>Beweis:</u> Nach (2.24), (2.25) gilt: $y+\varepsilon\cdot n(y) \in \mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}$, $|z-y-\varepsilon\cdot n(y)| \geq \varepsilon$ für $z,y \in \partial\Omega$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_B]$. Daraus folgt:

$$|z-y-\varepsilon\cdot n(y)| \geq \varepsilon \text{ für } z \in \bar{\Omega},\ y \in \partial\Omega,\ \varepsilon \in (0,\varepsilon_B].$$

Wegen $E_{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^3\setminus\{0\})$ $(1 \leq i \leq 4,\ 1 \leq j \leq 3)$ und wegen (1.10) ergibt sich hieraus der erste Teil des Lemmas (bis (6.8)).

Sei $x \in \Omega$. Dann ist $\operatorname{dist}(x,\mathbb{R}^3\setminus\Omega) > 0$. Nach (2.24) ist aber $y+\varepsilon\cdot n(y) \in \mathbb{R}^3\setminus\Omega$ für $y \in \partial\Omega$, $\varepsilon \in [0,\varepsilon_B]$. Also ist

$$|x-y-\varepsilon\cdot n(y)| \geq \operatorname{dist}(x,\mathbb{R}^3\setminus\Omega) \text{ für } y \in \partial\Omega,\ \varepsilon \in [0,\varepsilon_B].$$

Somit sind die Funktionen

$$\partial\Omega \ni y \to E_{ij}(x-y-\varepsilon\cdot n(y)) \in \mathbb{R}$$

$$\partial\Omega \ni y \to D_k E_{ij}(x-y-\varepsilon\cdot n(y)) \in \mathbb{R} \quad (1 \leq j,k \leq 3,\ 1 \leq i \leq 4)$$

beschränkt, gleichmäßig in $\varepsilon \in [0,\varepsilon_B]$. Weil außerdem

$$E_{ij}(x-y-\varepsilon\cdot n(y)) \to E_{ij}(x-y),$$

$$D_k E_{ij}(x-y-\varepsilon\cdot n(y)) \to D_k E_{ij}(x-y) \text{ für } \varepsilon\downarrow 0$$

$$(1 \le j,k \le 3,\ 1 \le i \le 4,\ y \in \partial\Omega)$$

folgt jetzt (6.9) mit dem Konvergenzsatz von Lebesgue.

Zum Beweis von (6.10) sei $i \in \{1,2,3\}$ und $\gamma > 0$ vorgegeben. Wähle $\delta > 0$, so daß mit P_5 aus (1.13) gilt:

$$(6.11)\quad 3\cdot K_\beta\cdot P_5\cdot(\varepsilon_\Omega^{-1}+1)\cdot|\vec{\psi}|_o\cdot k_\Omega\cdot 2\cdot\pi\cdot\delta < \gamma/2.$$

Die Abbildung

$$F:\{(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{\varepsilon}) \in \partial\Omega\times\partial\Omega\times[0,\varepsilon_\beta]:\ |\tilde{x}-\tilde{y}| \ge \delta\} \ni (x,y,\varepsilon) \to$$

$$\to \sum_{k=1}^{3} E_{ik}(x-y-\varepsilon\cdot n(y))\cdot\psi_k(y) \in \mathbb{R}$$

ist gleichmäßig stetig, denn wegen (2.25) weiß man:

$$|x-y-\varepsilon\cdot n(y)| \ge \varepsilon_\beta\cdot|x-y| \ge \varepsilon_\beta\cdot\delta \text{ für } x,y \in \partial\Omega \text{ mit } |x-y| \ge \delta,$$

$$\varepsilon \in [0,\varepsilon_\beta].$$

Somit gibt es $\delta' \in (0,\varepsilon_\beta]$, so daß für $\varepsilon \in [0,\delta']$ und für $x,y \in \partial\Omega$ mit $|x-y| \ge \delta$ gilt:

$$(6.12)\quad |F(x,y,\varepsilon)-F(x,y,0)| \le \gamma\cdot\Big(2\cdot\int_{\partial\Omega} d\Omega\Big)^{-1}.$$

Jetzt folgt für $x \in \partial\Omega$, $\varepsilon \in (0,\delta']$:

$$|V_{\varepsilon i}(x,\vec{\psi})-V_i(x,\vec{\psi})|$$

$$= \Big|\sum_{k=1}^{3}\sum_{t=1}^{k_\Omega}\int_\Delta \big(E_{ik}(x-\overset{t}{u}(\eta)-\varepsilon\cdot n\circ\overset{t}{u}(\eta))-E_{ik}(x-\overset{t}{u}(\eta))\big)\cdot\psi_k\circ\overset{t}{u}(\eta)$$

$$\cdot B_t(\eta)\, d\eta\Big|$$

(mit (2.19))

$$\le \sum_{k=1}^{3}\sum_{t=1}^{k_\Omega}\sum_{\kappa\in\{0,\varepsilon\}}$$

$$\int_{\substack{\Delta\\ |p_t(x)-\eta|\le\delta}} |E_{ik}(x-\overset{t}{u}(\eta)-\varepsilon\cdot n\circ\overset{t}{u}(\eta))|\cdot|\psi_k|_o\cdot|B_t|_o\, d\eta$$

$$+ \sum_{k=1}^{3}\sum_{t=1}^{k_\Omega}\Big|\int_{\substack{\Delta\\ |p_t(x)-\eta|\ge\delta}} \sum_{k=1}^{3}\Big(E_{ik}(x-\overset{t}{u}(\eta)-\varepsilon\cdot n\circ\overset{t}{u}(\eta))-$$

$$- E_{ik}(x-\overset{t}{u}(\eta))\Big)\cdot\psi_k\circ\overset{t}{u}(\eta)\cdot B_t(\eta)\, d\eta\Big|$$

$$\le 3\cdot K_\beta\cdot P_5\cdot|\vec{\psi}|_o\cdot\sum_{t=1}^{k_\Omega}\sum_{\kappa\in\{0,\varepsilon\}}\int_{\substack{\Delta\\ |p_t(x)-\eta|\le\delta}} |x-\overset{t}{u}(\eta)-\kappa\cdot n\circ\overset{t}{u}(\eta)|^{-1}\, d\eta$$

$$+ \sum_{t=1}^{k_\Omega}\int_{\substack{\Delta\\ |p_t(x)-\eta|\ge\delta}} |F(x,\overset{t}{u}(\eta),\varepsilon)-F(x,\overset{t}{u}(\eta),0)|\cdot B_t(\eta)\, d\eta$$

(Der erste Summand wurde mit (1.13) und (2.20) abgeschätzt)

$$\leq 3\cdot K_B\cdot P_5\cdot|\vec{\psi}|_0\cdot(\varepsilon_B^{-1}+1)\cdot\sum_{t=1}^{k_\Omega}\int\limits_{\substack{\Delta\\|p_t(x)-\eta|\leq\delta}}|p_t(x)-\eta|^{-1}\,d\eta$$

$$+\sum_{t=1}^{k_\Omega}\int\limits_{\substack{\Delta\\|p_t(x)-\eta|\geq\delta}}\gamma\cdot\Big(2\cdot\int_{\partial\Omega}d\Omega(z)\Big)^{-1}\cdot B_t(\eta)\,d\eta$$

(Beim ersten Summanden wurde (2.17) und (2.25) ausgenutzt; beim zweiten wurde mit (6.12) abgeschätzt.)

$$\leq 3\cdot K_B\cdot P_5\cdot(\varepsilon_B^{-1}+1)\cdot|\vec{\psi}|_0\cdot k_\Omega\cdot 2\cdot\pi\cdot\delta\ +$$

$$+\ \gamma\cdot\Big(2\cdot\int_{\partial\Omega}d\Omega(z)\Big)^{-1}\cdot\sum_{t=1}^{k_\Omega}\int_\Delta B_t(\eta)\,d\eta$$

$< \gamma$ (wegen (6.11) und (2.19)). □

<u>Lemma 6.3:</u> <u>Zu</u> $\varepsilon\in(0,\varepsilon_B]$, $\vec{\psi}\in C^0(\partial\Omega)^3$, $x\in\mathbb{R}^3\setminus\Omega$ <u>sei</u>

$$\vec{V}^\varepsilon(x,\vec{\psi}):=\Big(\sum_{k=1}^{3}\int_{\partial\Omega}E_{ik}(x-y+\varepsilon\cdot n(y))\cdot\psi_k(y)\,d\Omega(y)\Big)_{1\leq i\leq 3},$$

$$Q^\varepsilon(x,\vec{\psi}):=\sum_{k=1}^{3}\int_{\partial\Omega}E_{4k}(x-y+\varepsilon\cdot n(y))\cdot\psi_k(y)\,d\Omega(y).$$

<u>Dann ist</u> $V_i^\varepsilon(.,\vec{\psi})$, $Q^\varepsilon(.,\vec{\psi})\in C^\infty(\mathbb{R}^3\setminus\Omega)$ <u>für</u> $\varepsilon\in(0,\varepsilon_B]$, $1\leq i\leq 3$, <u>und</u>

$$-\nu\Delta\vec{V}^\varepsilon(.,\vec{\psi})+\nabla Q^\varepsilon(.,\vec{\psi})=0.$$

<u>Für</u> $x\in\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}$, $1\leq l\leq 3$ <u>gilt:</u>

$$D_l\vec{V}^\varepsilon(x,\vec{\psi})\to D_l\vec{V}(x,\vec{\psi}),\quad Q^\varepsilon(x,\vec{\psi})\to Q(x,\vec{\psi})\quad \underline{\text{für}}\ \varepsilon\downarrow 0.$$

<u>Schließlich hat man:</u>

$$\vec{V}^\varepsilon(x,\vec{\psi})\to\vec{V}(x,\vec{\psi})\ (\varepsilon\downarrow 0)\ \underline{\text{gleichmäßig in}}\ x\in\partial\Omega.$$

<u>Es gibt</u> $L_1>0$, <u>und zu</u> $r\in(1,\infty)$ <u>eine Zahl</u> $L_2(r)>0$, <u>so daß</u> $\bar{\Omega}\subset K_{L_1}(0)$, <u>und so, daß für</u> $r\in(1,\infty)$, $\vec{\psi}\in C^0(\partial\Omega)^3$, $1\leq i,l,k\leq 3$, $\varepsilon\in[0,\varepsilon_B]$ <u>und</u> $x\in\mathbb{R}^3$ <u>mit</u> $|x|\geq L_1$ <u>gilt:</u>

(6.13) $$|V_i^\varepsilon(x,\vec{\psi})|\cdot|x|,\ |D_kV_i^\varepsilon(x,\vec{\psi})|\cdot|x|^2,\ |Q^\varepsilon(x,\vec{\psi})|\cdot|x|^2,$$
$$|D_kD_lV_i^\varepsilon(x,\vec{\psi})|\cdot|x|^3,\ |D_kQ^\varepsilon(x,\vec{\psi})|\cdot|x|^3$$
$$\leq L_2(r)\cdot\|\vec{\psi}\|_r,$$

<u>wobei wir</u> $\vec{V}^0(.,\vec{\psi}):=\vec{V}(.,\vec{\psi})|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}$, $Q^0(.,\vec{\psi}):=Q(.,\vec{\psi})$ <u>gesetzt haben</u>.

<u>Beweis:</u> Den ersten Teil des Lemmas (bis (6.13)) beweist man wie Lemma 6.2.

Zum Beweis von (6.13) wählt man zunächst $L_{1,1}>0$ mit $\bar{\Omega}\subset K_{L_{1,1}}(0)$. Weil

$$(t-L_{1,1}-\varepsilon_B)/t\to 1\ \text{für}\ t\to\infty,$$

gibt es $L_1>L_{1,1}+\varepsilon_B$, so daß

$(t-L_{1,1}-\varepsilon_B)/t \geq 1/2$ für $t \geq L_1$.

Somit gilt:

(6.14) $t-L_{1,1}-\varepsilon_B \geq t/2$ für $t \geq L_1$; $\bar{\Omega} \subset K_{L_1}(0)$.

Jetzt findet man für $\varepsilon \in [0,\varepsilon_B]$, $x \in \mathbb{R}^3$ mit $|x| \geq L_1$, $i,l,m \in \{1,2,3\}$, $\vec{\phi} \in C^0(\partial\Omega)^3$, $r \in (1,\infty)$:

$$|D_l D_m V_i^\varepsilon(x,\vec{\phi})| = \left|\sum_{k=1}^{3} \int_{\partial\Omega} D_l D_m E_{ik}(x-y-\varepsilon\cdot n(y))\cdot\phi_k(y)\, d\Omega(y)\right|$$

$$\leq P_5\cdot\sum_{k=1}^{3}\int_{\partial\Omega} |x-y-\varepsilon\cdot n(y)|^{-3}\cdot|\phi_k(y)|\, d\Omega(y) \quad \text{(mit (1.13))}$$

$$\leq P_5\cdot\int_{\partial\Omega} (|x|-|y|-\varepsilon)^{-3}\cdot\sum_{k=1}^{3}|\phi_k(y)|\, d\Omega(y)$$

$$\leq P_5\cdot(|x|-L_{1,1}-\varepsilon_\Omega)^{-3}\cdot\sum_{k=1}^{3}\left(\int_{\partial\Omega} d\Omega(y)\right)^{1-1/r}\cdot\left(\int_{\partial\Omega}|\phi_k(y)|^r\, d\Omega(y)\right)^{1/r}$$

$$\leq P_5\cdot(|x|/2)^{-3}\cdot\left(\int_{\partial\Omega} d\Omega\right)^{1-1/r}\cdot\sum_{k=1}^{3}|\phi_k|_r$$

(Hier wurde (6.14) angewandt. Die Abbildung $|\ |_r$ wurde vor Lemma 2.3 definiert).

$$\leq L_{2,1}(r)\cdot\|\vec{\phi}\|_r\cdot|x|^{3}$$

(mit $L_{2,1}(r) := P_5\cdot 24\cdot\left(\int_{\partial\Omega} d\Omega\right)^{1-1/r}\cdot Q_B$; wegen Lemma 2.3).

Entsprechende Abschätzungen gelten für $D_l V_i^\varepsilon(x,\vec{\phi})$, $V_i^\varepsilon(x,\vec{\phi})$, $D_l Q^\varepsilon(x,\vec{\phi})$, $Q^\varepsilon(x,\vec{\phi})$ mit $i,l,\varepsilon,x,\vec{\phi}$ wie oben. □

<u>Lemma 6.4:</u> <u>Sei</u> $\vec{\psi} \in C^0(\partial\Omega)^3$, $p \in (1,\infty)$. <u>Dann gilt:</u>

(6.15) $$(\nu/2)\cdot\sum_{i,k=1}^{3}\int_{\Omega}(D_k V_{\varepsilon i}(x,\vec{\psi})+D_i V_{\varepsilon k}(x,\vec{\psi}))^2\, dx$$

$$\to \int_{\partial\Omega}\sum_{i=1}^{3}(1/2)\cdot(\psi_i(x)+T^*(\vec{\psi})_i(x))\cdot V_i(x,\vec{\psi})\, d\Omega(x),$$

<u>und</u>

(6.16) $$(\nu/2)\cdot\sum_{i,k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}}(D_k V_i^\varepsilon(x,\vec{\psi})+D_i V_k^\varepsilon(x,\vec{\psi}))^2\, dx$$

$$\to \int_{\partial\Omega}\sum_{i=1}^{3}(1/2)\cdot(-\psi_i(x)+T^*(\vec{\psi})_i(x))\cdot V_i(x,\vec{\psi})\, d\Omega(x),$$

<u>für</u> $\varepsilon\downarrow 0$.

<u>Beweis:</u> Aus Lemma 6.2, 6.3, 3.3 folgt für $\varepsilon \in (0,\varepsilon_B]$:

(6.17) $$\int_{\partial\Omega}\sum_{i,k=1}^{3} T_{ik}\Big(\vec{V}_\varepsilon(\cdot,\vec{\psi}),Q_\varepsilon(\cdot,\vec{\psi})\Big)(x)\cdot V_{\varepsilon i}(x,\vec{\psi})\cdot n_k(x)\, d\Omega(x)$$

$$= \int_{\Omega}\sum_{i,k=1}^{3}(\nu/2)\cdot(D_k V_{\varepsilon i}(x,\vec{\psi})+D_i V_{\varepsilon k}(x,\vec{\psi}))^2\, dx,$$

(6.18) $$\int_{\partial\Omega}\sum_{i,k=1}^{3} T_{ik}\Big(\vec{V}^\varepsilon(\cdot,\vec{\psi}),Q^\varepsilon(\cdot,\vec{\psi})\Big)(x)\cdot V_i^\varepsilon(x,\vec{\psi})\cdot n_k(x)\, d\Omega(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}}\sum_{i,k=1}^{3}(\nu/2)\cdot(D_k V_i^\varepsilon(x,\vec{\psi})+D_i V_k^\varepsilon(x,\vec{\psi}))^2\, dx.$$

(T_{ik} wurde in Lemma 3.2 definiert.)

Sei i $\in\{1,2,3\}$. Wir zeigen, daß

$$(6.19)\quad \sum_{k=1}^{3} T_{ik}\Big(\vec{V}_\varepsilon(.,\vec{\psi}),Q_\varepsilon(.,\vec{\psi})\Big)(x)\cdot n_k(x)$$

$$-\sum_{k=1}^{3} T_{ik}\Big(\vec{V}(.,\vec{\psi})\,|\,\mathbb{R}^3\setminus\partial\Omega,Q(.,\vec{\psi})\Big)(x-\varepsilon\cdot n(x))\cdot n_k(x)$$

$$\to 0 \text{ für } \varepsilon\downarrow 0, \text{ gleichmäßig in } x\in\partial\Omega.$$

Beachtet man, daß $\vec{V}_\varepsilon(x,\vec{\psi})\to\vec{V}(x,\vec{\psi})$ $(\varepsilon\downarrow 0)$ gleichmäßig in $x\in\partial\Omega$ (Lemma 6.2), so ergibt sich anschließend aus (6.19) und (4.71):

$$\int_{\partial\Omega}\sum_{k=1}^{3} T_{ik}\Big(\vec{V}_\varepsilon(.,\vec{\psi}),Q_\varepsilon(.,\vec{\psi})\Big)(x)\cdot V_{\varepsilon i}(x,\vec{\psi})\cdot n_k(x)\;d\Omega(x)$$

$$\to\int_{\partial\Omega}(1/2)\cdot\Big(\psi_i(x)+T^*(\vec{\psi})_i(x)\Big)\cdot V_i(x,\vec{\psi})\;d\Omega(x)\qquad(\varepsilon\downarrow 0).$$

Hieraus und aus (6.17) folgt (6.15). Der Beweis von (6.16) verläuft analog: Man zeigt, daß

$$(6.20)\quad \sum_{k=1}^{3} T_{ik}\Big(\vec{V}^\varepsilon(.,\vec{\psi}),Q^\varepsilon(.,\vec{\psi})\Big)(x)\cdot n_k(x)$$

$$-\sum_{k=1}^{3} T_{ik}\Big(\vec{V}(.,\vec{\psi})\,|\,\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega},Q(.,\vec{\psi})\,|\,\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}\Big)(x+\varepsilon\cdot n(x))\cdot n_k(x)$$

$$\to 0\ (\varepsilon\downarrow 0), \text{ gleichmäßig in } x\in\partial\Omega.$$

Dann wendet man (6.18) und (4.72) an.

Zu zeigen bleiben (6.19) und (6.20). Wir führen nur den Beweis (6.19) aus; für (6.20) gelten analoge Argumente.

Man bemerkt zunächst, daß für $1\le i,j,k\le 3$, $z\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ gilt:

$$(-\delta_{jk}\cdot E_{41}+\nu\cdot D_jE_{kl}\quad+\nu\cdot D_kE_{jl})(z) = -3/(4\cdot\pi)\cdot z_j\cdot z_k\cdot z_l\cdot|z|^{-5},$$

wie im Beweis von Lemma 4.2, III) erwähnt. Damit ergibt sich für die in (6.19) auftretende Differenz, mit $\varepsilon\in(0,\varepsilon_B]$, $x\in\partial\Omega$:

$$(6.21)\quad\sum_{k=1}^{3}3/(4\pi)\cdot\int_{\partial\Omega}\Big\{(x_i-y_i-\varepsilon\cdot n_i(y))\cdot(x_k-y_k-\varepsilon\cdot n_k(y))$$

$$\cdot|x-y-\varepsilon\cdot n(y)|^{-5}\cdot\langle x-y-\varepsilon\cdot n(y),\psi(y)\rangle\cdot n_k(x)$$

$$-(x_i-\varepsilon\cdot n_i(x)-y)\cdot(x_k-\cancel{\varepsilon\cdot n_k(y))}\,|x-\varepsilon\cdot n(x)-y|^{-5}\qquad y_i\quad +\varepsilon\cdot n_k(y)-y_k$$

$$\cdot\langle x-\varepsilon\cdot n(x)-y,\vec{\psi}(y)\rangle\cdot n_k(x)\Big\}\;d\Omega(y).$$

Für alle $x\in\partial\Omega$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_B]$ läßt sich der Betrag von (6.21) abschätzen durch

$$(6.22)\quad\sum_{k=1}^{3}3/(4\cdot\pi)\cdot\int_{\partial\Omega}\Big\{\varepsilon\cdot|n(x)-n(y)|\cdot|x_k-y_k-\varepsilon\cdot n_k(y)|\cdot$$

$$|\langle x-y-\varepsilon\cdot n(y),\vec{\psi}(y)\rangle|\cdot|x-y-\varepsilon\cdot n(y)|^{-5}$$

$$+\,|x_i-\varepsilon\cdot n_i(x)-y_i|\cdot\varepsilon\cdot|n(x)-n(y)|\cdot|\langle x-y-\varepsilon\cdot n(y),\vec{\psi}(y)\rangle|\cdot$$

$$\cdot|x-y-\varepsilon\cdot n(y)|^{-5}$$

$$+\,|x_i-\varepsilon\cdot n_i(x)-y_i|\cdot|x_k-\varepsilon\cdot n_k(x)-y_k|\cdot\varepsilon\cdot|\langle n(x)-n(y),\vec{\psi}(y)\rangle|$$

$$\cdot|x-y-\varepsilon\cdot n(y)|^{-5}$$

$$+\,|x_i-\varepsilon\cdot n_i(x)-y_i|\cdot|x_k-\varepsilon\cdot n_k(x)-y_k|\cdot|\langle x-\varepsilon\cdot n(x)-y,\vec{\psi}(y)\rangle|$$

$$\cdot\Big|\,|x-y-\varepsilon\cdot n(y)|^{-5}-|x-\varepsilon\cdot n(x)-y|^{-5}\Big|\Big\}\;d\Omega(y)$$

$H(\varepsilon_B^{-1}+1)^5$

$$\leq 9\cdot(4\pi)^{-1}\cdot|\vec{\psi}|_0\cdot\int_{\partial\Omega}\Big\{3\cdot\varepsilon^{1/2}\cdot K_B\cdot\cancel{|\varepsilon_B|^{-5/2}}\cdot|x-y|^{-3/2}$$

$$+\ |x-\varepsilon\cdot n(x)-y|^3\cdot\Big|\,|x-\varepsilon\cdot n(x)-y|^5-|x-y-\varepsilon\cdot n(y)|^5\Big|$$

$$\cdot|x-\varepsilon\cdot n(x)-y|^{-5}\cdot|x-y-\varepsilon\cdot n(y)|^{-5}\Big\}\,d\Omega(y)$$

(wegen (2.23), (2.25))

$$\leq K_1\cdot\varepsilon^{1/2}+K_2\cdot\int_{\partial\Omega}\Big|\,|x-\varepsilon\cdot n(x)-y|-|x-y-\varepsilon\cdot n(y)|\,\Big|$$

$$\cdot\Big(\sum_{r=0}^{4}|x-\varepsilon\cdot n(x)-y|^r\cdot|x-y-\varepsilon\cdot n(y)|^{4-r}\Big)$$

$$\cdot|x-\varepsilon\cdot n(x)-y|^{-2}\cdot|x-y-\varepsilon\cdot n(y)|^{-5}\,d\Omega(y),$$

$H(\varepsilon_B^{-1}+1)^{9/2}$

(mit $K_1 := 27\cdot(4\pi)^{-1}\cdot|\vec{\psi}|_0\cdot K_B\cdot\cancel{|\varepsilon_B|^{-5/2}}\cdot Q_1(-3/2);$
$K_2 := 9\cdot(4\pi)^{-1}\cdot|\vec{\psi}|_0;$ wegen Lemma 4.1)

$$\leq K_1\cdot\varepsilon^{1/2}+K_2\cdot\int_{\partial\Omega}\varepsilon\cdot|n(x)-n(y)|\cdot 5\cdot(|x-y|+\varepsilon)^4$$

$$\cdot|x-\varepsilon\cdot n(x)-y|^{-2}\cdot|x-y-\varepsilon\cdot n(x)|^{-5}\,d\Omega(y)$$

$$\leq K_1\cdot\varepsilon^{1/2}+\varepsilon^{1/2}\cdot K_3\cdot\int_{\partial\Omega}|x-y|^{-3/2}\,d\Omega(y)$$

H✓ L7 (mit $K_3 := K_2\cdot 5\cdot K_B\cdot\cancel{|\varepsilon_B|^{-1}}(\varepsilon_B^{-1}+1)^4$, wegen (2.23), (2.25))

$$\leq K_4\cdot\varepsilon^{1/2}\quad(\text{mit } K_4 := K_1+K_3\cdot Q_2(-3/2);\ \text{wegen Lemma 4.1}).$$

Aus dieser Abschätzung folgt (6.19). □

<u>Definition 6.1: Sei</u> $A\subset\mathbb{R}^3$. <u>Dann erklären wir die Funktionen</u> $\vec{\phi}^A_{(1)},\dots,\vec{\phi}^A_{(6)}$ <u>durch</u>

$$\vec{\phi}^A_{(k)}:\ \mathbb{R}^3\ni x\to(\delta_{k1},\delta_{k2},\delta_{k3})\in\mathbb{R}^3\ \underline{\text{für}}\ 1\leq k\leq 3;$$

$$\vec{\phi}^A_{(4)}:\ \mathbb{R}^3\ni x\to(x_3,0,-x_1)\in\mathbb{R}^3,$$

$$\vec{\phi}^A_{(5)}:\ \mathbb{R}^3\ni x\to(x_2,-x_1,0)\in\mathbb{R}^3,$$

$$\vec{\phi}^A_{(6)}:\ \mathbb{R}^3\ni x\to(0,x_3,-x_2)\in\mathbb{R}^3.$$

<u>Satz 6.1: Sei</u> $\Omega'\subset\mathbb{R}^3$ <u>Gebiet</u>. <u>Dann hat die Menge</u>

$$L := \{\vec{v}\in C^1(\Omega')^3:\ D_kv_i+D_iv_k=0\ \text{für}\ 1\leq i,k\leq 3\}$$

<u>die Dimension</u> 6. <u>Das Tupel</u> $(\vec{\phi}^{\Omega'}_{(1)},\dots,\vec{\phi}^{\Omega'}_{(6)})$ <u>bildet eine Basis</u> <u>von</u> L.

<u>Beweis:</u> $\vec{\phi}^{\Omega'}_{(1)},\dots,\vec{\phi}^{\Omega'}_{(6)}$ sind Funktionen aus L, und das Tupel $(\vec{\phi}^{\Omega'}_{(1)},\dots,\vec{\phi}^{\Omega'}_{(6)})$ ist linear unabhängig. Zu beweisen ist, daß $(\vec{\phi}^{\Omega'}_{(1)},\dots,\vec{\phi}^{\Omega'}_{(6)})$ den Raum L aufspannt.

Sei also $\vec{u}\in L$. Sei $i,j\in\{1,2,3\}$ mit $i\neq j$. Es ist $D_ju_j=0$. Wir zeigen zunächst, daß $\partial/\partial x_j(D_iu_j)(x)$ für $x\in\Omega'$ existiert und gleich 0 ist. Bezeichne e_k für $k\in\{1,2,3\}$ den k-ten Einheitsvektor in $\mathbb{R}^3$. Es gilt für $x\in\Omega'$, $h\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit $\overline{K_h(x)}\subset\Omega'$:

$$(D_iu_j(x+h\cdot e_j)-D_iu_j(x))/h$$

$$=\lim_{r\to 0}\Big\{(u_j(x+h\cdot e_j+r\cdot e_i)-u_j(x+h\cdot e_j))/r$$

$$-(u_j(x+r\cdot e_i)-u_j(x))/r\Big\}/h$$

$$= \lim_{r\to 0}\left\{(u_j(x+h\cdot e_j+r\cdot e_i)-u_j(x+h\cdot e_j)-(u_j(x+r\cdot e_i)-u_j(x))/(h\cdot r)\right\}$$

$$= \lim_{r\to 0}\left\{\int_0^h (D_ju_j(x+\theta\cdot e_j+r\cdot e_i)-D_ju_j(x+\theta\cdot e_j))\,d\theta/(h\cdot r)\right\}$$

$= 0$ (wegen $D_ju_j = 0$).

Weil $D_iu_j = -D_ju_i$, folgt, daß $\partial^2/\partial x_j^2 u_i(x)$ für alle $x\in\Omega'$ existiert und gleich 0 ist. Dies gilt für $1\le i,j\le 3$ mit $i\neq j$. Wegen $D_iu_i = 0$ ist klar: $\partial^2/\partial x_i^2 u_i(x)$ existiert und ist gleich 0 ($1\le i\le 3$, $x\in\Omega'$). Wir haben also:

(6.23) $\partial^2/\partial x_j^2 u_i(x) = 0$ für $x\in\Omega'$ und für alle $i,j\in\{1,2,3\}$.

Wir betrachten nun die Funktion u_1. Für u_2,u_3 gelten entsprechende Überlegungen.

Sei $\mathring{x}\in\Omega'$, $\varepsilon>0$ mit $W(\mathring{x},\varepsilon)\subset\Omega'$. Für $a,b\in W(\mathring{x},\varepsilon)$ gilt wegen (6.23):

(6.24) Die Funktionen

$[0,1]\ni t\to D_2u_1(a_1,a_2+t\cdot(b_2-a_2),b_3)\in\mathbb{C}$,

$[0,1]\ni t\to D_3u_1(a_1,a_2,a_3+t\cdot(b_3-a_3))\in\mathbb{C}$

sind konstant.

Beachtet man die Gleichung $D_1u_1=0$, so folgt für $x,y\in W(\mathring{x},\varepsilon)$:

(6.25) $u_1(y)-u_1(x)$

$= u_1(y)-u_1(x_1,y_2,y_3)+u_1(x_1,y_2,y_3)-u_1(x_1,x_2,y_3)$
$+ u_1(x_1,x_2,y_3)-u_1(x)$

$$= \int_0^1 \Big\{D_1u_1(x_1+\theta\cdot(y_1-x_1),y_2,y_3)\cdot(y_1-x_1)$$
$$+ D_2u_1(x_1,x_2+\theta\cdot(y_2-x_2),y_3)\cdot(y_2-x_2)$$
$$+ D_3u_1(x_1,x_2,x_3+\theta\cdot(y_3-x_2))\cdot(y_3-x_3)\Big\}\,d\theta$$

$= D_2u_1(x_1,x_2,y_3)\cdot(y_2-x_2) + D_3u_1(x)\cdot(y_3-x_3)$

(wegen (6.24)).

Aus (6.25) folgt:

(6.26) $D_2u_1(a_1,a_2,b_3) = (u_1(b)-u_1(a))/(b_2-a_2)$

für $a,b\in W(\mathring{x},\varepsilon)$ mit $a_2\neq b_2$, $a_3=b_3$.

Nun findet man für $y\in W(\mathring{x},\varepsilon/4)$:

(6.27) $D_2u_1(y) = D_2u_1(y_1,\mathring{x}_2+\varepsilon/2,y_3)$ (wegen (6.24))

$= (u_1(y)-u_1(y_1,\mathring{x}_2+\varepsilon/2,y_3))/(y_2-\mathring{x}_2-\varepsilon/2)$

(wegen (6.26), mit $b=y$, $a=(y_1,\mathring{x}_2+\varepsilon/2,y_3)$).

Für alle $y\in W(\mathring{x},\varepsilon/4)$ ist aber $|y_2-\mathring{x}_2-\varepsilon/2|\ge\varepsilon/4$. Somit erhält man aus (6.27), daß $D_2u_1|W(\mathring{x},\varepsilon/4)\in C^1(W(\mathring{x},\varepsilon/4))$. Weil hierbei $\mathring{x}$ beliebig aus Ω' war, folgt: $D_2u_1\in C^1(\Omega')$. Ebenso zeigt man:

$D_3u_1 \in C^1(\Omega')$. Wegen $D_1u_1 = 0$ ist ohnehin klar: $D_1u_1 \in C^1(\Omega')$. Zusammen: $u_1 \in C^2(\Omega')$.

Sei wiederum $\overset{o}{x} \in \Omega'$ und $\varepsilon > 0$ mit $W(\overset{o}{x},\varepsilon) \subset \Omega'$. Für $y \in W(\overset{o}{x},\varepsilon)$ ist dann

$$D_2u_1(\overset{o}{x}_1,\overset{o}{x}_2,y_3) =$$

$$= D_2u_1(\overset{o}{x}_1,\overset{o}{x}_2,y_3) - D_2u_1(\overset{o}{x}) + D_2u_1(\overset{o}{x})$$

$$= \int_0^1 D_3D_2u_1(\overset{o}{x}_1,\overset{o}{x}_2,\overset{o}{x}_3+\theta\cdot(y_3-\overset{o}{x}_3))d\theta\cdot(y_3-\overset{o}{x}_3) + D_2u_1(\overset{o}{x})$$

$$= \int_0^1 D_2D_3u_1(\overset{o}{x}_1,\overset{o}{x}_2,\overset{o}{x}_3+\theta\cdot(y_3-\overset{o}{x}_3))d\theta\cdot(y_3-\overset{o}{x}_3) + D_2u_1(\overset{o}{x})$$

$$= D_2D_3u_1(\overset{o}{x}_1,\overset{o}{x}_2,\overset{o}{x}_3)\cdot(y_3-\overset{o}{x}_3) + D_2u_1(\overset{o}{x}) \quad \text{(wegen (6.24))}.$$

Damit erhält man aus (6.25), für $y \in W(\overset{o}{x},\varepsilon)$:

$$u_1(y) = D_2D_3u_1(\overset{o}{x})\cdot(y_3-\overset{o}{x}_3)\cdot(y_2-\overset{o}{x}_2) + D_2u_1(\overset{o}{x})\cdot(y_2-\overset{o}{x}_2)$$
$$+ D_3u_1(\overset{o}{x})\cdot(y_3-\overset{o}{x}_3) + u_1(\overset{o}{x}).$$

Es gibt also $a_o(\overset{o}{x},\varepsilon)$, $a_2(\overset{o}{x},\varepsilon)$, $a_3(\overset{o}{x},\varepsilon)$, $a_{23}(\overset{o}{x},\varepsilon) \in \mathbb{C}$, so daß für $y \in W(\overset{o}{x},\varepsilon)$ gilt:

$$u_1(y) = a_o(\overset{o}{x},\varepsilon) + a_2(\overset{o}{x},\varepsilon)\cdot y_2 + a_3(\overset{o}{x},\varepsilon)\cdot y_3 +$$
$$+ a_{2,3}(\overset{o}{x},\varepsilon)\cdot y_2\cdot y_3.$$

Ist auch $\overset{1}{x} \in \Omega'$, $\delta > 0$ mit $W(\overset{1}{x},\delta) \subset \Omega'$, und gilt $W(\overset{o}{x},\varepsilon) \cap W(\overset{1}{x},\delta) \neq \phi$, so ist

$$a_o(\overset{o}{x},\varepsilon) = a_o(\overset{1}{x},\delta),\ldots,a_{23}(\overset{o}{x},\varepsilon) = a_{23}(\overset{1}{x},\delta)$$

(Koeffizientenvergleich).

Da Ω' zusammenhängend ist, folgt nun: Es gibt a_o,a_2,a_3,a_{23} aus $\mathbb{C}$ mit

$$u_1(y) = a_o + a_2\cdot y_2 + a_3\cdot y_3 + a_{23}\cdot y_2\cdot y_3 \quad \text{für } y \in \Omega'.$$

Ebenso findet man $b_o,b_1,b_3,b_{13} \in \mathbb{C}$ mit

$$u_2(y) = b_o + b_1\cdot y_1 + b_3\cdot y_3 + b_{13}\cdot y_1\cdot y_3 \quad \text{für } y \in \Omega',$$

sowie $c_o,c_1,c_2,c_{12} \in \mathbb{C}$ mit

$$u_3(y) = c_o + c_1y_1 + c_2y_2 + c_{12}y_1y_2 \qquad (y \in \Omega').$$

Wegen $D_1u_3 = -D_3u_1$, ist

$$c_1 + c_{12}y_2 = -a_3 - a_{23}y_2 \quad \text{für } y \in \Omega'.$$

Daraus ergibt sich: $c_1 = -a_3$, $c_{12} = -a_{23}$.

Aus $D_1u_2 = -D_2u_1$ folgt analog: $b_1 = -a_2$, $b_{13} = -a_{23}$, sowie aus $D_2u_3 = -D_3u_2$: $c_2 = -b_3$, $c_{12} = -b_{13}$.

Daraus erhält man: $c_{12} = b_{13} = a_{23} = 0$. Zusammen hat man dann für $y \in \Omega'$:

$$u_1(y) = a_o + a_2\cdot y_2 + a_3\cdot y_3,$$
$$u_2(y) = b_o - a_2\cdot y_1 + b_3\cdot y_3,$$
$$u_3(y) = c_o - a_3\cdot y_1 - b_3\cdot y_2.$$

Somit gilt:

$$\vec{u} = a_o\cdot\vec{\phi}^{\Omega'}_{(1)} + b_o\cdot\vec{\phi}^{\Omega'}_{(2)} + c_o\cdot\vec{\phi}^{\Omega'}_{(3)} + a_3\cdot\vec{\phi}^{\Omega'}_{(4)} + a_2\cdot\vec{\phi}^{\Omega'}_{(5)} + b_3\cdot\vec{\phi}^{\Omega'}_{(6)}.$$

Es ist also $u \in L$. □

<u>Lemma 6.5:</u> <u>Die Funktionen $\vec{\phi}^{\partial\Omega}_{(1)},\ldots,\vec{\phi}^{\partial\Omega}_{(6)}$ sind linear unabhängig (im $\mathbb{C}$-Vektorraum aller Funktionen von $\partial\Omega$ in $\mathbb{C}^3$).</u>

<u>Beweis:</u> Seien $\gamma_1,\ldots,\gamma_6 \in \mathbb{C}$ mit

$$\vec{v} = \sum_{r=1}^{6} \gamma_r\cdot\vec{\phi}^{\partial\Omega}_{(r)} = 0.$$

Das bedeutet für die Komponente v_1 von $\vec{v}$:

$$v_1(x) = \gamma_1 + \gamma_4\cdot x_3 + \gamma_5\cdot x_2 = 0 \text{ für } x \in \partial\Omega,$$

so daß also $\partial\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^3 : \gamma_1 + \gamma_4\cdot x_3 + \gamma_5\cdot x_2 = 0\}$.

Sei angenommen: $\gamma_5 \neq 0$. Man kann dann $\mathring{x} \in \Omega$ wählen mit

$$\gamma_1 + \gamma_4\cdot\mathring{x}_3 + \gamma_5\cdot\mathring{x}_2 \neq 0.$$

Wegen $\gamma_5 \neq 0$ hat die Abbildung

$$\mathbb{R} \ni t \to \gamma_1 + \gamma_4\cdot\mathring{x}_3 + \gamma_5\cdot t \in \mathbb{C}$$

nur eine Nullstelle. Somit muß für alle $t \in [\mathring{x}_2,\infty)$ oder für alle $t \in (-\infty,\mathring{x}_2]$ gelten:

$$\gamma_1 + \gamma_4\cdot\mathring{x}_3 + \gamma_5\cdot t \neq 0.$$

Die Abbildung

$$f:\mathbb{R} \ni t \to (\mathring{x}_1, t, \mathring{x}_3) \in \mathbb{C}^3$$

hat also folgende Eigenschaften: f stetig, $f(\mathring{x}_2) \in \Omega$, $f([\mathring{x}_2,\infty)) \cap \partial\Omega = \phi$ oder $f((-\infty,\mathring{x}_2]) \cap \partial\Omega = \phi$. Das bedeutet: $f([\mathring{x}_2,\infty)) \subset \Omega$ oder $f((-\infty,\mathring{x}_2]) \subset \Omega$. Die Mengen $f((-\infty,\mathring{x}_2])$, $f([\mathring{x}_2,\infty))$ sind aber unbeschränkt, weshalb auch Ω unbeschränkt sein müßte - ein Widerspruch! Es ist also $\gamma_5 = 0$. Analog zeigt man: $\gamma_4 = 0$. Wegen $v_1 = 0$ muß somit auch $\gamma_1 = 0$ gelten. Mit entsprechenden Argumenten kann man aus der Gleichung $v_2 = v_3 = 0$ folgern, daß auch $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$ ist.

<u>Lemma 6.6:</u>

I) <u>Sei</u> $\vec{\psi} \in C^0(\partial\Omega)^3$ <u>mit</u>

$$\sum_{i,k=1}^{3} \int_{\Omega} (D_i V_{\varepsilon k}(x,\vec{\psi}) + D_k V_{\varepsilon i}(x,\vec{\psi}))^2\, dx \to 0 \ \underline{\text{für}}\ \varepsilon\downarrow 0.$$

<u>Dann ist</u>

$$D_i(V_k(\cdot,\vec{\psi})|\Omega) + D_k(V_i(\cdot,\vec{\psi})|\Omega) = 0 \ \underline{\text{für}}\ i,k = 1,2,3.$$

II) <u>Sei</u> $\vec{\psi} \in C^0(\partial\Omega)^3$ <u>mit</u>

$$\sum_{i,k=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}} (D_i V_k^{\varepsilon}(x,\vec{\psi}) + D_k V_i^{\varepsilon}(x,\vec{\psi}))^2\, dx \to 0 \ \underline{\text{für}}\ \varepsilon\downarrow 0.$$

<u>Dann gilt</u>

$$\vec{V}(\cdot,\vec{\psi}) = 0;\quad Q(\cdot,\vec{\psi})|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega} = 0;$$

<u>es gibt</u> $k_i \in \mathbb{C}$ <u>mit</u> $Q(\cdot,\psi)|\Omega = k_i$.

<u>Beweis:</u> Wir zeigen zunächst I). Sei also $\vec{\psi}$ wie in I) gegeben, und sei $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$. Wegen (6.9) und dem Konvergenzsatz von Lebesgue gilt:

$$\int_\Omega \sum_{i,k=1}^{3} (D_i V_{\varepsilon k}(\cdot,\vec{\psi}) + D_k V_{\varepsilon i}(\cdot,\vec{\psi}))^2 \wedge \gamma \, dx$$

$$\to \int_\Omega \sum_{i,k=1}^{3} (D_i V_k(\cdot,\vec{\psi}) + D_k V_i(\cdot,\vec{\psi}))^2 \wedge \gamma \, dx \text{ für } \varepsilon \downarrow 0.$$

Aufgrund der Voraussetzung in I) erhält man daraus:

$$\int_\Omega (D_i V_k(\cdot,\vec{\psi}) + D_k V_i(\cdot,\vec{\psi}))^2 \wedge \gamma \, dx = 0.$$

Somit ist

$$(D_i (V_k(\cdot,\vec{\psi})|\Omega) + D_k (V_i(\cdot,\vec{\psi})|\Omega))^2 \wedge \gamma = 0.$$

Weil γ beliebig aus $(0,\infty)$ war, folgt I).

Sei nun $\vec{\psi}$ gegeben wie in II). Man notiert für $\gamma > 0$:

$$\int_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}} \sum_{i,k=1}^{3} (D_i V_k^\varepsilon(\cdot,\vec{\psi}) + D_k V_i^\varepsilon(\cdot,\vec{\psi}))^2 \wedge \gamma \cdot \chi_K(0) \, dx$$

$$\to \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}} \sum_{i,k=1}^{3} (D_i V_k(\cdot,\vec{\psi}) + D_k V_i(\cdot,\vec{\psi}))^2 \wedge \gamma \cdot \chi_K(0) \, dx \quad (\varepsilon \downarrow 0).$$

Mit Argumenten wie im Beweis von I) folgt hieraus:

$$D_i (V_k(\cdot,\vec{\psi})|\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}) + D_k (V_i(\cdot,\vec{\psi})|\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}) = 0 \text{ für } 1 \le i,k \le 3.$$

$\vec{V}(\cdot,\vec{\psi})|\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ ist somit Lösung des Gleichungssystems

$$D_k u_i + D_i u_k = 0 \quad (1 \le i,k \le 3) \text{ auf } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}.$$

[Zur Erinnerung: Ω und $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ sind zusammenhängend.

Nach Satz 6.1 ist also $\vec{V}(\cdot,\vec{\psi})|\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ eine Linearkombination der Funktionen $\vec{\phi}_{(1)}^{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}}, \ldots, \vec{\phi}_{(6)}^{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}}$. Andererseits wissen wir aus Lemma 6.3, daß $\vec{V}(\cdot,\vec{\psi})$ für große x abfällt. Da die Funktionen $\vec{\phi}_{(1)}^{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}}, \ldots, \vec{\phi}_{(6)}^{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}}$ dieses Verhalten nicht zeigen, muß also gelten: $\vec{V}(\cdot,\vec{\psi})|\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega} = 0$. Gemäß Lemma 6.1 ist $\vec{V}(\cdot,\vec{\psi})$ stetig auf $\mathbb{R}^3$. Somit gilt: $\vec{V}(\cdot,\vec{\psi})|\partial\Omega = 0$. Jetzt erhält man aus (6.15):

$$\sum_{i,k=1}^{3} \int_{\partial\Omega} (D_k V_{\varepsilon i}(x,\vec{\psi}) + D_i V_{\varepsilon k}(x,\vec{\psi}))^2 \, dx \to 0 \text{ für } \varepsilon \downarrow 0.$$

Daraus und aus I) folgt:

$$D_i (V_k(\cdot,\vec{\psi})|\Omega) + D_k (V_i(\cdot,\vec{\psi})|\Omega) = 0 \text{ für } i,k = 1,2,3.$$

Somit ist $\vec{V}(\cdot,\vec{\psi})|\Omega$ Lösung des Gleichungssystems

$$D_k u_i + D_i u_k = 0 \quad (1 \le i,k \le 3) \text{ auf } \Omega.$$

Man wendet nun wiederum Satz 6.1 an und erhält, daß $\vec{V}(\cdot,\vec{\psi})|\Omega$ eine Linearkombination der Funktionen $\vec{\phi}_{(1)}^{\Omega}, \ldots, \vec{\phi}_{(6)}^{\Omega}$ ist. Andererseits wissen wir, daß $\vec{V}(\cdot,\vec{\psi})|\bar{\Omega}$ stetig ist, mit $\vec{V}(\cdot,\vec{\psi})|\partial\Omega = 0$. Aufgrund der Eigenschaften von $\vec{\phi}_{(1)}^{\Omega}, \ldots, \vec{\phi}_{(6)}^{\Omega}$ kann damit $\vec{V}(\cdot,\vec{\psi})|\Omega$ nur die Nullfunktion sein. Insgesamt haben wir also: $\vec{V}(\cdot,\vec{\psi}) = 0$ überall in $\mathbb{R}^3$. Aus der ersten Differentialgleichung in Lemma 4.2, II) folgt:

$$D_i Q(\cdot,\vec{\psi}) = 0 \text{ für } 1 \le i \le 3.$$

Daher gibt es $k_i, k_a \in \mathbb{C}$ mit

$$Q(x,\vec{\psi}) = k_i \text{ für } x \in \Omega, \quad Q(x,\vec{\psi}) = k_a \text{ für } x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}.$$

Weil $Q(\cdot,\vec{\psi})$ für große Werte von x abfällt (siehe (6.13)), muß damit $Q(\cdot,\vec{\psi})|\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ die Nullfunktion sein. □

Lemma 6.7: Sei $p \in (1,\infty)$. Dann ist

$$\{F \in L_{1/(1-1/p)}(\partial\Omega)^3 : F - T_p^* F = 0\} = \{k\cdot[\vec{n}] : k \in \mathbb{C}\}.$$

Beweis: Es ist

$$\vec{n} \in C^0(\partial\Omega)^3 \subset L_{(1-1/p)^{-1}}(\partial\Omega)^3.$$

Für $j \in \{1,2,3\}$ und für fast alle $x \in \partial\Omega$ ist

$$T^*(\vec{n})_j(x)$$

$$= 3/(2\pi)\cdot\int_{\partial\Omega} (y_j - x_j)\cdot\langle y-x,\vec{n}(y)\rangle\cdot\langle y-x,\vec{n}(x)\rangle\cdot|y-x|^{-5}\, d\Omega(y)$$

(siehe Definition 4.2, 5.1)

$$= 2\cdot\sum_{k=1}^{3} n_k(x)\cdot\int_{\partial\Omega} K_{jk}(x,y)\, d\Omega(y)$$

$$= n_j(x) \quad \text{(siehe Lemma 4.4).}$$

Es folgt mit Definition 5.2:

$$[\vec{n}] - T_p^*([\vec{n}]) = 0;$$

also:

$$[\vec{n}] \in \{F \in L_{(1-1/p)^{-1}}(\partial\Omega)^3 : F - T_p^*(F) = 0\}.$$

Sei umgekehrt $F \in L_{1/(1-1/p)}(\partial\Omega)^3$ mit $F - T_p^* F = 0$. Nach Lemma 5.4 kann man $\vec{\psi} \in F$ so wählen, daß $\vec{\psi} \in C^0(\partial\Omega)^3$ ist. Da $\vec{\psi} - \vec{T}^*(\vec{\psi}) = 0$, folgt aus (6.16):

$$\sum_{i,k=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}} (D_k V_i^{\varepsilon}(x,\vec{\psi}) + D_i V_k^{\varepsilon}(x,\vec{\psi}))^2\, dx \to 0 \text{ für } \varepsilon\downarrow 0.$$

Daraus erhält man nach Lemma 6.6, II): $\vec{V}(.,\vec{\psi}) = 0$; es gibt $k_i \in \mathbb{C}$ mit $Q(.,\vec{\psi})|\Omega = k_i$. Für $l,m \in \{1,2,3\}$, $x \in \Omega$ ist deshalb

$$T_{lm}(\vec{V}(.,\vec{\psi})|\mathbb{R}^3\setminus\partial\Omega, Q(.,\vec{\psi}))(x) = -\delta_{lm}\cdot k_i.$$

Somit hat man für $x \in \partial\Omega$, $1 \le l \le 3$, mit T_{lm} aus Lemma 3.2:

$$\sum_{m=1}^{3} T_{lm}(\vec{V}(.,\vec{\psi})|\mathbb{R}^3\setminus\partial\Omega, Q(.,\vec{\psi}))(x-\varepsilon\cdot n(x))\cdot n_m(x) \to -k_i\cdot n_l(x)$$

für $\varepsilon\downarrow 0$.

Jetzt folgt mit (4.71):

$$-k_i\cdot n_l(x) = (1/2)\cdot(\psi_l(x) + T^*(\vec{\psi})_l(x)) \text{ für } x \in \partial\Omega,\ 1 \le l \le 3.$$

Wir haben damit:

$$-k_i\cdot[\vec{n}] = (1/2)\cdot([\vec{\psi}] + T_p^*([\vec{\psi}])) = [\vec{\psi}],$$

wobei die zweite Gleichheit wegen $[\vec{\psi}] = F$ und wegen der Auswahl von F gilt. Somit gilt: $F \in \{k\cdot[\vec{n}] : k \in \mathbb{C}\}$. □

Im Folgenden benötigen wir einige Elemente der Riesz-Schauder-Theorie (Fredholmsche Alternative in Banachräumen). Diese Elemente fassen wir in folgendem Satz zusammen:

Satz 6.2: Sei $(B,\|\ \|)$ ein Banachraum, $T: B \to B$ ein linearer, kompakter Operator. Sei B' der Dualraum zu B, $T': B' \to B'$ der zu T duale Operator. Setze

$$N := \{x \in B : x - Tx = 0\},\quad N' := \{y \in B' : y - T'y = 0\}.$$

Dann gilt folgende Alternative:

I) Entweder ist $N = \{0\}$, $N' = \{0\}$. Dann gibt es zu jedem $f \in B$ genau ein $x \in B$ mit $x - Tx = f$, und zu jedem $g \in B'$ genau ein $y \in B'$ mit $y - T'y = g$.

II) Oder es ist $N \neq \{0\}$, $N' \neq \{0\}$. Dann ist $\dim N = \dim N' < \infty$, und es gibt zu $f \in B$ genau dann ein Element $x \in B$ mit $x - Tx = f$, wenn $y(f) = 0$ für alle $y \in B'$.

Im Fall II) gilt außerdem:

Es gibt eine Zahl $L_3(T) > 0$, so daß

$$(6.28) \quad \inf\{\|x+z\|:\ z \in N\} \leq L_3(T)\cdot\|x - Tx\| \quad \text{für } x \in B.$$

Beweis: Die Alternative zwischen I) und II) ist ein Standardergebnis; siehe etwa [Y], S. 283-285.

Wir betrachten nun den Fall, daß Aussage II) zutrifft.

N ist abgeschlossener Unterraum von B. Somit wird der Quotientenraum B/N zu einem Banachraum, wenn man als Norm die Abbildung

$$\|\ \ \|:\ B/N \ni F \to \inf\{\|x\|:\ x \in F\} \in [0,\infty).$$

verwendet (siehe [Y], S. 59). Die Abbildung $L: B \to B$, $Lx := x - Tx$ ist linear. Sei $R_L := \{Lx:\ x \in B\}$. Wie aus der linearen Algebra bekannt, kann man eine Abbildung $\mathcal{T}: B/N \to R_L$ definieren, indem man für $F \in B/N$ setzt: $\mathcal{T}(F) = Lx$, wobei x ein beliebiges Element aus F ist. Bekanntlich ist $\mathcal{T}$ ein Vektorraumisomorphismus. Insbesondere ist $\mathcal{T}^{-1}$ definiert und linear. Wir wollen zeigen, daß $\mathcal{T}^{-1}$ stetig ist.

Nach [Y], S. 283 ist R_L abgeschlossener Unterraum von B, also ein Banachraum. Sei (x_n) Folge in R_L, $x \in R_L$, $F \in B/N$ mit $x_n \to x$, $\mathcal{T}^{-1}(x_n) \to F$ $(n\to\infty)$. Sei $y \in F$. Zu $n \in \mathbb{N}$ wähle man $z_n \in \mathcal{T}^{-1}(x_n)$. Wegen $\mathcal{T}^{-1}(x_n) \to F$ $(n\to\infty)$ gilt:

$$\inf\{\|z_n - y + \alpha\|:\ \alpha \in N\} \to 0 \quad (n\to\infty).$$

Man kann also eine Folge (α_n) in N wählen, so daß $\|z_n - y + \alpha_n\| \to 0$ $(n\to\infty)$; das heißt: $z_n + \alpha_n \to y$ $(n\to\infty)$. Da L stetig, haben wir: $L(z_n+\alpha_n) \to Ly$ $(n\to\infty)$. Es ist aber $L(z_n+\alpha_n) = L(z_n) = x_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Somit gilt wegen $x_n \to x$ $(n\to\infty)$: $x = Ly \equiv \mathcal{T}F$. Daraus folgt: $\mathcal{T}^{-1}x = F$. $\mathcal{T}^{-1}$ ist also ein abgeschlossener Operator. Mit dem Satz vom abgeschlossenen Graphen folgt: $\mathcal{T}^{-1}$ ist stetig. Es muß also $L_3(T) > 0$ geben, so daß

$$(6.29) \quad \|\mathcal{T}^{-1}x\| \leq L_3(T)\cdot\|x\| \quad \text{für } x \in R_L.$$

Ist dann $y \in B$, so ist $Ly \equiv y - Ty \in R_L$ und $\mathcal{T}^{-1}(Ly) = \{y+z:\ z \in N\}$. Somit folgt (6.28) aus (6.29). □

Lemma 6.8: Sei $\vec{a} \in C^0(\partial\Omega)^3$ mit

$$(6.30) \quad \int_{\partial\Omega} \langle \vec{a}(y), \vec{n}(y)\rangle \, d\Omega(y) = 0.$$

Dann gibt es $\vec{\phi} \in C^0(\partial\Omega)^3$ mit $(1/2)\cdot(\vec{\phi} - \vec{T}(\vec{\phi})) = \vec{a}$.

Beweis: Sei $p \in (1,\infty)$. Gemäß Lemma 6.7 wird der Unterraum

$$\{F \in L_{(1-1/p)^{-1}}(\partial\Omega)^3:\ F - T_p^* F = 0\}$$

von $L_{(1-1/p)^{-1}}(\partial\Omega)^3$ von $[\vec{n}]$ erzeugt. Nach Satz 5.1 ist T_p kompakter Operator auf $L_p(\partial\Omega)^3$, und T_p^* ist der zu T_p duale Operator. Jetzt folgt aus Satz 6.1, II): Es gibt $G \in L_p(\partial\Omega)^3$ mit $G - T_p G = 2\cdot[\vec a]$. Weil $\vec a$ stetig ist, existiert nach Lemma 5.4 eine Funktion $\vec\phi \in G$ mit $\vec\phi \in C^0(\partial\Omega)^3$. Dies bedeutet: $\vec\phi - \vec T(\vec\phi) = 2\cdot\vec a$. □

Nun können wir eine Lösung des Innenraumproblems zum Stokessystem angeben:

<u>Satz 6.3:</u> <u>Sei</u> $\vec a \in C^0(\partial\Omega)^3$ <u>mit</u>

$$\int_{\partial\Omega} \langle \vec a(y), \vec n(y)\rangle \, d\Omega(y) = 0.$$

<u>Dann gibt es</u> $\vec\phi \in C^0(\partial\Omega)^3$ <u>mit</u> $\vec a = (1/2)\cdot(\vec\phi - \vec T(\vec\phi))$.

<u>Für eine solche Funktion</u> $\vec\phi$ <u>gilt, mit der Abkürzung</u> $\vec u := \vec W(.,\vec\phi)_i$ <u>(siehe Satz</u> 4.1), $\pi := \Pi(.,\vec\phi)\,|\,\Omega$:

$$\vec u \in C^0(\bar\Omega)^3, \quad \vec u|\Omega \in C^\infty(\Omega)^3, \quad \pi \in C^\infty(\Omega)^3,$$

$$-\nu\cdot\Delta(\vec u|\Omega) + \nabla\pi = 0, \quad \mathrm{div}(\vec u|\Omega) = 0, \quad \vec u|\partial\Omega = \vec b.$$

<u>Beweis:</u> Lemma 4.2, I), II); Satz 4.1, Lemma 6.8. □

<u>Lemma 6.9:</u> <u>Sei</u> $\vec\psi \in C^0(\partial\Omega)^3$ <u>mit</u> $\vec V(.,\vec\psi) = 0$, $Q(.,\vec\psi)\,|\,\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega = 0$, $Q(.,\vec\psi)\,|\,\Omega = k_i$ <u>für ein</u> $k_i \in \mathbb{C}$, <u>und</u> $\vec\psi + \vec T^*(\vec\psi) = 0$.

<u>Dann ist</u> $\vec\psi = 0$.

<u>Beweis:</u> Aufgrund der Voraussetzungen an $\vec\psi$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{3} T_{kl}(\vec V(.,\vec\psi)\,|\,\mathbb{R}^3\setminus\partial\Omega, Q(.,\vec\psi))(x - \kappa\cdot n(x))\cdot n_l(x) \to$$

$$\to -k_i\cdot n_l(x) \quad (\kappa\downarrow 0),$$

$$\sum_{k=1}^{3} T_{kl}(\vec V(.,\vec\psi)\,|\,\mathbb{R}^3\setminus\partial\Omega, Q(.,\vec\psi))(x + \kappa\cdot n(x))\cdot n_l(x) \to 0 \quad (\kappa\downarrow 0),$$

für $x \in \partial\Omega$, $1 \le l \le 3$. Jetzt folgt aus Lemma 4.8: $\vec\psi = -k_i\cdot\vec n$. Nach Lemma 6.7 und Definition 5.2 bedeutet dies: $\vec\psi - \vec T^*(\vec\psi) = 0$. Wegen der Voraussetzung $\vec\psi + \vec T^*(\vec\psi) = 0$ folgt: $\vec\psi = 0$. □

<u>Lemma 6.10:</u> <u>Es gibt</u> $\vec\psi_{(1)},\dots,\vec\psi_{(6)} \in \bigcap_{\rho\in(0,1)} C^\rho(\partial\Omega)^3$, <u>so daß das Tupel</u> $([\vec\psi_{(1)}],\dots,[\vec\psi_{(6)}])$ <u>eine Basis des Unterraums</u>

$$\{F \in L_{(1-1/p)^{-1}}(\partial\Omega)^3 : F + T_p^*(F) = 0\}$$

<u>von</u> $L_{(1-1/p)^{-1}}(\partial\Omega)^3$ <u>bildet</u>. $L(p\in(1,\infty))$

<u>Sei</u> $\vec a \in C^0(\partial\Omega)^3$ <u>mit</u>

$$\int_{\partial\Omega} \langle \vec\psi_{(k)}(y), \vec a(y)\rangle \, d\Omega(y) = 0 \text{ für } 1 \le k \le 6.$$

<u>Dann gibt es</u> $\vec\phi \in C^0(\partial\Omega)^3$ <u>mit</u>

$$\vec a = -(1/2)\cdot(\vec\phi + \vec T(\vec\phi)).$$

<u>Für die in Definition</u> 6.1 <u>eingeführten Funktionen</u> $\vec\phi^{\partial\Omega}_{(1)},\dots,\vec\phi^{\partial\Omega}_{(6)}$ <u>gilt:</u>

Das Tupel $([\vec{\phi}^{\partial\Omega}_{(1)}],\ldots,[\vec{\phi}^{\partial\Omega}_{(6)}])$ bildet eine Basis von

$\{G \in L_p(\partial\Omega)^3 : G + T_p G = 0\}$, für $p \in (1,\infty)$.

Beweis: Man rechnet leicht nach, daß

$$-\nu\cdot\Delta\vec{\phi}^{\Omega}_{(k)} = 0,\ \operatorname{div}\vec{\phi}^{\Omega}_{(k)} = 0,\ T_{lm}(\vec{\phi}^{\Omega}_{(k)},0) = 0,$$

für $1 \le k \le 6$, $1 \le l,m \le 3$. Damit folgt aus Satz 3.1:

$$(\phi^{\Omega}_{(k)})_r(x) = -\int_{\partial\Omega}\sum_{l,m=1}^{3} S_{lmr}(x-y)\cdot(\phi^{\partial\Omega}_{(k)})_l(y)\cdot n_m(y)\,d\Omega(y),$$

und daraus nach Definition 4.1:

$$(\phi^{\Omega}_{(k)})_r(x) = W_r(x,\vec{\phi}^{\partial\Omega}_{(k)}),\ \text{für } 1 \le r \le 3,\ 1 \le k \le 6,\ x \in \Omega.$$

Nun erhält man aus Satz 4.1, für $x \in \partial\Omega$, $1 \le k \le 6$:

$$\lim_{y\to x,\, y\in\Omega} \vec{\phi}^{\Omega}_{(k)}(y) = (1/2)\cdot(\vec{\phi}^{\partial\Omega}_{(k)} - \vec{T}(\vec{\phi}^{\partial\Omega}_{(k)}))(x).$$

Weil aber

$$\lim_{y\to x,\, y\in\Omega} \vec{\phi}^{\Omega}_{(k)}(y) = \vec{\phi}^{\partial\Omega}_{(k)}(x) \quad (x \in \partial\Omega),$$

folgt:

$$(6.31)\quad 0 = (1/2)\cdot(\vec{\phi}^{\partial\Omega}_{(k)} + \vec{T}(\vec{\phi}^{\partial\Omega}_{(k)})),\ \text{für } 1 \le k \le 6.$$

Sei $p \in (1,\infty)$. Wegen (6.31) sind die Äquivalenzklassen $[\vec{\phi}^{\partial\Omega}_{(1)}],\ldots,[\vec{\phi}^{\partial\Omega}_{(6)}]$ nicht-triviale Lösungen der Gleichung $0 = F+T_pF$. Aufgrund von Lemma 6.5 sind diese Lösungen linear unabhängig. Mit Satz 6.2 folgt:

$$(6.32)\quad \dim\{G \in L_{(1-1/p)^{-1}}(\partial\Omega)^3 : \psi + T^*_p\psi = 0\}$$

$$= \dim\{F \in L_p(\partial\Omega)^3 : F+T_pF = 0\} \ge 6.$$

Wir zeigen nun, daß auch die umgekehrte Ungleichung gilt. Dazu nehmen wir an, es gebe 7 linear unabhängige Elemente $G_{(1)},\ldots,G_{(7)}$ aus $L_{(1-1/p)^{-1}}(\partial\Omega)^3$ mit $G_{(k)}+T^*_p(G_{(k)}) = 0$ für $1 \le k \le 7$. Nach Lemma 5.4 gibt es $\vec{\psi}_{(k)} \in G_k$ mit $\vec{\psi}_{(k)} \in C^0(\partial\Omega)^3$, so daß

$$\vec{\psi}_{(k)} + \vec{T}^*(\vec{\psi}_{(k)}) = 0 \quad (1 \le k \le 7).$$

Damit ergibt sich aus (6.15) und Lemma 6.6, I):

$$D_l(V_m(\cdot,\vec{\psi}_{(k)})|\Omega) + D_m(V_l(\cdot,\vec{\psi}_{(k)})|\Omega) = 0 \text{ für } 1 \le l,m \le 3,\ 1 \le k \le 7.$$

Wegen Satz 6.1 muß es also $\lambda_1,\ldots,\lambda_7 \in \mathbb{C}$ geben mit $(\lambda_1,\ldots,\lambda_7) \ne 0$ und

$$\sum_{k=1}^{7} \lambda_k\cdot\vec{V}(\cdot,\vec{\psi}_{(k)})|\Omega = 0.$$

Setze $\vec{\psi} := \sum_{k=1}^{7} \lambda_k\cdot\vec{\psi}_{(k)}$. Dann ist $\vec{\psi} \in C^0(\partial\Omega)^3$ und

$$\vec{V}(\cdot,\vec{\psi}) = \sum_{k=1}^{7} \lambda_k\cdot\vec{V}(\cdot,\vec{\psi}_{(k)}),$$

so daß also $\vec{V}(\cdot,\vec{\psi})|\Omega = 0$. Wegen Lemma 6.1 bedeutet dies: $\vec{V}(\cdot,\vec{\psi})|\partial\Omega = 0$. (6.16) liefert nun:

$$\sum_{i,k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}} (D_kV^{\varepsilon}_i(x,\vec{\psi}) + D_iV^{\varepsilon}_k(x,\vec{\psi}))^2\,dx \to 0 \text{ für } \varepsilon\downarrow 0.$$

Damit hat man wegen Lemma 6.6, II): $\vec{V}(\cdot,\vec{\psi}) = 0$, $Q(\cdot,\vec{\psi})|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega} = 0$, $Q(\cdot,\vec{\psi})|\Omega = k_i$ für ein $k_i \in \mathbb{C}$. Nach Auswahl der $\vec{\psi}_{(k)}$ gilt aber auch: $\vec{\psi}_{(k)} + \vec{T}^*(\vec{\psi}_{(k)}) = 0$ $(1 \le k \le 7)$. Damit besagt Lemma 6.9: $\vec{\psi} = 0$. Nach

Annahme waren aber $[\vec{\psi}_{(1)}],\dots,[\vec{\psi}_{(7)}]$ linear unabhängig. Weil $[\vec{\psi}] = \sum_{k=1}^{7} \lambda_k\cdot[\vec{\psi}_{(k)}]$, hat man deshalb: $\lambda_1 = \dots = \lambda_7 = 0$.
Widerspruch!

Jetzt ist also gezeigt:

$$\dim\{G \in L_{(1-1/p)^{-1}}(\partial\Omega)^3 : G+T_p^*G = 0\} = 6.$$

Nach Lemma 5.4 gibt es zu $G \in L_{(1-1/p)^{-1}}(\partial\Omega)^3$ mit $G+T_p^*G = 0$ eine Funktion $\vec{g} \in G$ mit $\vec{g} \in \bigcap_{p\in(0,1)} C^p(\partial\Omega)^3$. Damit ist die erste Behauptung des Lemmas bewiesen.

Der Operator $T_p : L_p(\partial\Omega)^3 \to L_p(\partial\Omega)^3$ ist kompakt, und T_p^* ist der zu T_p duale Operator. Sei nun $\vec{a}$ wie im Lemma gegeben. Dann erhält man aus Satz 5.2, II): Es gibt $F \in L_p(\partial\Omega)^3$ mit $[-2\cdot\vec{a}] = F+T_pF$. Da nach Lemma 5.4 eine Funktion $\phi \in F \cap C^0(\partial\Omega)^3$ existiert, folgt die zweite Behauptung des Lemmas.

Wie oben bewiesen, gilt statt der Ungleichung in (6.32) sogar die Gleichheit. Andererseits wurde gezeigt, daß das Tupel $([\vec{\phi}^{\partial\Omega}_{(1)}],\dots,[\vec{\phi}^{\partial\Omega}_{(6)}])$ linear unabhängig ist in $\{F \in L_p(\partial\Omega)^3 : F+T_pF = 0\}$. Somit folgt die dritte Behauptung des Lemmas. □

Lemma 6.11: Es gibt $L_4 > 0$, und zu $r \in (1,\infty)$ eine Zahl $L_5(r) > 0$, so daß $\bar{\Omega} \subset K_{L_4}(0)$, und so daß für $r \in (1,\infty)$, $\vec{\phi} \in C^0(\partial\Omega)^3$, $x \in \mathbb{R}^3$ mit $|x| \ge L_4$, sowie für $i,k,l \in \{1,2,3\}$ gilt:

$$|W_i(x,\vec{\phi})|\cdot|x|,\ |D_kW_i(x,\vec{\phi})|\cdot|x|^2,\ |D_lD_kW_i(x,\vec{\phi})|\cdot|x|^3,\ |\Pi(x,\vec{\phi})|\cdot|x|,\ |D_k\Pi(\cdot,\vec{\phi})|\cdot|x|^2 \le L_5(r)\cdot\|\vec{\phi}\|_r. \tag{6.33}$$

Beweis: Wir gehen ähnlich vor wie im Beweis von Lemma 6.3. Zunächst wählen wir $L_{4,1} > 0$, so daß $\bar{\Omega} \subset K_{L_{4,1}}(0)$. Es gibt $L_4 > L_{4,1} \vee 1$, so daß

$$t - L_{4,1} \ge t/2 \text{ für } t \in \mathbb{R},\ t \ge L_4. \tag{6.34}$$

Seien $i,j,k,l \in \{1,2,3\}$, $r \in (1,\infty)$, $\vec{\phi} \in C^0(\partial\Omega)^3$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&|D_kD_lW_i(x,\vec{\phi})| \\
&\le Q_2\cdot\int_{\partial\Omega} |x-y|^{-4}\cdot\sum_{j=1}^{3} |\phi_j(y)|\, d\Omega(y) \quad (\text{siehe } (4.7)) \\
&\le Q_2\cdot\int_{\partial\Omega} (|x|-L_{4,1})^{-4}\cdot\sum_{j=1}^{3} |\phi_j(y)|\, d\Omega(y) \\
&\le Q_2\cdot 2^4\cdot|x|^{-4}\cdot\sum_{j=1}^{3}\int_{\partial\Omega} |\phi_j(y)|\, d\Omega(y) \quad (\text{wegen } (6.34)) \\
&\le L_{5,1}(r)\cdot|x|^{-4}\cdot\sum_{j=1}^{3}\Big(\int_{\partial\Omega} |\phi_j|^r\, d\Omega\Big)^{1/r} \\
&\qquad \Big(\text{mit } L_{5,1}(r) := Q_2\cdot 8\cdot\Big(\int_{\partial\Omega} d\Omega\Big)^{1-1/r}\Big) \\
&\le 3\cdot L_{5,1}(r)\cdot Q_B\cdot|x|^{-4}\cdot\|\vec{\phi}\|_r \quad (\text{mit Lemma 2.3}).
\end{aligned}$$

Für die übrigen Terme auf der linken Seite von (6.33) gelten analoge Abschätzungen. Beachtet man noch, daß für $x \in \mathbb{R}^3$ mit $|x| \ge L_4$ gilt: $|x| \ge 1$, so erhält man (6.33). □

Aus dem Beweis von Lemma 6.11 ersieht man, daß die Funktionen $\vec{W}(.,\vec{\phi})$, $\Pi(.,\vec{\phi})$ und ihre Ableitungen mit einem Exponenten abfallen, der um 1 größer ist als in (6.33) angegeben. Aber es wird sich herausstellen, daß ein Abfall stärker als der von $\vec{V}(.,\vec{\phi})$, $Q(.,\vec{\phi})$ (siehe (6.13)) nicht zum Tragen kommt. Wir haben deshalb in (6.33) Exponenten gewählt, die denen in (6.13) entsprechen.

Im Weiteren seien Funktionen $\vec{\psi}_{(1)},\dots,\vec{\psi}_{(6)}$ nach Lemma 6.10 fest gewählt.

Lemma 6.12: Sei

$$M := \left(\int_{\partial\Omega} \langle \vec{V}(x,\vec{\psi}_{(m)}),\vec{\psi}_{(k)}(x)\rangle \, dx\right)_{1\le k,m\le 6}.$$

Dann ist diese Matrix M regulär. Setze für $\vec{b}\in C^0(\partial\Omega)^3$

$$c(\vec{b}) := M^{-1}\cdot\left(\int_{\partial\Omega}\langle\vec{b}(y),\vec{\psi}_{(k)}(y)\rangle \, d\Omega(y)\right)_{1\le k\le 6}.$$

Dann gilt für $1\le k\le 6$, $\vec{b}\in C^0(\partial\Omega)^3$:

$$(6.35)\quad \int_{\partial\Omega}\left\langle\left(\vec{b}(x)-\sum_{m=1}^{6} c(\vec{b})_m\cdot\vec{V}(x,\vec{\psi}_{(m)})\right),\vec{\psi}_{(k)}(x)\right\rangle d\Omega(x)=0.$$

Zu $r\in(1,\infty)$ gibt es $L_6(r)>0$, so daß

$$(6.36)\quad |c_m(\vec{b})|\le L_6(r)\cdot\|\vec{b}\|_r \text{ für } \vec{b}\in C^0(\partial\Omega)^3,\ 1\le m\le 6.$$

Beweis: Zum Beweis der ersten Aussage des Lemmas geben wir $\gamma_1,\dots,\gamma_6\in\mathbb{C}$ vor, so daß

$$\sum_{m=1}^{6}\gamma_m\cdot\int_{\partial\Omega}\langle\vec{V}(x,\vec{\psi}_{(m)}),\vec{\psi}_{(k)}(x)\rangle \, d\Omega(x)=0 \text{ für } 1\le k\le 6.$$

Setzt man $\vec{\psi} := \sum_{m=1}^{6}\gamma_m\cdot\vec{\psi}_{(m)}$, so ist $\vec{\psi}\in C^0(\partial\Omega)^3$,

$$\int_{\partial\Omega}\langle\vec{V}(x,\vec{\psi}),\vec{\psi}(x)\rangle \, d\Omega(x)=0,$$

und nach Auswahl von $\vec{\psi}_{(1)},\dots,\vec{\psi}_{(6)}$ gilt:

$$\vec{\psi}+\vec{T}^*(\vec{\psi})=0,$$

also:

$$(1/2)\cdot(-\vec{\psi}+\vec{T}^*(\vec{\psi})) = -\vec{\psi}.$$

Nun kann man aus (6.16) folgern:

$$\sum_{i,k=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}}\left(D_kV_i^{\varepsilon}(x,\vec{\psi})+D_iV_k^{\varepsilon}(x,\vec{\psi})\right)^2 dx\to 0 \text{ für } \varepsilon\downarrow 0.$$

Lemma 6.6, II) und Lemma 6.9 liefern jetzt: $\vec{\psi}=0$. Weil $\vec{\psi}=\sum_{k=1}^{6}\gamma_k\cdot\vec{\psi}_{(k)}$ und $\vec{\psi}_{(1)},\dots,\vec{\psi}_{(6)}$ linear unabhängig, erhält man die Gleichung $\gamma_1=\dots=\gamma_6=0$. Also ist M regulär.

Zum Beweis der zweiten Behauptung des Lemmas geben wir $\vec{b}\in C^0(\partial\Omega)^3$ vor und stellen dann fest:

$$\left(\int_{\partial\Omega}\langle\vec{b}(x),\vec{\psi}_{(k)}(x)\rangle \, d\Omega(x)\right)_{1\le k\le 6} = M\cdot c(\vec{b}).$$

Für $k \in \{1,\dots,6\}$ ist also

$$\int_{\partial\Omega} \langle \vec{b}(x), \vec{\psi}_{(k)}(x) \rangle \, d\Omega(x) =$$

$$= \sum_{m=1}^{6} c_m(\vec{b}) \cdot \int_{\partial\Omega} \langle \vec{V}(x, \vec{\psi}_{(m)}), \vec{\psi}_{(k)}(x) \rangle \, d\Omega(x),$$

woraus (6.35) folgt.

Schließlich notieren wir für $r \in (1,\infty)$, $\vec{b} \in C^0(\partial\Omega)^3$, $m \in \{1,\dots,6\}$:

$L\partial$

$$|c_m(\vec{b})| =$$

$$= \Big| \sum_{n=1}^{6} (M^{-1})_{mn} \cdot \int_{\partial\Omega} \langle \vec{b}(x), \vec{\psi}_{(n)}(x) \rangle \, d\Omega(x)$$

$$\leq L_{6,1} \cdot \sum_{i=1}^{3} \int_{\partial\Omega} |b_i(x)| \, d\Omega(x)$$

$$\text{(mit } L_{6,1} := \max_{1\leq l\leq 6} \sum_{n=1}^{6} (|(M^{-1})_{ln}| \cdot \max_{1\leq i\leq 3} |\psi_{(n)i}|_0))$$

$$\leq L_{6,2}(r) \cdot \sum_{j=1}^{3} \Big(\int_{\partial\Omega} |b_j|^r \, d\Omega\Big)^{1/r}$$

$$\text{(mit } L_{6,2}(r) := L_{6,1} \cdot \Big(\int_{\partial\Omega} d\Omega(y)\Big)^{1-1/r})$$

$$\leq L_6(r) \cdot \|\vec{b}\|_r$$

(mit $L_6(r) := 3 \cdot L_{6,2}(r) \cdot Q_B$; wegen Lemma 2.3). □

Der folgende Satz gibt eine Existenzaussage zum Außenraumproblem des linearen Stokes-Systems.

Satz 6.4: Zu $\vec{b} \in C^0(\partial\Omega)^3$ gibt es $\vec{\phi} \in C^0(\partial\Omega)^3$ mit

$$(6.37) \quad \vec{b} - \sum_{m=1}^{6} c_m(\vec{b}) \cdot \vec{V}(\cdot, \vec{\psi}_{(m)}) = (-1/2) \cdot (\vec{\phi} + \vec{T}(\vec{\phi}))$$

($c(\vec{b})$ stammt aus Lemma 6.12; die Funktionen $\vec{\psi}_{(1)}, \dots, \vec{\psi}_{(6)}$ wurden vor Lemma 6.12 fixiert.).

Für Funktionen $\vec{b}, \vec{\phi} \in C^0(\partial\Omega)^3$ setzen wir

$$\vec{u}(\vec{\phi}, \vec{b}) := \vec{W}(\cdot, \vec{\phi})_a + \sum_{m=1}^{6} c_m(\vec{b}) \cdot \vec{V}(\cdot, \vec{\psi}_{(m)}) \,|\, \mathbb{R}^3 \setminus \Omega;$$

$$\pi(\vec{\phi}, \vec{b}) := (\Pi(\cdot, \vec{\phi}) + \sum_{m=1}^{6} c_m(\vec{b}) \cdot Q(\cdot, \vec{\psi}_{(m)})) \,|\, \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}.$$

($\vec{W}(\cdot, \vec{\phi})_a$ wurde in Satz 4.1 definiert, ansonsten siehe Definition 4.1.)

Für $\vec{b}, \vec{\phi} \in C^0(\partial\Omega)^3$ mit Eigenschaft (6.37) gilt:

$LΩ$

$$\vec{u}(\vec{\phi}, \vec{b}) \in C^0(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega)^3;$$
$$\vec{u}(\vec{\phi}, \vec{b}) \,|\, \partial\Omega = \vec{b};$$
$$\vec{u}(\vec{\phi}, \vec{b}) \,|\, \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega} \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega})^3, \quad \pi(\vec{\phi}, \vec{b}) \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega});$$
$$-\nu \cdot \Delta(\vec{u}(\vec{\phi}, \vec{b}) \,|\, \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}) + \nabla\pi(\vec{\phi}, \vec{b}) = 0;$$
$$\operatorname{div}(\vec{u}(\vec{\phi}, \vec{b}) \,|\, \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}) = 0.$$

Sei $L_7 := L_4 \vee L_1$, und zu $r \in (1,\infty)$ sei

$$L_8(r) := L_5(r) + L_2(r) \cdot L_6(r) \cdot \sum_{m=1}^{6} \|\vec{\psi}_{(m)}\|_r,$$

mit $L_1, L_2(r)$ aus Lemma 6.3, $L_4, L_5(r)$ aus Lemma 6.11, $L_6(r)$ aus Lemma 6.12.

<u>Dann ist</u> $\overline{\Omega} \subset K_{L_7}(0)$, <u>und für</u> $r \in (1,\infty)$, $x \in \mathbb{R}^3$ <u>mit</u> $|x| \geq L_7$, $i,k,l \in \{1,2,3\}$, $\vec{b},\vec{\phi} \in C^0(\partial\Omega)^3$ <u>gelten folgende Abschätzungen</u>:

$$(6.38)\quad |u_i(\vec{\phi},\vec{b})(x)|\cdot|x|,\ |\partial/\partial x_k u_i(\vec{\phi},\vec{b})(x)|\cdot|x|^2,$$
$$|\partial^2/\partial x_k \partial x_l u_i(\phi,b)(x)|\cdot|x|^3,$$
$$|\pi(\vec{\phi},\vec{b})(x)|\cdot|x|^2,\ |D_k\pi(\vec{\phi},\vec{b})(x)|\cdot|x|^3$$
$$\leq L_8(r)\cdot(\|\vec{\phi}\|_r+\|\vec{b}\|_r).$$

<u>Beweis:</u> Sei $\vec{b} \in C^0(\partial\Omega)^3$. Gemäß (6.35) gilt für $1 \leq k \leq 6$:

$$\int_{\partial\Omega} \langle \vec{b}(x) - \sum_{m=1}^{6} c_m(\vec{b})\cdot\vec{V}(x,\vec{\psi}_{(m)}),\vec{\psi}_{(k)}(x)\rangle\, d\Omega(x) = 0.$$

Eine Funktion $\vec{\phi} \in C^0(\partial\Omega)^3$ mit Eigenschaft (6.37) existiert also nach Lemma 6.10. Die übrigen Behauptungen des Satzes folgen nun aus Lemma 4.2, I), II); Satz 4.1, Lemma 6.1, sowie aus (6.13), (6.33) und (6.36). □

<u>§ 7. Abschätzungen im $W^{2,p}(\Omega)$</u>

<u>Lemma 7.1:</u> <u>Sei</u> $N \in \mathbb{N}$, $r \in (1,\infty)$, $v \in \mathcal{W}^{1,r}(\mathbb{R}^N)$, $\zeta \in \mathbb{R}^N$. <u>Für fast alle</u> $x \in \mathbb{R}^n$ <u>existiert dann das Integral</u>

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^{N} \zeta_k\cdot D_k v(x+\theta\cdot\zeta)\, d\theta$$

<u>und ist gleich</u> $v(x+\theta) - v(x)$.

<u>Beweis:</u> Nach [FJK], 5.5.9 gibt es eine Folge (φ_n) in $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ mit $\|\varphi_n - v\|_{1,r} \to 0$ $(n\to\infty)$. Es ist für $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_{\mathbb{R}^N}\Big(\int_0^1 \sum_{i=1}^{N} |D_i v(x+\theta\cdot\zeta)-D_i\varphi_n(x+\theta\cdot\zeta)|\cdot|\zeta_i|\, d\theta\Big)^r dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^N}\Big(\int_0^1 d\theta\Big)^{r-1}\cdot\int_0^1\Big(\sum_{i=1}^{N} |D_i v(x+\theta\cdot\zeta)-D_i\varphi_n(x+\theta\cdot\zeta)|\cdot|\zeta_i|\Big)^r d\zeta\, dx$$

$$\leq N^{r-1}\cdot|\zeta|^r\cdot\sum_{i=1}^{N}\int_0^1\int_{\mathbb{R}^N} |D_i v(x+\theta\cdot\zeta)-D_i\varphi_n(x+\theta\cdot\zeta)|^r\, dx\, d\theta$$

(mit (4.1))

$$= N^{r-1}\cdot|\zeta|^r\cdot\sum_{i=1}^{N}\int_{\mathbb{R}^N} |D_i v(y)-D_i\varphi_n(y)|^r\, dy$$

$$= N^{r-1}\cdot|\zeta|^r\cdot\sum_{i=1}^{N} \|D_i v - D_i\varphi_n\|_r^r < \infty.$$

Weil $\|D_i v - D_i\varphi_n\|_r \to 0$ $(n\to\infty)$ für $i \in \{1,\ldots,N\}$, folgt:

$$\int_{\mathbb{R}^N}\Big|\int_0^1 \sum_{i=1}^{N} (D_i v(x+\theta\cdot\zeta)-D_i\varphi_n(x+\theta\cdot\zeta))\cdot\zeta_i\, d\theta\Big|^r dx \to 0 \text{ für } n\to\infty.$$

Weil außerdem

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v(x)-\varphi_n(x)|^r \, dx, \quad \int_{\mathbb{R}^N} |v(x+\zeta)-\varphi_n(x+\zeta)|^r \, dx \to 0 \ (n \to \infty),$$

erhält man

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v(x+\zeta) - v(x) - \int_0^1 \sum_{i=1}^N D_i v(x+\theta\cdot\zeta)\cdot\zeta_i \, d\theta -$$

$$- \varphi_n(x+\zeta) + \varphi_n(x) + \int_0^1 \sum_{i=1}^N D_i\varphi_n(x+\theta\cdot\zeta)\cdot\zeta_i \, d\theta|^r \, dx \to 0 \ (n \to \infty).$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^N$ ist aber

$$\varphi_n(x+\zeta) - \varphi_n(x) - \int_0^1 \sum_{i=1}^N D_i\varphi_n(x+\theta\cdot\zeta)\cdot\zeta_i \, d\theta = 0.$$

Somit gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v(x+\zeta) - v(x) - \int_0^1 \sum_{i=1}^h D_i v(x+\theta\cdot\zeta)\cdot\zeta_i \, d\theta|^r \, dx = 0.$$

Hieraus folgt die Behauptung. □

<u>Lemma 7.2:</u> <u>Sei</u> $r \in (1,\infty)$, $v \in W^{1,r}(\Delta)$, $l \in \{1,2\}$, $0 < \gamma_1 < \gamma_2$ <u>mit</u> $\gamma_1+\gamma_2 < 1$, $\xi \in \Delta^{\gamma_1}$. <u>Dann gilt für fast alle</u> $\rho \in \Delta^{\gamma_2}$:

$$v(\rho+\xi) - v(\rho) = \int_0^1 \sum_{i=1}^2 D_i v(\rho+\theta\cdot\xi)\cdot\xi_i \, d\theta.$$

<u>Beweis:</u> Sei $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ so gewählt, daß $\zeta|\Delta^{\gamma_1+\gamma_2} = 1$, Tr $\zeta \subset \Delta$, und sei w die triviale Fortsetzung von $v\cdot\zeta$ auf $\mathbb{R}^2$. Dann ist $w \in W^{1,r}(\mathbb{R}^2)$, und die schwache Ableitung $D_l w$ von w ist gegeben durch

$$D_l w(x) = D_l v(x)\cdot\zeta(x) + v(x)\cdot D_l\zeta(x) \text{ für } x \in \Delta,$$

$D_l w(x) = 0$ sonst. Nach Lemma 7.1 gilt für fast alle $\rho \in \mathbb{R}^2$:

$$(7.1) \quad w(\rho) - w(\rho+\xi) = \int_0^1 \sum_{l=1}^2 D_l w(\rho+\theta\cdot\xi)\cdot\xi_l \, d\theta.$$

Für $\rho \in \Delta^{\gamma_2}$ ist $\rho+\xi \in \Delta^{\gamma_1+\gamma_2}$, so daß

$$w(\rho) = v(\rho), \quad w(\rho+\xi) = v(\rho+\xi),$$

$$D_l w(\rho+\theta\cdot\xi) = D_l v(\rho+\theta\cdot\xi) \text{ für } \theta \in [0,1].$$

Somit folgt aus (7.1) die Behauptung. □

<u>Lemma 7.3:</u> <u>Sei</u> $r \in (1,\infty)$. <u>Dann gibt es</u> $R_1(r) > 0$, <u>so daß für</u> $\varphi \in W^{1,r}(\Delta)$ <u>gilt:</u> L∂Ω

$$\int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} |\varphi(x)-\varphi(y)|^r \cdot |x-y|^{-3/2-r} \, d\Omega(x) \, d\Omega(y)$$

$$\le R_1(r)\cdot\|\varphi\|_{1,r}^r.$$

<u>Beweis:</u> Sei $\varphi \in W^{1,r}(\partial\Omega)$. Dann gilt für $t \in \{1,\dots,k_\Omega\}$:

$$(7.2) \quad \int_{\Delta^{1/4}} \Big(\int_{\Delta^{5/16}} |\varphi\circ\overset{t}{u}(\eta) - \varphi(y)|^r \cdot |\overset{t}{u}(\eta) - y|^{-3/2-r} \, d\Omega(y)\Big)\cdot B_t(\eta) \, d\eta$$

$$= \int_{\Delta^{1/4}} \Big(\int_{\Delta^{5/16}} |\varphi\circ\overset{t}{u}(\eta) - \varphi\circ\overset{t}{u}(\rho)|^r \cdot |\overset{t}{u}(\eta) - \overset{t}{u}(\rho)|^{-3/2-r} \cdot J_t(\rho) \, d\rho\Big)$$

$$\cdot B_t(\eta) \, d\eta$$

(wegen (2.18))

$$\le K_B^{5/2+r}\cdot\int_{\Delta^{1/4}}\int_{\Delta^{5/16}} |\varphi\circ\overset{t}{u}(\eta)-\varphi\circ\overset{t}{u}(\rho)|^{r}\cdot|\rho-\eta|^{-3/2-r}\, d\rho\, d\eta$$

(wegen (2.20), (2.21))

$$\le K_B^{5/2+r}\cdot\int_{\Delta^{5/16}}\int_{\Delta^{1/4}+\rho} |\varphi\circ\overset{t}{u}(\rho-\xi)-\varphi\circ\overset{t}{u}(\rho)|^{r}\cdot|\xi|^{-3/2-r}\, d\xi\, d\rho$$

$$\le K_B^{5/2+r}\cdot\int_{\Delta^{5/16}}\int_{\Delta^{9/16}} |\varphi\circ\overset{t}{u}(\rho-\xi)-\varphi\circ\overset{t}{u}(\rho)|^{r}\cdot|\xi|^{-3/2-r}\, d\xi\, d\rho$$

$$= K_B^{5/2+r}\cdot\int_{\Delta^{5/16}}\int_{\Delta^{9/16}} \left|\int_0^1\sum_{l=1}^{2} D_l(\varphi\circ\overset{t}{u})(\rho-\theta\cdot\xi)\cdot\xi_l\, d\theta\right|^{r}$$

$$\cdot|\xi|^{-3/2-r}\, d\xi\, d\rho$$

(nach Lemma 7.2)

$$\le R_{1,1}(r)\cdot\sum_{l=1}^{2}\int_0^1\int_{\Delta^{9/16}}|\xi|^{-3/2}$$

$$\cdot\int_{\Delta^{5/16}}|D_l(\varphi\circ\overset{t}{u})(\rho+\theta\cdot\xi)|^{r}\, d\rho\, d\xi\, d\theta$$

(mit $R_{1,1}(r):=K_B^{5/2+r}\cdot 2^{r-1}$; wegen (4.1))

$$= R_{1,1}(r)\cdot\sum_{l=1}^{2}\int_0^1\int_{\Delta^{9/16}}|\xi|^{-3/2}$$

$$\cdot\int_{\Delta^{5/16}+\theta\cdot\xi}|D_l(\varphi\circ\overset{t}{u})(\sigma)|^{r}\, d\sigma\, d\xi\, d\theta$$

$$\le R_{1,1}(r)\cdot\sum_{l=1}^{2}\left(\int_{\Delta^{9/16}}|\xi|^{-3/2}\, d\xi\right)\cdot\int_{\Delta}|D_l(\varphi\circ\overset{t}{u})(\sigma)|^{r}\, d\sigma$$

$$\le R_{1,2}(r)\cdot\sum_{l=1}^{2}\|D_l(\varphi\circ\overset{t}{u})\|_r^r$$

(mit $R_{1,2}(r):=R_{1,1}(r)\cdot 4\cdot\pi\cdot(\operatorname{diam}\Delta^{9/16})^{1/2}$)

$$\le R_{1,2}(r)\cdot\|\varphi\circ\overset{t}{u}\|_{1,r}^{r}.$$

Setzt man

$$R_{1,3}:=\min\{\operatorname{dist}(\Lambda_i^{1/4},\partial\Omega\setminus\Lambda_i^{5/16}):\ 1\le i\le k_\Omega\},$$

so ist $R_{1,3}>0$ (siehe (2.12)), und es gilt für $t\in\{1,\dots,k_\Omega\}$:

$$\text{(7.3)}\quad \int_{\Delta^{1/4}}\left(\int_{\partial\Omega\setminus\Lambda_t^{5/16}}|\varphi\circ\overset{t}{u}(\eta)-\varphi(y)|^{r}\cdot|\overset{t}{u}(\eta)-y|^{-3/2-r}\, d\Omega(y)\right)\cdot B_t(\eta)\, d\eta$$

$$\le R_{1,3}^{-3/2-r}\cdot\int_{\Delta^{1/4}}\left(\int_{\partial\Omega\setminus\Lambda_t^{5/16}}|\varphi\circ\overset{t}{u}(\eta)-\varphi(y)|^{r}\, d\Omega(y)\right)\cdot B_t(\eta)\, d\eta$$

$$\le R_{1,2}^{-3/2-r}\cdot 2^{r-1}\cdot\int_{\Delta^{1/4}}B_t(\eta)\cdot\left(\int_{\partial\Omega\setminus\Lambda_t^{5/16}}(|\varphi\circ\overset{t}{u}(\eta)|^{r}+|\varphi(y)|^{r})\right.$$

$$\left. d\Omega(y)\right)\, d\eta$$

(mit (4.1))

$$\le R_{1,2}^{-3/2-r}\cdot 2^{r-1}\cdot\int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega}(|\varphi(x)|^{r}+|\varphi(y)|^{r})\, d\Omega(y)\, d\Omega(x)$$

(mit (2.19))

$$\le R_{1,4}(r)\cdot\int_{\partial\Omega}|\varphi|^{r}\, d\Omega$$

(mit $R_{1,4}(r):=R_{1,3}^{-3/2-r}\cdot 2^{r}\cdot\int_{\partial\Omega}d\Omega$)

$$\leq R_{1,4}(r)\cdot Q_B^r\cdot\|\varphi\|_r^r \quad \text{(wegen Lemma 2.3).}$$

Nun erhält man:

$$\int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} |\varphi(x)-\varphi(y)|^r\cdot|x-y|^{-3/2-r}\, d\Omega(x)\, d\Omega(y)$$

$$= \sum_{t=1}^{k_\Omega} \int_{\Delta_{1/4}} \Big(\int_{\partial\Omega} |\varphi\circ \overset{t}{u}(\eta)-\varphi(y)|^r\cdot|\overset{t}{u}(\eta)-y|^{-3/2-r}\, d\Omega(y)\Big)\cdot B_t(\eta)\, d\eta$$

(wegen (2.19) und (2.14))

$$\leq \sum_{t=1}^{k_\Omega} \big(R_{1,2}(r)\cdot\|\varphi\|_{1,r}^r + R_{1,4}(r)\cdot Q_B^r\cdot\|\varphi\|_r^r\big)$$

(wegen (7.2), (7.3))

$$\leq R_1(r)\cdot\|\varphi\|_{1,r}^r$$

(mit $R_1(r) := k_\Omega\cdot(R_{1,2}(r)+R_{1,4}(r)\cdot Q_B^r)$). □

<u>Lemma 7.4:</u> <u>Sei</u> $r\in(1,\infty)$. <u>Dann gibt es</u> $R_2(r)>0$, <u>so daß für</u> $\vec{\phi}\in C^0(\partial\Omega)^3$, $i\in\{1,2,3\}$ <u>gilt</u>:

$$\int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} |T(\vec{\phi})_i(x)-T(\vec{\phi})_i(y)|^r\cdot|x-y|^{-3/2-r}\, d\Omega(x)\, d\Omega(y)$$

$$\leq R_2(r)\cdot\|\vec{\phi}\|_r^r,$$

<u>mit</u> $\vec{T}(\vec{\phi})$ <u>aus Definition</u> 4.2.

<u>Beweis:</u> Zur Abkürzung setzen wir

$$\varepsilon := \min\{(1-1/r)/2,\, 1/(8r)\},\quad r' := (1-1/r)^{-1}.$$

Sei $\vec{\phi}\in C^0(\partial\Omega)^3$, $i\in\{1,2,3\}$. Dann ist für $x,y\in\partial\Omega$:

$$(7.4)\quad |T(\vec{\phi})_i(x)-T(\vec{\phi})_i(y)|^r$$

$$\leq 3^{r-1}\cdot\sum_{j=1}^{3}\Big(\int_{\partial\Omega} |K_{ij}(x,\eta)-K_{ij}(y,\eta)|^{1/r-\varepsilon+1/r'+\varepsilon}\cdot|\phi_j(\eta)|\, d\Omega(\eta)\Big)^r$$

(mit (4.1))

$$\leq 3^{r-1}\cdot\sum_{j=1}^{3}\Big\{\int_{\partial\Omega} |K_{ij}(x,\eta)-K_{ij}(y,\eta)|^{1-\varepsilon\cdot r}\cdot|\phi_j(\eta)|^r\, d\Omega(\eta)\cdot\Big(\int_{\partial\Omega} |K_{ij}(x,\eta)-K_{ij}(y,\eta)|^{1+\varepsilon\cdot r'}\, d\Omega(\eta)\Big)^{r/r'}\Big\}$$

$$\leq R_{2,1}(r)\cdot\sum_{j=1}^{3}\int_{\partial\Omega} |K_{ij}(x,\eta)-K_{ij}(y,\eta)|^{1-\varepsilon\cdot r}\cdot|\phi_j(\eta)|^r\, d\Omega(\eta)\cdot|x-y|^{r-1-\varepsilon\cdot r}$$

(mit $R_{2,1}(r) := 3^{r-1}\cdot Q_4(1+\varepsilon\cdot r')$; nach Lemma 4.6; beachte: $1+\varepsilon\cdot r' < 2$ nach Voraussetzung an ε).

Jetzt findet man:

$$\int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} |T(\vec{\phi})_i(x)-T(\vec{\phi})_i(y)|^r\cdot|x-y|^{-3/2-r}\, d\Omega(x)\, d\Omega(y)$$

$$\le R_{2,1}(r)\cdot\int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} |x-y|^{-\varepsilon\cdot r-5/2}\cdot$$

$$\Big(\sum_{j=1}^{3}\int_{\partial\Omega} |K_{ij}(x,z)-K_{ij}(y,z)|^{1-\varepsilon\cdot r}\cdot$$

$$\cdot|\phi_j(z)|^r\, d\Omega(z)\Big)\, d\Omega(x)\, d\Omega(y)$$

(mit (7.4))

$$\le R_{2,1}(r)\cdot\sum_{j=1}^{3}\Big\{\sup_{\xi\in\partial\Omega}\int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} |x-y|^{-\varepsilon\cdot r-5/2}$$

$$\cdot|K_{ij}(x,\xi)-K_{ij}(y,\xi)|^{1-\varepsilon\cdot r}\, d\Omega(x)\, d\Omega(y)$$

$$\cdot\int_{\partial\Omega} |\phi_j(z)|^r\, d\Omega(z)\Big\}$$

$$\le R_{2,2}(r)\cdot\Big(\sum_{j=1}^{3} |\phi_j|_r^r\Big)\cdot\sup_{\xi\in\partial\Omega}\int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} |x-y|^{-2\cdot\varepsilon\cdot r-3/2}$$

$$\cdot\big(|x-\xi|^{-2+2\cdot\varepsilon\cdot r}\vee|y-\xi|^{-2+2\cdot\varepsilon\cdot r}\big)\, d\Omega(x)\, d\Omega(y)$$

(mit $R_{2,2}(r) := R_{2,1}(r)\cdot Q_2^{1-\varepsilon\cdot r}$; wegen (4.3); mit $|\phi_j|_r$ wie vor Lemma 2.3 definiert).

$$\le R_{2,3}(r)\cdot\sum_{j=1}^{3}\|\phi_j\|_r^r\cdot\sup_{\xi\in\partial\Omega}\Big\{\int_{\partial\Omega} |y-\xi|^{-2+2\cdot\varepsilon\cdot r}$$

$$\cdot\Big(\int_{\partial\Omega} |x-y|^{-2\cdot\varepsilon\cdot r-3/2}\, d\Omega(x)\Big)\, d\Omega(y)\, +$$

$$+\int_{\partial\Omega} |x-\xi|^{-2+2\cdot\varepsilon\cdot r}\cdot\Big(\int_{\partial\Omega} |x-y|^{-2\cdot\varepsilon\cdot r-3/2}\, d\Omega(y)\Big)\, d\Omega(x)\Big\}$$

(mit $R_{2,3}(r) := R_{2,2}(r)\cdot Q_B^r$; nach Lemma 2.3)

$$\le R_{2,4}(r)\cdot\|\vec{\phi}\|_r^r\cdot\sup_{\xi\in\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} |\xi-z|^{-2+2\cdot\varepsilon\cdot r}\, d\Omega(z)$$

(mit $R_{2,4}(r) := R_{2,3}(r)\cdot 6\cdot Q_1(-2\cdot\varepsilon\cdot r-3/2)$; nach Lemma 4.1;

beachte: $-2\cdot\varepsilon\cdot r-3/2 > -2$)

$$\le R_2(r)\cdot\|\vec{\phi}\|_r^r$$

(mit $R_2(r) := R_{2,4}(r)\cdot Q_1(-2+2\varepsilon r)$; wegen Lemma 4.1). □

Lemma 7.5: Sei $\rho\in(0,1)$, $\vec{\phi}\in C^\rho(\partial\Omega)^3$, $i\in\{1,2,3\}$, $t\in\{1,\dots,k_\Omega\}$.

Zu $j\in\{1,2,3\}$, $l\in\{1,2\}$, $\eta\in\Delta$ existiert das Integral

$$(7.5)\quad \int_{\partial\Omega} \partial/\partial\eta_l\big(K_{ij}(\overset{t}{u}(\eta),y)\big)\cdot\big(\phi_j(y)-\phi_j\circ\overset{t}{u}(\eta)\big)\, d\Omega(y).$$

Weiterhin ist $T(\vec{\phi})_i\circ\overset{t}{u}\in C^1(\Delta)$, und für $l\in\{1,2\}$, $\eta\in\Delta$ ist

$$D_l(T(\vec{\phi})_i \circ \overset{t}{u})(\eta)$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \int_{\partial\Omega} \partial/\partial\eta_l (K_{ij}(\overset{t}{u}(\eta),y)) \cdot (\phi_j(y) - \phi_j \circ \overset{t}{u}(\eta)) \, d\Omega(y).$$

<u>Beweis:</u> Wir setzen $e_1 := (1,0)$, $e_2 := (0,1)$. Sei $K \subset \mathbb{R}^2$ offen mit $\bar{K} \subset \Delta$. Sei $l \in \{1,2\}$. Es gibt $\delta_o > 0$, so daß für $h \in [-\delta_o, \delta_o]$, $\eta \in K$ gilt: $\eta + h \cdot e_l \in \Delta$.

Für $\eta \in K$, $h \in [-\delta_o, \delta_o] \setminus \{0\}$ ist

$$(7.6) \quad \left(T(\vec{\phi})_i \circ \overset{t}{u}(\eta + h \cdot e_l) - T(\vec{\phi})_i \circ \overset{t}{u}(\eta) \right) / h$$

$$= h^{-1} \cdot \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^{3} (K_{ij}(\overset{t}{u}(\eta + h \cdot e_l),y) - K_{ij}(\overset{t}{u}(\eta),y)) \cdot \phi_j(y) \, d\Omega(y)$$

$$= h^{-1} \cdot \sum_{j=1}^{3} \int_{\partial\Omega} (K_{ij}(\overset{t}{u}(\eta + h \cdot e_l),y) - K_{ij}(\overset{t}{u}(\eta),y)) \cdot (\phi_j(y) - \phi_j \circ \overset{t}{u}(\eta)) \, d\Omega(y),$$

wobei die zweite Gleichung mit Lemma 4.4 folgt.

Sei $\eta \in K$, $h \in [-\delta_o, \delta_o] \setminus \{0\}$ und $r \in \{1, \ldots, k_\Omega\}$ festgehalten. Wir schreiben zur Abkürzung $x_h := \overset{t}{u}(\eta + h \cdot e_l)$, $x := \overset{t}{u}(\eta)$. Dann ist

$$(7.7) \quad |p_r(x_h) - p_r(x)| \le |x_h - x| \le K_B \cdot |h| \quad \text{(siehe (2.21))}.$$

Es folgt für $\sigma \in \Delta$ mit $|p_r(x) - \sigma| \le 2 \cdot K_B \cdot |h|$:

$$(7.8) \quad |p_r(x_h) - \sigma| \le |p_r(x) - \sigma| + |p_r(x) - p_r(x_h)| \le 3 \cdot K_B \cdot |h|.$$

Nun findet man:

$$(7.9) \quad \Big| h^{-1} \cdot \sum_{j=1}^{3} \int_{\substack{\Delta \\ |p_r(x) - \sigma| \le 2 \cdot K_B \cdot |h|}} (K_{ij}(x_h, \overset{t}{u}(\sigma)) - K_{ij}(x, \overset{t}{u}(\sigma))) \cdot (\phi_j \circ \overset{t}{u}(\sigma) - \phi_j(x)) \cdot B_r(\sigma) \, d\sigma \Big|$$

$$\le \sum_{j=1}^{3} \sum_{z \in \{x_h, x\}} |h|^{-1} \cdot \int_{|p_r(x) - \sigma| \le 2 \cdot K_B \cdot |h|} \{ |K_{ij}(z, \overset{t}{u}(\sigma))| \cdot |\phi_j \circ \overset{t}{u}(\sigma) - \phi_j(z)| + |K_{ij}(x_h, \overset{t}{u}(\sigma))| \cdot |\phi_j(x_h) - \phi_j(x)| \} \cdot B_r(\sigma) \, d\sigma$$

$$\le K_1 \cdot |h|^{-1} \cdot \sum_{z \in \{x_h, x\}} \int_{\substack{\Delta \\ |p_r(x) - \sigma| \le 2 \cdot K_B \cdot |h|}} \{ |z - \overset{t}{u}(\sigma)|^{-1+\alpha} + |x_h - \overset{t}{u}(\sigma)|^{-1} \cdot |x_h - x|^{\alpha} \} \, d\sigma$$

(mit $K_1 := 3 \cdot Q_2 \cdot |\vec{\phi}|_\alpha \cdot K_B$; wegen (4.2) und (2.20))

$$\le K_1 \cdot |h|^{-1} \cdot \sum_{z \in \{x_h, x\}} \Big\{ \int_{\substack{\Delta \\ |p_r(z) - \sigma| \le 3 \cdot K_B \cdot |h|}} |p_r(z) - \sigma|^{-1+\alpha} \, d\sigma + K_B^{\alpha} \cdot |h|^{\alpha} \cdot \int_{\substack{\Delta \\ |p_r(x_h) - \sigma| \le 3 \cdot K_B \cdot |h|}} |p_r(x_h) - \sigma|^{-1} \, d\sigma \Big\}$$

(wegen (7.7), (7.8), (2.17))

$$\leq K_1\cdot 4\cdot\pi\cdot|h|^{-1}\left\{\int_0^{3\cdot K_B\cdot|h|} s^\alpha\,ds + K_B^\alpha\cdot|h|^\alpha\cdot\int_0^{3\cdot K_B\cdot|h|} ds\right\}$$

$$\leq K_2\cdot|h|^\alpha \quad (\text{mit } K_2:= K_1\cdot 4\cdot\pi\cdot\{(1+\alpha)^{-1}\cdot(3\cdot K_B)^{1+\alpha}+3\cdot K_B^{1+\alpha}\}).$$

Weiter gilt:

$$(7.10)\quad \sum_{j=1}^{3}\int_{\substack{\Delta\\ |p_r(x)-\sigma|\leq 2\cdot K_B\cdot|h|}} \left|\partial/\partial\eta_l(K_{ij}(x,\overset{r}{u}(\sigma)))\cdot(\phi_j\circ\overset{r}{u}(\sigma)-\phi_j(x))\cdot B_r(\sigma)\right|\,d\sigma$$

$$\leq K_3\cdot\int_{\substack{\Delta\\ |p_r(x)-\sigma|\leq 2\cdot K_B\cdot|h|}} |x-\overset{r}{u}(\sigma)|^{-2+\alpha}\,d\sigma$$

$$(\text{mit } K_3:= 3\cdot Q_2\cdot|\vec{\phi}|_\alpha\cdot K_B;\ \text{mit (2.20) und (4.4)})$$

$$\leq K_3\cdot\int_{\substack{\Delta\\ |p_r(x)-\sigma|\leq 2\cdot K_B\cdot|h|}} |p_r(x)-\sigma|^{-2+\alpha}\,d\sigma \quad (\text{wegen (2.17)})$$

$$\leq K_4\cdot|h|^\alpha \quad (\text{mit } K_4:= K_3\cdot 2\cdot\pi\cdot\alpha^{-1}\cdot(2\cdot K_B)^\alpha).$$

Aus (7.10) folgt insbesondere, daß das Integral in (7.5) existiert.

Als nächstes stellen wir fest: Für $\sigma\in\Delta$ mit $|p_r(x)-\sigma|\geq 2\cdot K_B\cdot|h|$ und für $\theta\in[0,1]$ ist

$$(7.11)\quad |\overset{t}{u}(\eta+\theta\cdot h\cdot e_1)-\overset{r}{u}(\sigma)|$$

$$\geq |x-\overset{r}{u}(\sigma)| - |\overset{t}{u}(\eta+\theta\cdot h\cdot e_1)-x|$$

$$\geq (1/2)\cdot|x-\overset{r}{u}(\sigma)| + (1/2)\cdot|x-\overset{r}{u}(\sigma)| - K_B\cdot\theta\cdot|h| \quad (\text{wegen (2.21)})$$

$$\geq (1/2)\cdot|x-\overset{r}{u}(\sigma)|$$

$$\geq (1/2)\cdot|p_r(x)-\sigma| \quad (\text{wegen (2.17)})$$

$$\geq K_B\cdot|h| > 0.$$

Insbesondere ist somit für $1\leq j\leq 3$, $\sigma\in\Delta$ mit $|p_r(x)-\sigma|\geq 2\cdot K_B\cdot|h|$ die Funktion

$$[0,1]\ni\theta\to\left(K_{ij}(.,\overset{r}{u}(\sigma))\circ\overset{t}{u}\right)(\eta+\theta\cdot h\cdot e_1)\in\mathbb{R}$$

stetig differenzierbar, mit der l-ten partiellen Ableitung

$$D_l\left(K_{ij}(.,\overset{r}{u}(\sigma))\circ\overset{t}{u}\right)(\eta+\theta\cdot h\cdot e_1)\cdot h \quad (1\leq l\leq 2).$$

Man findet nun:

$$(7.12)\quad \Bigg|\sum_{j=1}^{3}\int_{\substack{\Delta\\ |p_r(x)-\sigma|\geq 2\cdot K_B\cdot|h|}} \{h^{-1}\cdot(K_{ij}(x_h,\overset{r}{u}(\sigma))-K_{ij}(x,\overset{r}{u}(\sigma))) - \partial/\partial\eta_l(K_{ij}(x,\overset{r}{u}(\sigma)))\}$$

$$\cdot(\phi_j\circ\overset{r}{u}(\sigma)-\phi_j(x))\cdot B_r(\sigma)\,d\sigma\Bigg|$$

$$\leq |\vec{\phi}|_\alpha \cdot K_\beta \cdot \sum_{j=1}^{3} \int\limits_{\substack{\Delta \\ |p_r(x)-\sigma| \geq 2\cdot K_\beta \cdot |h|}}$$

$$\left| \int_0^1 \{D_1\left(K_{ij}(\cdot,\overset{r}{u}(\sigma))\circ \overset{t}{u}\right)(\eta+\theta\cdot h\cdot e_1) -\right.$$

$$\left. - D_1\left(K_{ij}(\cdot,\overset{r}{u}(\sigma))\circ \overset{t}{u}\right)(\eta)\}\, d\theta \right| \cdot |\overset{r}{u}(\sigma)-x|^\alpha \, d\sigma$$

(mit (2.20) und dem Mittelwertsatz; beachte die Abkürzungen $x_h \equiv \overset{t}{u}(\eta+h\cdot e_1)$, $x \equiv \overset{t}{u}(\eta)$)

$$\leq K_5 \cdot \int\limits_{\substack{\Delta \\ |p_r(x)-\sigma| \geq 2\cdot K_\beta \cdot |h|}} \int_0^1 |\overset{t}{u}(\eta+\theta\cdot h\cdot e_1)-x|$$

$$\cdot \left(|\overset{t}{u}(\eta+\theta\cdot h\cdot e_1)-\overset{r}{u}(\sigma)|^{-3} \vee |x-\overset{r}{u}(\sigma)|^{-3}\right)\cdot |\overset{r}{u}(\sigma)-x|^\alpha \, d\theta\, d\sigma$$

(mit $K_5 := |\vec{\phi}|_\alpha \cdot K_\beta \cdot Q_2$; wegen (4.5))

$$\leq K_6 \cdot \int\limits_{\substack{\Delta \\ |p_r(x)-\sigma| \geq 2\cdot K_\beta \cdot |h|}} |h| \cdot |x-\overset{r}{u}(\sigma)|^{-3+\alpha}\, d\sigma$$

(mit $K_6 := K_5 \cdot K_\beta \cdot 2^3$; wegen (2.21) und wegen (7.11), bis zur dritten Ungleichung gelesen)

$$\leq K_6 \cdot |h| \cdot \int\limits_{\substack{\Delta \\ |p_r(x)-\sigma| \geq 2\cdot K_\beta \cdot |h|}} |p_r(x)-\sigma|^{-3+\alpha}\, d\sigma \quad \text{(wegen (2.17))}$$

$$\leq K_8 \cdot |h|^\alpha \quad (\text{mit } K_8 := K_6 \cdot 2\pi \cdot (1-\alpha)^{-1} \cdot (2\cdot K_\beta)^{-1+\alpha}).$$

Aus (7.9), (7.10) und (7.12) folgt mit $K_9 := K_2+K_4+K_8$:

$$\left| \sum_{j=1}^{3} \int_\Delta \left(h^{-1}\cdot\left(K_{ij}(\overset{t}{u}(\eta+h\cdot e_1),\overset{r}{u}(\sigma))-K_{ij}(\overset{t}{u}(\eta),\overset{r}{u}(\sigma))\right)\right.\right.$$

$$\left.\left. - \partial/\partial\eta_1(K_{ij}(\overset{t}{u}(\eta),\overset{r}{u}(\sigma)))\right)\cdot(\phi_j\circ\overset{r}{u}(\sigma)-\phi_j\circ\overset{t}{u}(\eta))\cdot B_r(\sigma)\, d\sigma\right|$$

$$\leq K_9 \cdot |h|^\alpha.$$

Jetzt folgt für $\eta \in K$, $h \in [-\delta_0,\delta_0]\setminus\{0\}$:

$$\text{(7.13)} \quad \left| h^{-1}\cdot(T(\vec{\phi})_i\circ\overset{t}{u}(\eta+h\cdot e_1)-T(\vec{\phi})_i\circ\overset{t}{u}(\eta))\right.$$

$$\left. - \sum_{j=1}^{3} \int_{\partial\Omega} \partial/\partial\eta_1(K_{ij}(\overset{t}{u}(\eta),y))\cdot(\phi_j(y)-\phi\circ\overset{t}{u}(\eta))\, d\Omega(y)\right|$$

$$\leq \sum_{r=1}^{K_\Omega} \left| \sum_{j=1}^{3} \int_\Delta \left\{h^{-1}\cdot\left(K_{ij}(\overset{t}{u}(\eta+h\cdot e_1),\overset{r}{u}(\sigma))-K_{ij}(\overset{t}{u}(\eta),\overset{r}{u}(\sigma))\right)\right.\right.$$

$$\left.\left. - \partial/\partial\eta_1(K_{ij}(\overset{t}{u}(\eta),\overset{r}{u}(\sigma)))\right\}\cdot(\phi_j\circ\overset{r}{u}(\sigma)-\phi_j\circ\overset{t}{u}(\eta))\cdot B_r(\sigma)\, d\sigma\right|$$

(wegen (7.6) und (2.19))

$$\leq k_\Omega \cdot K_9 \cdot |h|^\alpha \quad \text{(wegen (7.13))}.$$

Das bedeutet zunächst einmal, daß für $\eta \in K$ die Ableitung $\partial/\partial\eta_1(T(\vec{\phi})_i\circ\overset{t}{u})(\eta)$ existiert und gleich dem Integral in (7.5) ist.

Aus (7.13) folgt außerdem, daß der Differenzenquotient $(T(\vec{\phi})_i\circ\overset{t}{u}(\eta+h\cdot e_1) - T(\vec{\phi})_i\circ\overset{t}{u}(\eta))/h$ gleichmäßig in $\eta \in K$ konvergiert für $h \to 0$. Weil $T(\vec{\phi})_i \in C^\beta(\partial\Omega)$ für ein $\beta \in (0,1)$ (siehe Lemma 5.3), insbesondere also $T(\phi)_i\circ\overset{t}{u}$ stetig, folgt damit: $D_1(T(\vec{\phi})_i\circ\overset{t}{u}|K)$ stetig. $\square$

<u>Lemma 7.6:</u> <u>Sei</u> $r \in (1,\infty)$. <u>Dann gibt es</u> $R_3(r) > 0$, <u>so daß für</u> $\rho \in (0,1)$, $\phi \in C^\rho(\partial\Omega)^3$, $i \in \{1,2,3\}$, $t \in \{1,\dots,k_\Omega\}$, $l \in \{1,2\}$ <u>gilt:</u>

$$\|D_l[T(\vec{\phi})_i \circ \overset{t}{u}]\|^r_{1-1/r,r}$$

$$\leq R_3(r) \cdot \sum_{j=1}^{3} \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} |\phi_j(x)-\phi_j(y)|^r \cdot |x-y|^{-3/2-r} \, d\Omega(x) \, d\Omega(y).$$

<u>Beweis:</u> Zur Abkürzung setzen wir $r' := (1-1/r)^{-1}$.

Sei $\rho \in (0,1)$, $\vec{\phi} \in C^\rho(\partial\Omega)^3$, $i \in \{1,2,3\}$, $t \in \{1,\dots,k_\Omega\}$, $l \in \{1,2\}$. Dann stellt man zunächst für $s \in \{1,\dots,k_\Omega\}$, $\eta \in \Delta$ fest:

$$(7.14) \quad \left| \sum_{j=1}^{3} \int_\Delta \partial/\partial\eta_l (K_{ij}(\overset{t}{u}(\eta),\overset{s}{u}(\sigma))) \cdot (\phi_j \circ \overset{s}{u}(\sigma) - \phi_j \circ \overset{t}{u}(\eta)) \cdot B_s(\sigma) \, d\sigma \right|^r$$

$$\leq \Big(\sum_{j=1}^{3} \int_\Delta |\partial/\partial\eta_l (K_{ij}(\overset{t}{u}(\eta),\overset{s}{u}(\sigma)))| \cdot |\overset{t}{u}(\eta)-\overset{s}{u}(\sigma)|^{3/(2r)+1}$$

$$\cdot |\phi_j \circ \overset{s}{u}(\sigma) - \phi_j \circ \overset{t}{u}(\eta)| \cdot |\overset{t}{u}(\eta)-\overset{s}{u}(\sigma)|^{-3/(2r)-1} \cdot B_s(\sigma) \, d\sigma \Big)^r$$

$$\leq 3^{r-1} \cdot \sum_{j=1}^{3} \Big\{ \Big(\int_\Delta |\partial/\partial\eta_l (K_{ij}(\overset{t}{u}(\eta),\overset{s}{u}(\sigma)))|^{r'}$$

$$\cdot |\overset{t}{u}(\eta)-\overset{s}{u}(\sigma)|^{3r'/(2r)+r'} \cdot B_s(\sigma) \, d\sigma \Big)^{r/r'}$$

$$\cdot \int_\Delta |\phi_j \circ \overset{s}{u}(\sigma) - \phi_j \circ \overset{t}{u}(\eta)|^r \cdot |\overset{t}{u}(\eta)-\overset{s}{u}(\sigma)|^{-3/2-r} \cdot B_s(\sigma) \, d\sigma \Big\} \, d\eta$$

(mit (4.1) und der Hölder-Ungleichung)

$$\leq R_{3,1}(r) \cdot \Big(\int_\Delta |\overset{t}{u}(\eta)-\overset{s}{u}(\sigma)|^{3r'/(2r)-r'} \cdot B_s(\sigma) \, d\sigma \Big)^{r/r'}$$

$$\cdot \sum_{j=1}^{3} \int_\Delta |\phi_j \circ \overset{s}{u}(\sigma) - \phi_j \circ \overset{t}{u}(\eta)|^r \cdot |\overset{t}{u}(\eta)-\overset{s}{u}(\sigma)|^{-3/2-r} \cdot B_s(\sigma) \, d\sigma$$

(mit $R_{3,1}(r) := 3^{r-1} \cdot Q_2^r$; wegen (4.4))

$$\leq R_{3,1}(r) \cdot \Big(\int_{\partial\Omega} |\overset{t}{u}(\eta)-y|^{3r'/(2r)-r'} \, d\Omega(y) \Big)^{r/r'}$$

$$\cdot \sum_{j=1}^{3} \int_{\partial\Omega} |\phi_j(y) - \phi_j \circ \overset{t}{u}(\eta)|^r \cdot |\overset{t}{u}(\eta)-y|^{-3/2-r} \, d\Omega(y)$$

(wegen (2.19))

$$\leq R_{3,2}(r) \cdot \sum_{j=1}^{3} \int_{\partial\Omega} |\phi_j(y) - \phi_j \circ \overset{t}{u}(\eta)|^r \cdot |\overset{t}{u}(\eta)-y|^{-3/2-r} \, d\Omega(y)$$

(mit $R_{3,2}(r) := R_{3,1}(r) \cdot Q_1(3r'/(2r)-r')^{r/r'}$; nach Lemma 4.1).

Jetzt ergibt sich:

$$(7.15) \quad \int_\Delta |D_l(T(\vec{\phi})_i \circ \overset{t}{u})(\eta)|^r \, d\eta$$

$$= \int_\Delta \Big| \sum_{s=1}^{k_\Omega} \sum_{j=1}^{3} \int_\Delta \partial/\partial\eta_l (K_{ij}(\overset{t}{u}(\eta),\overset{s}{u}(\sigma))) \cdot (\phi_j \circ \overset{s}{u}(\sigma) - \phi_j \circ \overset{t}{u}(\eta))$$

$$\cdot B_s(\sigma) \, d\sigma \Big|^r \, d\eta$$

(mit Lemma 7.5 und (2.19))

$$\leq k_{\Omega}^{r-1}\cdot R_{3,2}(r)\cdot \sum_{j=1}^{3} \int_{\Delta}\int_{\partial\Omega} |\phi_j(y)-\phi_j \circ \overset{t}{u}(\eta)|^r$$

$$\cdot |\overset{t}{u}(\eta)-y|^{-3/2-r}\cdot J_t(\eta)\ d\Omega(y)\ d\eta$$

(wegen (4.1), (7.14), und wegen $J_t \geq 1$)

$$\leq k_{\Omega}^{r-1}\cdot R_{3,2}(r)\cdot \sum_{j=1}^{3} \int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} |\phi_j(x)-\phi_j(y)|^r\cdot |x-y|^{-3/2-r}$$

$$d\Omega(x)\ d\Omega(y)$$

(mit (2.18)).

Sei $\eta,\tilde{\eta}\in\Delta$, $s\in\{1,\dots,k_{\Omega}\}$. Zur Abkürzung setzen wir

$$C_1 := \{\sigma\in\Delta:\ |p_s(\overset{t}{u}(\eta))-\sigma| \leq 2\cdot K_B\cdot|\eta-\tilde{\eta}|\},$$

$$C_2 := \{\sigma\in\Delta:\ |p_s(\overset{t}{u}(\eta))-\sigma| \geq 2\cdot K_B\cdot|\eta-\tilde{\eta}|\}.$$

Dann ist für $\sigma\in C_2$:

$$(7.16)\quad |\overset{t}{u}(\tilde{\eta})-\overset{s}{u}(\sigma)| \geq |\overset{t}{u}(\eta)-\overset{s}{u}(\sigma)| - |\overset{t}{u}(\eta)-\overset{t}{u}(\tilde{\eta})|$$

$$\geq (1/2)\cdot|\overset{t}{u}(\eta)-\overset{s}{u}(\sigma)| + (1/2)\cdot|\overset{t}{u}(\eta)-\overset{s}{u}(\sigma)| - K_B\cdot|\eta-\tilde{\eta}|$$

(wegen (2.21))

$$\geq (1/2)\cdot|\overset{t}{u}(\eta)-\overset{s}{u}(\sigma)| + (1/2)\cdot|p_s(\overset{t}{u}(\eta))-\sigma| - K_B\cdot|\eta-\tilde{\eta}|$$

(wegen (2.17))

$$\geq (1/2)\cdot|\overset{t}{u}(\eta)-\overset{s}{u}(\sigma)|.$$

Weiter gilt für $\sigma\in C_1$:

$$(7.17)\quad |p_s(\overset{t}{u}(\tilde{\eta}))-\sigma| \leq |p_s(\overset{t}{u}(\eta))-\sigma| + |p_s(\overset{t}{u}(\tilde{\eta}))-p_s(\overset{t}{u}(\eta))|$$

$$\leq 2\cdot K_B\cdot|\eta-\tilde{\eta}| + |\overset{t}{u}(\eta)-\overset{t}{u}(\tilde{\eta})|$$

$$\leq 3\cdot K_B\cdot|\eta-\tilde{\eta}| \quad \text{(wegen (2.21))}.$$

Wir verwenden außerdem die Abkürzung $r' := (1-1/r)^{-1}$. Dann ergibt sich:

$$(7.18)\quad \Big|\int_{\Delta}\sum_{j=1}^{3}\Big\{\partial/\partial\eta_l(K_{ij}(\overset{t}{u}(\eta),\overset{s}{u}(\sigma)))\cdot(\phi_j\circ\overset{s}{u}(\sigma)-\phi_j\circ\overset{t}{u}(\eta))$$

$$-\ \partial/\partial\tilde{\eta}_l(K_{ij}(\overset{t}{u}(\tilde{\eta}),\overset{s}{u}(\sigma)))\cdot(\phi_j\circ\overset{s}{u}(\sigma)-\phi_j\circ\overset{t}{u}(\tilde{\eta}))\Big\}$$

$$\cdot B_s(\sigma)\ d\sigma\Big|^r$$

$$\leq 3^{r-1}\cdot\sum_{j=1}^{3}\Big\{\sum_{\tau\in\{\eta,\tilde{\eta}\}}\int_{C_1}|\partial/\partial\tau_l(K_{ij}(\overset{t}{u}(\tau),\overset{s}{u}(\sigma)))|$$

$$\cdot|\phi_j\circ\overset{s}{u}(\sigma)-\phi_j\circ\overset{t}{u}(\tau)|\cdot B_s(\sigma)\ d\sigma$$

$$+\int_{C_2}|\partial/\partial\eta_l(K_{ij}(\overset{t}{u}(\eta),\overset{s}{u}(\sigma)))-\partial/\partial\tilde{\eta}_l(K_{ij}(\overset{t}{u}(\tilde{\eta}),\overset{s}{u}(\sigma)))|$$

$$\cdot|\phi_j\circ\overset{s}{u}(\sigma)-\phi_j\circ\overset{t}{u}(\eta)|\cdot B_s(\sigma)\ d\sigma$$

$$+\int_{C_2}|\partial/\partial\tilde{\eta}_l(K_{ij}(\overset{t}{u}(\tilde{\eta}),\overset{s}{u}(\sigma)))|\cdot|\phi_j\circ\overset{t}{u}(\eta)-\phi_j\circ\overset{t}{u}(\tilde{\eta})|\ d\sigma\Big\}^r \quad L\cdot B_s(\sigma)$$

(mit (4.1))

$$\le R_{3,3}(r)\cdot \sum_{j=1}^{3} \Big\{ \sum_{\tau\in\{\eta,\tilde{\eta}\}} \int_{C_1} |\overset{t}{u}(\tau)-\overset{s}{u}(\sigma)|^{-2}$$

$$\cdot|\phi_j\circ\overset{s}{u}(\sigma)-\phi_j\circ\overset{t}{u}(\tau)|\cdot B_s(\sigma)\;d\sigma$$

$$+\;|\overset{t}{u}(\eta)-\overset{t}{u}(\tilde{\eta})|\cdot\int_{C_2} (|\overset{t}{u}(\eta)-\overset{s}{u}(\sigma)|^{-3} \vee |\overset{t}{u}(\tilde{\eta})-\overset{s}{u}(\sigma)|^{-3})$$

$$\cdot|\phi_j\circ\overset{s}{u}(\sigma)-\phi_j\circ\overset{t}{u}(\eta)|\cdot B_s(\sigma)\;d\sigma$$

$$+\;|\phi_j\circ\overset{t}{u}(\eta)-\phi_j\circ\overset{t}{u}(\tilde{\eta})|\cdot\int_{C_2}|\overset{t}{u}(\tilde{\eta})-\overset{s}{u}(\sigma)|^{-2}\cdot B_s(\sigma)\;d\sigma\Big\}^r$$

(mit $R_{3,3}(r):=3^{r-1}\cdot Q_2^r$; wegen (4.4) und (4.5))

$$\le R_{3,4}(r)\cdot \sum_{j=1}^{3} \Big\{ \sum_{\tau\in\{\eta,\tilde{\eta}\}} \Big(\int_{C_1} |\overset{t}{u}(\tau)-\overset{s}{u}(\sigma)|^{-2}$$

$$\cdot|\phi_j\circ\overset{s}{u}(\sigma)-\phi_j\circ\overset{t}{u}(\tau)|\cdot B_s(\sigma)\;d\sigma\Big)^r$$

$$+\;|\overset{t}{u}(\eta)-\overset{t}{u}(\tilde{\eta})|^r\cdot\Big(\int_{C_2} |\overset{t}{u}(\eta)-\overset{s}{u}(\sigma)|^{-3}$$

$$\cdot|\phi_j\circ\overset{s}{u}(\sigma)-\phi_j\circ\overset{t}{u}(\eta)|\cdot B_s(\sigma)\;d\sigma\Big)^r$$

$$+\;|\phi_j\circ\overset{t}{u}(\eta)-\phi_j\circ\overset{t}{u}(\tilde{\eta})|^r\cdot\Big(\int_{C_2}|\overset{t}{u}(\eta)-\overset{s}{u}(\sigma)|^{-2}\cdot B_s(\sigma)\;d\sigma\Big)^r\Big\}$$

(mit $R_{3,4}(r):=4^{r-1}\cdot 8^r\cdot R_{3,3}(r)$; wegen (7.16) und (4.1))

$$\le R_{3,4}(r)\cdot \sum_{j=1}^{3} \Big\{ \sum_{\tau\in\{\eta,\tilde{\eta}\}} \Big(\int_{C_1} |\overset{t}{u}(\tau)-\overset{s}{u}(\sigma)|^{3r'/(2r)-r'}$$

$$\cdot B_s(\sigma)\;d\sigma\Big)^{r/r'}$$

$$\cdot\int_{C_1} |\overset{t}{u}(\tau)-\overset{s}{u}(\sigma)|^{-3/2-r}\cdot|\phi_j\circ\overset{s}{u}(\sigma)-\phi_j\circ\overset{t}{u}(\tau)|^r\cdot B_s(\sigma)\;d\sigma$$

$$+\;|\overset{t}{u}(\eta)-\overset{t}{u}(\tilde{\eta})|^r\cdot\Big(\int_{C_2} |\overset{t}{u}(\eta)-\overset{s}{u}(\sigma)|^{3r'/(2r)-2r'}$$

$$\cdot B_s(\sigma)\;d\sigma\Big)^{r/r'}$$

$$\cdot\int_{C_2} |\overset{t}{u}(\eta)-\overset{s}{u}(\sigma)|^{-3/2-r}\cdot|\phi_j\circ\overset{s}{u}(\sigma)-\phi\circ\overset{t}{u}(\eta)|^r\cdot B_s(\sigma)\;d\sigma$$

$$+\;|\phi_j\circ\overset{t}{u}(\eta)-\phi_j\circ\overset{t}{u}(\tilde{\eta})|^r\cdot\Big(\int_{C_2}|\overset{t}{u}(\eta)-\overset{s}{u}(\sigma)|^{-2}\cdot B_s(\sigma)\;d\sigma\Big)^r\Big\}$$

$$\le R_{3,4}(r)\cdot \sum_{j=1}^{3} \Big\{\Big(\sum_{\tau\in\{\eta,\tilde{\eta}\}} \Big(\int_{C_1} |\overset{t}{u}(\tau)-\overset{s}{u}(\sigma)|^{3r'/(2r)-r'}$$

$$\cdot B_s(\sigma)\;d\sigma\Big)^{r/r'}$$

$$+\;|\overset{t}{u}(\eta)-\overset{t}{u}(\tilde{\eta})|^r\cdot\Big(\int_{C_2} |\overset{t}{u}(\eta)-\overset{s}{u}(\sigma)|^{3r'/(2r)-2r'}\cdot B_s(\sigma)\;d\sigma\Big)^{r'/r}\Big)$$

$$\cdot\Big(\sum_{\tau\in\{\eta,\tilde{\eta}\}}\int_{\Delta} |\overset{t}{u}(\tau)-\overset{s}{u}(\sigma)|^{-3/2-r}$$

$$\cdot|\phi_j\circ\overset{s}{u}(\sigma)-\phi_j\circ\overset{t}{u}(\tau)|^r\cdot B_s(\sigma)\;d\sigma\Big)$$

$$+\;|\phi_j\circ\overset{t}{u}(\eta)-\phi_j\circ\overset{t}{u}(\tilde{\eta})|^r\cdot\Big(\int_{C_2}|\overset{t}{u}(\eta)-\overset{s}{u}(\sigma)|^{-2}\cdot B_s(\sigma)\;d\sigma\Big)^r\Big\}$$

$$\leq R_{3,5}(r)\cdot\Big(\sum_{j=1}^{3}\sum_{\tau\in\{\eta,\tilde\eta\}}\int_{\partial\Omega}|\overset{t}{u}(\tau)-y|^{-3/2-r}$$

$$\cdot|\phi_j(y)-\phi_j\circ\overset{t}{u}(\tau)|^{r}\,d\Omega(y)\Big)$$

$$\cdot\Big\{\sum_{\tau\in\{\eta,\tilde\eta\}}\Big(\int_{\{\sigma\in\Delta:\ |p_s(\overset{t}{u}(\tau))-\sigma|\leq 3\cdot K_B\cdot|\eta-\tilde\eta|\}}$$

$$|p_s(\overset{t}{u}(\tau))-\sigma|^{3r'/(2r)-r'}\,d\sigma\Big)^{r/r'}$$

$$+\ |\overset{t}{u}(\eta)-\overset{t}{u}(\tilde\eta)|^{r}\cdot\Big(\int_{C_2}|p_s(\overset{t}{u}(\eta))-\sigma|^{3r'/(2r)-2r'}\,d\sigma\Big)^{r/r'}\Big\}$$

$$+\ R_{3,6}(r)\cdot\sum_{j=1}^{3}|\phi_j\circ\overset{t}{u}(\eta)-\phi_j\circ\overset{t}{u}(\tilde\eta)|^{r}$$

$$\cdot\Big(\int_{C_2}|\overset{t}{u}(\eta)-\overset{s}{u}(\sigma)|^{-5/2}\,d\sigma\Big)^{r}$$

(mit $R_{3,5}(r):=R_{3,4}(r)\cdot K_B^{r/r'}$;

$R_{3,6}(r):=R_{3,4}(r)\cdot K_B^{r}\cdot(\mathrm{diam}\ \Omega)^{r/2}$;

wegen (2.17), (2.18), (2.20) und (7.17))

$$\leq R_{3,7}(r)\cdot\Big(\sum_{j=1}^{3}\sum_{\tau\in\{\eta,\tilde\eta\}}\int_{\partial\Omega}|\phi_j(y)-\phi_j\circ\overset{t}{u}(\tau)|^{r}$$

$$\cdot|y-\overset{t}{u}(\tau)|^{-3/2-r}\,d\Omega(y)\Big)$$

$$\cdot\{|\eta-\tilde\eta|^{(3r'/(2r)-r'+2)\cdot r/r'}$$

$$+\ |\overset{t}{u}(\eta)-\overset{t}{u}(\tilde\eta)|^{r}\cdot|\eta-\tilde\eta|^{(3r'/(2r)-2r'+2)\cdot r/r'}\}\ +$$

$$+\ R_{3,6}(r)\cdot\sum_{j=1}^{3}|\phi_j\circ\overset{t}{u}(\eta)-\phi_j\circ\overset{t}{u}(\tilde\eta)|^{r}$$

$$\cdot\Big(\int_{C_2}|p_s(\overset{t}{u}(\eta))-\sigma|^{-5/2}\,d\sigma\Big)^{r}$$

(mit $R_{3,7}(r):=R_{3,5}(r)\cdot\Big\{\Big(4\cdot\pi\cdot(3r'/(2r)-r'+2)^{-1}\cdot(3\cdot K_B)^{3r'/(2r)-r'+2}\Big)^{r/r'}$

$+\Big(2\cdot\pi\cdot(-3r'/(2r)-2r'+2)^{-1}\cdot(2\cdot K_B)^{3r'/(2r)-2r'+2}\Big)^{r/r'}\Big\}$;

beachte: $3r'/(2r)-r'+2>0>3r'/(2r)-2r'+2$)

$$\leq R_{3,7}(r)\cdot\Big(\sum_{j=1}^{3}\sum_{\tau\in\{\eta,\tilde\eta\}}\int_{\partial\Omega}|\phi_j(y)-\phi_j\circ\overset{t}{u}(\tau)|^{r}$$

$$\cdot|y-\overset{t}{u}(\tau)|^{-3/2-r}\,d\Omega(y)\Big)$$

$$\cdot\{|\eta-\tilde\eta|^{-1/2+r}+|\overset{t}{u}(\eta)-\overset{t}{u}(\tilde\eta)|^{r}\cdot|\eta-\tilde\eta|^{-1/2}\}$$

$$+\ R_{3,8}(r)\cdot\sum_{j=1}^{3}|\phi_j\circ\overset{t}{u}(\eta)-\phi_j\circ\overset{t}{u}(\tilde\eta)|^{r}\cdot|\eta-\tilde\eta|^{-1/2}$$

(mit $R_{3,8}(r):=R_{3,6}(r)\cdot 4\pi\cdot(2\cdot K_B)^{-1/2}$)

$$\leq R_{3,9}(r)\cdot\Big\{\sum_{\tau\in\{\eta,\tilde\eta\}}\sum_{j=1}^{3}\int_{\partial\Omega}|\phi_j(y)-\phi_j\circ\overset{t}{u}(\tau)|^r$$

$$\cdot|y-\overset{t}{u}(\tau)|^{-3/2-r}\,d\Omega(y)\cdot|\eta-\tilde\eta|^{r-1/2}$$

$$+\sum_{j=1}^{3}|\phi_j\circ\overset{t}{u}(\eta)-\phi_j\circ\overset{t}{u}(\tilde\eta)|^r\cdot|\overset{t}{u}(\eta)-\overset{t}{u}(\tilde\eta)|^{-1/2}$$

(mit $R_{3,9}(r):=R_{3,7}(r)\cdot(1+K_B^r)+R_{3,8}(r)\cdot K_B^{1/2}$;
wegen (2.21)).

Nun ergibt sich:

$$(7.19)\quad\int_\Delta\int_\Delta|D_1(T(\vec\phi)_i\circ\overset{t}{u})(\eta)-D_1(T(\vec\phi)_i\circ\overset{t}{u})(\tilde\eta)|^r\cdot|\eta-\tilde\eta|^{-1-r}\,d\eta\,d\tilde\eta$$

$$\leq\sum_{s=1}^{k_\Omega}k_\Omega^{r-1}\cdot\int_\Delta\int_\Delta\Big|\sum_{j=1}^{3}\int_\Delta\Big\{\partial/\partial\eta_1(K_{ij}(\overset{t}{u}(\eta),\overset{s}{u}(\sigma)))$$

$$\cdot(\phi_j\circ\overset{s}{u}(\sigma)-\phi_j\circ\overset{t}{u}(\eta))$$

$$-\partial/\partial\tilde\eta_1(K_{ij}(\overset{t}{u}(\tilde\eta),\overset{s}{u}(\sigma)))\cdot(\phi_j\circ\overset{s}{u}(\sigma)-\phi_j\circ\overset{t}{u}(\tilde\eta))\Big\}\cdot B_s(\sigma)\,d\sigma\Big|^r$$

$$\cdot|\eta-\tilde\eta|^{-1-r}\,d\eta\,d\tilde\eta$$

(wegen Lemma 7.5, (2.19) und (4.1))

$$\leq R_{3,10}(r)\cdot\Big\{\int_\Delta\int_\Delta\sum_{\tau\in\{\eta,\tilde\eta\}}\sum_{j=1}^{3}\int_{\partial\Omega}|\phi_j(y)-\phi_j\circ\overset{t}{u}(\tau)|^r$$

$$\cdot|y-\overset{t}{u}(\tau)|^{-3/2-r}\,d\Omega(y)\cdot|\eta-\tilde\eta|^{r-1/2}\cdot|\eta-\tilde\eta|^{-1-r}\,d\eta\,d\tilde\eta$$

$$+\sum_{j=1}^{3}\int_\Delta\int_\Delta|\phi_j\circ\overset{t}{u}(\eta)-\phi_j\circ\overset{t}{u}(\tilde\eta)|^r$$

$$\cdot|\overset{t}{u}(\eta)-\overset{t}{u}(\tilde\eta)|^{-1/2}\cdot|\eta-\tilde\eta|^{-1-r}\,d\eta\,d\tilde\eta\Big\}$$

(mit $R_{3,10}(r):=k_\Omega\cdot R_{3,9}(r)$; wegen (7.18))

$$\leq R_{3,11}(r)\cdot\Big\{\int_\Delta\int_\Delta\sum_{\tau\in\{\eta,\tilde\eta\}}\sum_{j=1}^{3}\int_{\partial\Omega}|\phi_j(y)-\phi_j\circ\overset{t}{u}(\tau)|^r$$

$$\cdot|y-\overset{t}{u}(\tau)|^{-3/2-r}\,d\Omega(y)\cdot|\eta-\tilde\eta|^{-3/2}\,d\eta\,d\tilde\eta$$

$$+\sum_{j=1}^{3}\int_\Delta\int_\Delta|\phi_j\circ\overset{t}{u}(\eta)-\phi_j\circ\overset{t}{u}(\tilde\eta)|^r\cdot|\overset{t}{u}(\eta)-\overset{t}{u}(\tilde\eta)|^{-3/2-r}\,d\eta\,d\tilde\eta\Big\}$$

(mit $R_{3,11}(r):=R_{3,10}(r)\cdot(1+K_B^{1+r})$; wegen (2.21))

$$=R_{3,11}(r)\cdot\Big\{2\cdot\int_\Delta\Big(\sum_{j=1}^{3}\int_{\partial\Omega}|\phi_j(y)-\phi_j\circ\overset{t}{u}(\xi)|^r$$

$$\cdot|y-\overset{t}{u}(\xi)|^{-3/2-r}\,d\Omega(y)\Big)\cdot\Big(\int_\Delta|\xi-\sigma|^{-3/2}\,d\sigma\Big)\,d\xi$$

$$+\sum_{j=1}^{3}\int_\Delta\int_\Delta|\phi_j\circ\overset{t}{u}(\eta)-\phi_j\circ\overset{t}{u}(\tilde\eta)|^r\cdot|\overset{t}{u}(\eta)-\overset{t}{u}(\tilde\eta)|^{-3/2-r}\,d\eta\,d\tilde\eta\Big\}$$

$$\leq R_{3,12}(r)\cdot\sum_{j=1}^{3}\Big\{\int_\Delta\int_{\partial\Omega}|\phi_j(y)-\phi_j\circ\overset{t}{u}(\xi)|^r|y-\overset{t}{u}(\xi)|^{-3/2-r}\,d\Omega(y)\,d\xi$$

$$+\int_\Delta\int_\Delta|\phi_j\circ\overset{t}{u}(\eta)-\phi_j\circ\overset{t}{u}(\tilde\eta)|^r\cdot|\overset{t}{u}(\eta)-\overset{t}{u}(\tilde\eta)|^{-3/2-r}\,d\eta\,d\tilde\eta\Big\}$$

(mit $R_{3,12}(r):=R_{3,11}(r)\cdot\{8\cdot\pi\cdot(\mathrm{diam}\,\Delta)^{1/2}+1\}$)

$$\leq R_{3,13}(r)\cdot \sum_{j=1}^{3} \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} |\phi_j(y)-\phi_j(x)|^r \cdot |y-x|^{-3/2-r}\, d\Omega(y)\, d\Omega(x)$$

(mit $R_{3,13}(r) := R_{3,12}(r)\cdot(Q_B+Q_B^2)$; nach Lemma 2.3, mit $p=1$).

Man setze nun $R_3(r) := k_\Omega^{r-1}\cdot R_{3,2}(r) + R_{3,13}(r)$. Dann folgt die Behauptung des Lemmas aus (7.15) und (7.19). □

<u>Lemma 7.7:</u> <u>Sei</u> $r \in (1,\infty)$. <u>Dann gibt es</u> $R_4(r) > 0$, <u>so daß für</u> $\rho \in (0,1)$, $\phi \in C^\rho(\partial\Omega)^3 \cap W^{1,r}(\partial\Omega)^3$, $i \in \{1,2,3\}$ <u>gilt:</u>

$$\|T(\vec{\phi})_i\|_{2-1/r,r} \leq R_4(r)\cdot\|\vec{\phi}\|_{1,r}.$$

<u>Beweis:</u> Setze $\lambda := 1-1/(2r)$. Sei $i \in \{1,2,3\}$, $\rho \in (0,1)$, $\vec{\phi} \in C^\rho(\partial\Omega)^3 \cap W^{1,r}(\partial\Omega)^3$. Dann gilt für $t \in \{1,\ldots,k_\Omega\}$:

$$\text{(7.20)}\quad \|T(\vec{\phi})_i \circ u^t\|_r^r \leq \|T(\vec{\phi})_i\|_r^r$$

$$\leq Q_B^r \cdot \int_{\partial\Omega} |T(\vec{\phi})_i|^r\, d\Omega \quad \text{(siehe Lemma 2.3)}$$

$$\leq 2^{r-1}\cdot Q_B^r \cdot \Big\{ \int_{\partial\Omega} \Big| \sum_{j=1}^{3} \int_{\partial\Omega} K_{ij}(x,y)\cdot(\phi_j(y)-\phi_j(x))\, d\Omega(y)\Big|^r d\Omega(x)$$

$$+ \int_{\partial\Omega} \Big| \sum_{j=1}^{3} \int_{\partial\Omega} K_{ij}(x,y)\, d\Omega(y)\cdot\phi_j(x)\Big|^r d\Omega(x)\Big\}$$

(mit (4.1))

$$\leq R_{4,1}(r)\cdot\Big\{ \sum_{j=1}^{3} \int_{\partial\Omega} \Big(\int_{\partial\Omega} |x-y|^{-1}\cdot|\phi_j(y)-\phi_j(x)|\, d\Omega(y)\Big)^r d\Omega(x)$$

$$+ \int_{\partial\Omega} |\phi_j(x)|^r\, d\Omega(x)\Big\}$$

(mit $R_{4,1}(r) := Q_B^r\cdot 6^{r-1}\cdot(Q_2^r+(1/2)^r)$; wegen (4.1), (4.2) und Lemma 4.4)

$$= R_{4,1}(r)\cdot\Big\{ \sum_{j=1}^{3} \int_{\partial\Omega} \Big(\int_{\partial\Omega} |x-y|^{3/(2r)}\cdot|\phi_j(x)-\phi_j(y)|$$

$$\cdot |x-y|^{-3/(2r)-1}\, d\Omega(y)\Big)^r d\Omega(x)$$

$$+ Q_B^r\cdot\|\phi_j\|_r^r\Big\}$$

(Beim zweiten Summanden wurde Lemma 2.3 angewandt)

$$\leq R_{4,1}(r)\cdot\Big\{ \sum_{j=1}^{3} \int_{\partial\Omega} \Big(\int_{\partial\Omega} |x-y|^{3r'/(2r)}\, d\Omega(y)\Big)^{r/r'}$$

$$\cdot \Big(\int_{\partial\Omega} |\phi_j(x)-\phi_j(y)|^r\cdot|x-y|^{-3/2-r}\, d\Omega(y)\Big)\, d\Omega(x)$$

$$+ 3\cdot Q_B^r\cdot\|\vec{\phi}\|_r^r\Big\}$$

$$\leq R_{4,2}(r)\cdot\|\vec{\phi}\|_{1,r}^r$$

(mit $R_{4,2}(r) := R_{4,1}(r)\cdot\{Q_1(3r'/(2r))^{r/r'}\cdot 3\cdot R_1(r) + 3\cdot Q_B^r\}$; wegen Lemma 4.1 und 7.3).

Weiterhin ergibt sich aus Lemma 7.6, 7.3, mit $R_{4,3}(r) := 3\cdot R_3(3)\cdot R_1(r)$:

(7.21) $\|D_l[\mathcal{T}(\vec{\phi})_i \circ \overset{t}{u}]\|^r_{1-1/r,r} \le R_{4,3}(r)\cdot\|\vec{\phi}\|^r_{1,r}$

für $t \in \{1,\dots,k_\Omega\}$, $l \in \{1,2\}$, $i \in \{1,2,3\}$.

Setzt man nun

$$R_4(r) := \{k_\Omega\cdot(R_{4,1}(r) + 2\cdot R_{4,3}(r))\}^{1/r},$$

folgt die Behauptung des Lemmas aus (7.20), (7.21). □

<u>Lemma 7.8:</u> <u>Sei</u> $r \in (1,\infty)$. <u>Dann gibt es</u> $R_5(r) > 0$, <u>so daß für</u> $\rho \in (0,1)$, $\vec{\phi} \in C^\rho(\partial\Omega)^3$, $\vec{U} \in C^\rho(\partial\Omega)^3 \cap W^{2-1/r,r}(\partial\Omega)^3$ <u>mit</u> $\vec{U} = (1/2)\cdot(\vec{\phi} \pm \vec{\mathcal{T}}(\vec{\phi}))$ <u>gilt:</u>

$$\vec{\phi} \in W^{2-1/r,r}(\partial\Omega)^3,$$

$$\|\vec{\phi}\|_{2-1/r,r} \le R_5(r)\cdot(\|\vec{U}\|_{2-1/r,r} + \|\vec{\phi}\|_r).$$

<u>Beweis:</u> Sei $\rho \in (0,1)$, $\vec{U} \in C^\rho(\partial\Omega)^3 \cap W^{2-1/r,r}(\partial\Omega)^3$, $\vec{\phi} \in C^\rho(\partial\Omega)^3$ mit $\vec{U} = (1/2)\cdot(\vec{\phi} \pm \mathcal{T}(\vec{\phi}))$. Sei $i \in \{1,2,3\}$, $t \in \{1,\dots,k_\Omega\}$, $l \in \{1,2\}$. Dann ergibt sich:

(7.22) $\|D_l(\mathcal{T}(\vec{\phi})_i \circ \overset{t}{u})\|^r_{1-1/r,r}$

$$\le R_3(r)\cdot\sum_{j=1}^{3}\int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega}|\phi_j(x)-\phi_j(y)|^r\cdot|x-y|^{-3/2-r}\,d\Omega(x)\,d\Omega(y)$$

(siehe Lemma 7.6)

$$\le 2^{r-1}\cdot R_3(r)\cdot\sum_{j=1}^{3}\Big(\int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega}|\mathcal{T}(\vec{\phi})_j(x)-\mathcal{T}(\vec{\phi})_j(y)|^r\cdot|x-y|^{-3/2-r}\,d\Omega(x)\,d\Omega(y)$$

$$+\int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega}|U_j(x)-U_j(y)|^r\cdot|x-y|^{-3/2-r}\,d\Omega(x)\,d\Omega(y)\Big)$$

(mit (4.1))

$$\le R_{5,1}(r)\cdot(\|\vec{\phi}\|^r_r + \|\vec{U}\|^r_{1,r})$$

(mit $R_{5,1}(r) := 2^{r-1}\cdot R_3(r)\cdot(R_2(r)+R_1(r))$, wegen Lemma 7.3, 7.4).

Es ist $U_i \in W^{2-1/r,r}(\partial\Omega)$; also existiert die schwache Ableitung $D_l(U_i \circ \overset{t}{u})$. Nach Lemma 7.5 existiert die Ableitung $D_l(\mathcal{T}(\vec{\phi})_i \circ \overset{t}{u})$. Wegen $\vec{U} = (1/2)\cdot(\vec{\phi} \pm \vec{\mathcal{T}}(\vec{\phi}))$ existiert somit die schwache Ableitung $D_l(\phi_i \circ \overset{t}{u})$ und ist gleich

$$2\cdot D_l(U_i \circ \overset{t}{u}) \mp D_l(\mathcal{T}(\vec{\phi})_i \circ \overset{t}{u}).$$

Jetzt findet man für $l \in \{1,2\}$:

$$\|D_l(\phi_i \circ \overset{t}{u})\|^r_{1-1/r,r}$$

$$\le 2^{r-1}\cdot(2^r\|D_l(U_i \circ \overset{t}{u})\|^r_{1-1/r,r} + \|D_l(\mathcal{T}(\vec{\phi})_i \circ \overset{t}{u})\|^r_{1-1/r,r})$$

$$\le R_{5,2}(r)\cdot(\|U_i\|^r_{2-1/r,r} + \|\vec{\phi}\|^r_r + \|\vec{U}\|^r_{1,r})$$

(mit $R_{5,3}(r) := 2^{r-1}(2^r + R_{5,1}(r))$; mit (7.22))

$$\le 2\cdot R_{5,2}(r)\cdot(\|\vec{U}\|^r_{2-1/r,r} + \|\vec{\phi}\|^r_r).$$

Die Behauptung des Lemmas folgt jetzt mit

$$R_5(r) := 3\cdot(1+2\cdot k_\Omega\cdot(2\cdot R_{5,2}(r))^{1/r}).$$ □

<u>Lemma 7.9:</u> <u>Sei</u> $r\in(1,\infty)$. <u>Setze</u> $R_6(r) := 2\cdot L_3(T_r)+1$, <u>mit</u> T_r <u>aus</u> <u>Definition</u> 5.2, L_3 <u>aus</u> (6.28). <u>Dann gilt folgende Aussage</u>:

<u>Sei</u> $\rho\in(0,1)$, $\vec{U}\in C^\rho(\partial\Omega)^3$ <u>mit</u>

$$\int_{\partial\Omega} <\vec{U}(y),\vec{n}(y)>\, d\Omega(y) = 0.$$

<u>Dann gibt es</u> $\vec{\phi}(\vec{U})\in C^\rho(\partial\Omega)^3$ <u>mit</u>

$$\vec{U} = (1/2)\cdot(\vec{\phi}(\vec{U})-\vec{T}(\vec{\phi}(\vec{U})))$$

<u>und</u>

$$\|\vec{\phi}(\vec{U})\|_r \le R_6(r)\cdot\|\vec{U}\|_r.$$

<u>Beweis:</u> Sei $\rho,\vec{U}$ wie im Lemma gegeben. Nach Lemma 6.8 gibt es $\vec{\psi}\in C^0(\partial\Omega)^3$ mit $\vec{U} = (1/2)\cdot(\vec{\psi}-\vec{T}(\vec{\psi}))$. Für den Operator T_r gilt dann (siehe Definition 5.2):

$$(7.23)\quad [2\cdot\vec{U}] = [\vec{\psi}] - T_r([\vec{\psi}]).$$

T_r ist kompakt (Satz 5.1), und für T_r trifft Fall II) von Satz 6.2 zu (Lemma 6.7). Setzt man

$$N_r := \{G\in L_r(\partial\Omega)^3 : G - T_rG = 0\},$$

so folgt aus (6.28):

$$(7.24)\quad \inf\{\|[\vec{\psi}]+G\|_r : G\in N_r\} \le L_3(T_r)\cdot\|[\vec{\psi}]-T_r([\vec{\psi}])\|_r.$$

Wir betrachten nun den Fall, daß $\|\vec{U}\|_r > 0$ ist. Wegen (7.24) können wir ein Element $G_o\in N_r$ wählen, so daß gilt:

$$\|[\vec{\psi}]+G_o\| \le L_3(T_r)\cdot\|[\vec{\psi}]-T_r([\vec{\psi}])\|_r + \|\vec{U}\|_r.$$

Aus (7.23) folgt:

$$\|[\vec{\psi}]+G_o\|_r \le L_3(T_r)\cdot\|[2\cdot\vec{U}]\|_r + \|\vec{U}\|_r \le R_6(r)\|\vec{U}\|_r.$$

Weiter gilt:

$$[2\cdot\vec{U}] = [\vec{\psi}]+G_o - T_r([\vec{\psi}]+G_o).$$

Da $\vec{U}\in C^\rho(\partial\Omega)^3$, gibt es nach Lemma 5.4 eine Funktion $\vec{\phi}(\vec{U})\in[\vec{\psi}]+G_o$ mit $\vec{\phi}(\vec{U})\in C^\rho(\partial\Omega)^3$. Diese Funktion $\phi(\vec{U})$ hat die gewünschten Eigenschaften.

Im Fall $\vec{U}=0$ wählen wir $\vec{\phi}(\vec{U}) := 0$. □

<u>Lemma 7.10:</u> <u>Sei</u> $r\in(1,\infty)$. <u>Setze</u> $R_6'(r) := 2\cdot L_3(-T_r)+1$, <u>mit</u> T_r <u>aus Definition</u> 5.2, L_3 <u>aus</u> (6.28). <u>Dann hat die Zahl</u> $R_6'(r)$ <u>folgende Eigenschaft</u>:

<u>Sei</u> $\rho\in(0,1)$, $\vec{U}\in C^\rho(\partial\Omega)^3$ <u>mit</u>

$$\int_{\partial\Omega} <\vec{U}(y),\vec{\psi}_{(k)}(y)>\, d\Omega(y) = 0 \qquad (1\le k\le 6),$$

<u>wobei die Funktionen</u> $\vec{\psi}_{(1)},\dots,\vec{\psi}_{(k)}$ <u>vor Lemma</u> 6.12 <u>fixiert wurden</u>. <u>Dann gibt es eine Funktion</u> $\vec{\psi}(\vec{U})\in C^\rho(\partial\Omega)^3$ <u>mit</u>

$$\vec{U} = (-1/2)\cdot(\vec{\psi}(\vec{U})+\vec{T}(\vec{\psi}(\vec{U})))$$

<u>und</u>

$$\|\vec{\psi}(\vec{U})\|_r \le R_6'(r)\cdot\|\vec{U}\|_r.$$

Beweis: Sei $\rho, \vec{U}$ wie im Lemma gegeben. Nach Lemma 6.10 gibt es $\vec{\phi} \in C^{\rho}(\partial\Omega)^3$ mit $\vec{U} = (-1/2)\cdot(\vec{\phi}+\vec{T}(\vec{\phi}))$. Somit gilt für den Operator T_r aus Definition 5.2:

$$[-2\cdot\vec{U}] = [\vec{\phi}] + T_r([\vec{\phi}]).$$

T_r ist ein kompakter Operator auf $L_r(\partial\Omega)^3$ (siehe Satz 5.1), und $([\vec{\psi}_{(1)}],\dots,[\vec{\psi}_{(6)}])$ ist eine Basis des Nullraumes von $I+T_r^*$ (siehe Lemma 6.10). Dabei ist I die identische Abbildung von $L_{(1-1/r)^{-1}}(\partial\Omega)^3$, und T_r^* die zu T_r duale Abbildung (Satz 5.1). Setzt man nun

$$\tilde{N}_r := \{G \in L_r(\partial\Omega)^3 : G + T_r G = 0\},$$

so folgt aus (6.28):

$$\inf\{\|[\vec{\phi}] + G\|_r : G \in \tilde{N}_r\} \le L_3(-T_r)\cdot\|[\vec{\phi}] + T_r([\vec{\phi}])\|_r.$$

Die Behauptung des Lemmas folgt nun wie im Beweis von Lemma 7.9. □

Satz 7.1: Sei $r \in (1,\infty)$. Setze $R_7(r) := R_5(r)\cdot(1+R_6(r))$. Dann hat $R_7(r)$ folgende Eigenschaft:

Sei $\rho \in (0,1)$, $\vec{U} \in C^{\rho}(\partial\Omega)^3 \cap W^{2-1/r,r}(\partial\Omega)^3$ mit $\int_{\partial\Omega} \langle\vec{U}(y),\vec{n}(y)\rangle \, d\Omega(y) = 0$. Dann gibt es $\vec{\phi}(\vec{U}) \in C^{\rho}(\partial\Omega)^3 \cap W^{2-1/r,r}(\partial\Omega)^3$ mit

$$(7.25) \quad \vec{U} = (1/2)\cdot(\vec{\phi}(\vec{U}) - \vec{T}(\vec{\phi}(\vec{U})))$$

und

$$\|\vec{\phi}(\vec{U})\|_{2-1/r,r} \le R_7(r)\cdot\|\vec{U}\|_{2-1/r,r}.$$

Beweis: Sei $\rho, \vec{U}$ gegeben wie im Satz, und sei $\vec{\phi}(\vec{U})$ die zu $\vec{U}$ nach Lemma 7.9 ausgewählte Funktion aus $C^{\rho}(\partial\Omega)^3$. Dann ist Gleichung (7.25) erfüllt, und es gilt ferner: $\vec{\phi}(\vec{U}) \in W^{2-1/r,r}(\partial\Omega)^3$ (siehe Lemma 7.8),

$$\|\vec{\phi}(\vec{U})\|_{2-1/r,r}$$

$$\le R_5(r)\cdot(\|\vec{U}\|_{2-1/r,r} + \|\vec{\phi}\|_r) \qquad \text{(nach Lemma 7.8)}$$

$$\le R_7(r)\cdot\|\vec{U}\|_{2-1/r,r} \qquad \text{(mit Lemma 7.9)}.$$ □

Satz 7.2: Sei $r \in (1,\infty)$. Setze $R_7'(r) := R_5(r)\cdot(1+R_6'(r))$. Dann hat die Zahl $R_7'(r)$ folgende Eigenschaft:

Sei $\rho \in (0,1)$, $\vec{U} \in C^{\rho}(\partial\Omega)^3 \cap W^{2-1/r,r}(\partial\Omega)^3$ mit

$$\int_{\partial\Omega} \langle\vec{U}(y),\vec{\psi}_{(k)}(y)\rangle \, d\Omega(y) = 0 \text{ für } 1 \le k \le 6,$$

wobei $\vec{\psi}_{(1)},\dots,\psi_{(6)}$ die vor Lemma 6.12 fixierten Funktionen sind. Dann gibt es eine Funktion $\vec{\psi}(\vec{U}) \in C^{\rho}(\partial\Omega)^3 \cap W^{2-1/r,r}(\partial\Omega)^3$ mit

$$\vec{U} = (-1/2)\cdot(\vec{\psi}(\vec{U}) + \vec{T}(\vec{\psi}(\vec{U})))$$

und

$$\|\vec{\psi}(\vec{U})\|_{2-1/r,r} \le R_7'(r)\cdot\|\vec{U}\|_{2-1/r,r}.$$

Beweis: Ist $\rho, \vec{U}$ wie im Satz gegeben, so wähle man $\vec{\psi}(\vec{U})$ nach Lemma 7.10. Aus Lemma 7.10 und 7.8 folgt dann, daß $\vec{\psi}(\vec{U})$ die gewünschten Eigenschaften hat. □

Lemma 7.11: Sei $N \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{R}^N$, $u \in C^0(U)$ und

$$\int_U u\Delta\varphi \; dy = 0 \text{ für } \varphi \in C_0^\infty(U).$$

Dann ist $u \in C^2(U)$ und $\Delta u = 0$.

Beweis (Wienholtz [1]): Sei $B \subset \mathbb{R}^N$ offen mit $\overline{B} \subset U$. Dann gilt nach [A], 2.18(d): $u_\varepsilon|B \to u|B$ $(\varepsilon \downarrow 0)$ gleichmäßig (u_ε wie in Lemma 1.3 definiert).

Sei $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon < \operatorname{dist}(\overline{B}, \partial U)$. Für $x \in B$ ist dann $\operatorname{Tr} \Theta_N^\varepsilon(x - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^N}) \subset U$. (Zur Definition von Θ_N^ε siehe ebenfalls Lemma 1.3.) Somit ist $\Theta_N^\varepsilon(x - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^N})|U \in C_0^\infty(U)$ und

$$u_\varepsilon(x) = \int_U u(y) \cdot \Theta_N^\varepsilon(x-y) \; dy \text{ für } x \in B.$$

Jetzt folgt für $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(\overline{B}, \partial U)$, $x \in B$:

$$\Delta u_\varepsilon(x) = \int_U u(y) \cdot \Delta_x \Theta_N^\varepsilon(x-y) \; dy = \int_U u(y) \cdot \Delta_y \Theta_N^\varepsilon(x-y) \; dy = 0,$$

wobei die letzte Gleichung aufgrund der Voraussetzung im Lemma gilt. Es ist also $\Delta(u_\varepsilon|B) = 0$ für $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(\overline{B}, \partial U)$. Weil $u_\varepsilon|B \to u|B$ $(\varepsilon \downarrow 0)$ gleichmäßig, folgt nun aus [F3], S. 172, daß $u|B \in C^2(B)$, $\Delta(u|B) = 0$. □

Wir benötigen im Folgenden einige Ergebnisse aus der L_p-Theorie des Laplace-Operators. Diese Ergebnisse fassen wir im nächsten Satz zusammen.

---

[1] Vorlesung "Partielle Differentialgleichungen", München, Sommersemester 1983

Satz 7.3: Sei $N \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{R}^N$ beschränktes Gebiet mit C^2-Berandung. Sei $p \in (3/2, \infty)$. Dann gibt es $R_8(U,p) > 0$, so daß für $u \in W^{2,p}(U) \cap W_0^{1,p}(U)$ gilt: LN

$$\|u\|_{2,p} \leq R_8(U,p) \cdot \|\Delta u\|_p.$$

Weiterhin gilt folgende Existenzaussage:

Zu $G \in L_p(U)$ gibt es $V \in W^{2,p}(U) \cap W_0^{1,p}(U)$ mit $\Delta V = G$.

Beweis: Der vorangehende Satz wird in [SiSo] bewiesen. Man erhält ihn aber auch als Spezialfall der allgemeineren Ergebnisse in [Si]. Dazu überlegt man sich zunächst, daß die Menge

$$N := \{F \in W^{2,p}(U) \cap W_0^{1,p}(U) : \Delta F = 0\}$$

nur das Nullelement enthält. Sei nämlich $u \in W^{2,p}(U) \cap W_0^{1,p}(U)$ mit $\Delta u = 0$ f.ü. Nach [A], 5.4(9), (10) gibt es dann $\tilde{u} \in C^0(\overline{U})$ mit $\tilde{u}|U = u$ f.ü. Nach Lemma 7.11 ist $\tilde{u}|U \in C^2(U)$ mit $\Delta(\tilde{u}|U) = 0$. Andererseits stellt man mit Satz 2.1 fest:

$$[\tilde{u}|\partial U] = R_U([\tilde{u}|U]) = R_U([u]).$$

Weil $R_U([u]) = 0$ gemäß Satz 2.3, folgt jetzt: $\tilde{u}|\partial U = 0$. Nun erhält man aus dem Maximumprinzip für harmonische Funktionen (siehe etwa [F3], S. 167): $\tilde{u} = 0$; d.h.: $u = 0$ f.ü. Es ist also $N = \{0\}$.

Die Existenzaussage in obigem Satz folgt nun aus [Si], Theorem 10.10 ii). Insbesondere ist also die Abbildung $L: W^{2,p}(U) \cap W_0^{1,p}(U) \ni F \to \Delta F \in L_p(U)$ surjektiv. Wegen $N = \{0\}$ ist L auch injektiv. Nach [Si], Theorem 10.10 iii) existiert ferner eine Zahl $R_{8,1}(U,p) > 0$, so daß

$$\|F\|_{2,p} \leq R_{8,1}(U,p) \cdot (\|\Delta F\|_p + \|F\|_p) \text{ für } F \in W^{2,p}(U) \cap W_0^{1,p}(U).$$

Mit dieser Abschätzung kann man zeigen, daß L abgeschlossen ist. Sei nämlich (F_n) Folge in $W^{2,p}(U) \cap W_o^{1,p}(U)$, $F,G \in L_p(U)$ mit $\|F_n-F\|_p \to 0$, $\|\Delta F_n-G\|_p \to 0$ $(n \to \infty)$. Dann folgt aus der Abschätzung von eben, daß (F_n) eine Cauchyfolge in $W^{2,p}(U)$ (also auch in $W_o^{1,p}(U)$) ist. Damit gibt es $H_1 \in W_o^{1,p}(U)$, $H_2 \in W^{2,p}(U)$ mit

$$\|F_n-H_1\|_{1,p} \to 0, \quad \|F_n-H_2\|_{2,p} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Insbesondere heißt das:

$$\|F_n-H_1\|_p \to 0, \quad \|F_n-H_2\|_p \to 0, \quad \|\Delta F_n-\Delta H_2\|_p \to 0 \quad (n \to \infty),$$

so daß folgt: $H_1 = H_2 = F$, $\Delta H_2 = G$. Wir haben also: $F \in W^{2,p}(U) \cap W_o^{1,p}(U)$, $LF = G$.

Aus der Abgeschlossenheit von L folgt aber auch die von L^{-1}. Jetzt erhält man aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen (siehe etwa [Y], S. 79): L^{-1} ist stetig. Somit existiert eine Konstante $R_8(U,p)$ mit Eigenschaften wie oben im Satz angegeben. □

<u>Lemma 7.12:</u> <u>Sei</u> $N \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{R}^N$ <u>beschränktes Gebiet mit</u> C^2<u>-Berandung</u>. <u>Sei</u> $r \in (N/2,\infty)$. <u>Dann gibt es eine Zahl</u> $R_9(U,r) > 0$ <u>mit folgenden Eigenschaften</u>:

<u>Wenn</u> $a \in W^{2-1/r,r}(\partial U) \cap C^o(\partial U)$, $f \in L_r(U) \cap C^o(U)$, $u \in C^o(\bar{U})$ <u>mit</u>

$$u|U \in C^2(U), \quad \Delta(u|U) = f, \quad u|\partial U = a,$$

<u>dann folgt</u>:

$$\|u|U\|_{2,r} \le R_9(U,r) \cdot (\|f\|_r + \|a\|_{2-1/r,r}).$$

<u>Beweis:</u> Sei a,f,u wie im Lemma gegeben. Nach Satz 2.2 gibt es $A \in W^{2,r}(U)$ mit $R_U(A) = [a]$ und

$$\|A\|_{2,r} \le \tilde{R}_8(U,2,r) \cdot \|a\|_{2-1/r,r}.$$

Da $[f]-\Delta A \in L_r(U)$, gibt es $V \in W^{2,r}(U) \cap W_o^{1,r}(U)$ mit $\Delta V = [f]-\Delta A$ (Satz 7.3). Damit ist $\Delta(V+A) = [f]$. Weil $A,V \in W^{2,r}(U)$ und $r > N/2$, kann man nach [A], 5.4(9), (10), Funktionen $\tilde{a},v \in C^o(\bar{U})$ wählen mit $\tilde{a}|U \in A$, $\tilde{v}|U \in V$. Nach Satz 2.1 und 2.3 gilt:

$$[(v+\tilde{a})|\partial U] = R_U([(v+\tilde{a})|U]) = R_U(A+V) = [a].$$

Jetzt folgt: $(v+\tilde{a})|\partial U = a$, also: $(u-v-\tilde{a})|\partial U = 0$. Weiter gilt für $\varphi \in C_o^\infty(U)$:

$$\int_U (u-v-\tilde{a}) \cdot \Delta\varphi \, dx = \int_U \Delta((u-v-\tilde{a})|U) \cdot \varphi \, dx = 0.$$

Lemma 7.11 liefert nun: $(u-v-\tilde{a})|U \in C^2(U)$, $\Delta((u-v-\tilde{a})|U) = 0$. (Beachte, daß man die Eigenschaft $(v+\tilde{a})|U \in C^2(U)$ nicht von vornherein kennt.) Nun ergibt sich aus dem klassischen Maximumprinzip (siehe etwa [F3], S. 167): $u-v-\tilde{a} = 0$; d.h.: $u = v+\tilde{a}$. Das bedeutet:

$$\|u|U\|_{2,r} \le \|v|U\|_{2,r} + \|\tilde{a}|U\|_{2,r}$$

$$\le R_8(U,r) \cdot (\|[f]-\Delta A\|_r) + \|A\|_{2,r} \quad \text{(nach Satz 7.3)}$$

$$\le R_8(U,r) \cdot (\|f\|_2 + \|A\|_{2,r}) + \|A\|_{2,r}$$

$$\le R_9(U,r) \cdot (\|f\|_r + \|a\|_{2-1/r,r})$$

(mit $R_9(U,r) := (R_8(U,r)+1) \cdot \tilde{R}_8(U,2,r)$; beachte die Auswahl von A). □

Lemma 7.13: Sei $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq 2$, $U \subset \mathbb{R}^N$ beschränktes Gebiet mit C^2-Berandung. Sei $r \in (N/2,\infty)$, $v \in W^{1,r}(U)$, $u \in C^0(\bar{U})$ mit $u|\partial U = 0$ und $u|U \in W^{2,r}(U)$. Sei $j \in \{1,2,3\}$. Dann gilt:

$$\int_U D_j v \cdot u \, dx = -\int_U v \cdot D_j(u|U)\, dx.$$

Beweis: Zunächst bemerken wir, daß

(7.26) $W^{2,r}(U) \subset W^{1,N+\varepsilon}(U)$ für ein $\varepsilon \in (0,\infty)$.

Dies ersieht man aus folgender Fallunterscheidung:

1. Fall: $r > N$. Dann ist (7.26) erfüllt, weil $W^{2,r}(U) \subset W^{1,r}(U)$.

2. Fall: $r = N$. Dann ist nach [A], 5.4(5) (mit $j=1$, $m=1$, $p=r$): $W^{2,r}(U) \subset W^{1,q}(U)$ für alle $q \geq N$.

3. Fall: $r < N$. Das bedeutet: $r \in (N/2,N)$, so daß

$$N\cdot r/(N-r) > N\cdot r/(N/2) = 2\cdot r > N > r.$$

Es gibt also $\varepsilon \in (0,\infty)$ mit $N\cdot r/(N-r) > N+\varepsilon > r$. Nach [A], 5.4(3), mit $m=1$, $p=r$, $q=N+\varepsilon$, folgt: $W^{2,r}(U) \subset W^{1,N+\varepsilon}(U)$.

Weil $u \in C^0(\bar{U})$, $u|\partial U = 0$, $u|U \in W^{1,r}(U)$, hat man:

$$R_U([u|U]) = [u|\partial U] = 0 \quad \text{(siehe Satz 2.1).}$$

Wegen Satz 2.3 bedeutet dies: $u|U \in W_0^{1,N+\varepsilon}(U)$. Es gibt also eine Folge (φ_n) in $C_0^\infty(U)$ mit $|u|U-\varphi_n|_{1,N+\varepsilon} \to 0$ $(n\to\infty)$. Nach [A], 5.4(8) heißt dies insbesondere: $|u|U-\varphi_n|_0 \to 0$ $(n\to\infty)$. Aus Letzterem folgt:

(7.27) $\int_U D_j v\cdot u\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_U D_j v \cdot \varphi_n\, dx.$

Weiter ist

(7.28) $\int_U D_j v \cdot \varphi_n\, dx = -\int_U v\cdot D_j\varphi_n\, dx$ für $n \in \mathbb{N}$.

Im Fall $r \geq 2$ ist klar: $W^{1,r}(U) \subset L_2(U)$. Sei nun $r < 2$. Dann gilt: $N/2 < r < N$. Es folgt wie oben: $N\cdot r/(N-r) > N$, so daß $N\cdot r/(N-r) > 2 > r$. Jetzt erhält man aus [A], 5.4(4): $W^{1,r}(U) \subset L_2(U)$. Wir haben also in jedem Fall: $v \in L_2(U)$. Andererseits wissen wir, daß $\|D_j(u|U) - D_j\varphi_n\|_{N+\varepsilon} \to 0$ $(n\to\infty)$. Um so mehr gilt: $\|D_j(u|U)-D_j\varphi_n\|_2 \to 0$ $(n\to\infty)$. Somit haben wir:

(7.29) $\int_U v\cdot D_j(u|U)\, dx = \lim_{n\to\infty}\int_U v\cdot D_j\varphi_n\, dx.$

Aus (7.27)-(7.29) folgt die Behauptung. □

Definition 7.1: Sei $S := \max\{L_7+\alpha_\Omega+1, \sqrt{3}\cdot\alpha_\Omega\}$, mit L_7 aus Satz 6.4. Sei $U := K_S(0)\setminus\bar{\Omega}$.

Die Menge U ist nicht leer, weil $S > L_7$ und $\bar{\Omega} \subset K_{L_7}(0)$ ist. $K_S(0)$ und U sind beschränkte Gebiete im $\mathbb{R}^3$ mit C^2-Berandung. Wir wollen Beschreibungen von $\partial K_S(0)$ und ∂U festlegen (siehe § 2). Wir gehen aus von der Beschreibung

$$\mathcal{B} = (k_\Omega, (\tilde{A}_i^\Omega)_{1\le i\le k_\Omega}, (C_i^\Omega)_{1\le i\le k_\Omega}, \alpha_\Omega, (a_i^\Omega)_{1\le i\le k_\Omega}, (\omega_i^\Omega)_{1\le i\le k_\Omega})$$

von $\partial\Omega$, die in § 3 fixiert wurde.

Definition 7.2: Sei

$$h:\ [-\alpha_\Omega,\alpha_\Omega]^2 \ni (x_1,x_2) \to (S^2-x_1^2-x_2^2)^{1/2} \in \mathbb{R}.$$

Es gibt nun $l_S \in \mathbb{N}$ und orthonormale Matrizen $B_1,\dots,B_{l_S}$ aus $\mathbb{R}^{3\times 3}$, so daß

$$\partial K_S(0) = \bigcup_{i=1}^{l_S} \{B_i\cdot(\eta,h(\eta)) :\ \eta \in \Delta^{1/4}\}.$$

Nach Auswahl von S gilt für $1 \le i \le l_S$, $\eta \in \Delta$, $\xi \in (0,\alpha_\Omega]$:

$$B_i\cdot(\eta,h(\eta)-\xi) \in K_S(0)\setminus\bar{\Omega} \equiv U,$$

$$B_i\cdot(\eta,h(\eta)+\xi) \in \mathbb{R}^3\setminus\overline{K_S(0)} = \mathbb{R}^3\setminus\bar{U}.$$

Wir wählen noch $\gamma^1,\dots,\gamma^{l_S} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ mit $0 \le \gamma^i \le 1$,

$$\mathrm{Tr}\ \gamma^i \subset \{B_i\cdot(\eta,h(\eta)+\xi) :\ \eta \in \Delta^{1/4},\ \xi \in (-\alpha_\Omega/4,\alpha_\Omega/4)\} \quad \text{für } 1 \le i \le l_S,$$

sowie mit $\sum_{i=1}^{l_S} \gamma^i|\partial K_S(0) \equiv 1$.

Dann ist

$$\mathcal{B}_S := (l_S, (B_i)_{1\le i\le l_S}, (0)_{1\le i\le l_S}, \alpha_\Omega, (h)_{1\le i\le l_S}, (\gamma^i)_{1\le i\le l_S})$$

eine Beschreibung von $\partial K_S(0)$.

Wir definieren eine Matrix $Q := (q_{ij})_{1\le i,j\le 3}$ durch

$$q_{11} := q_{22} := 1,\ q_{33} := -1,\ q_{ij} := 0 \text{ sonst}.$$

Dann setzen wir für $1 \le i \le k_\Omega$:

$$a_i^U := -a_i^\Omega,\ \tilde{A}_i^U := \tilde{A}_i^\Omega\cdot Q,\ c_i^U := c_i^\Omega,\ {}^{i}\omega^{U} := {}^{i}\omega^{\Omega}.$$

Ferner sei für $i \in \{k_\Omega+1,\dots,k_\Omega+l_S\}$:

$$a_i^U := h,\ \tilde{A}_i^U := B_{i-k_\Omega},\ c_i^U := 0,\ {}^{i}\omega^{U} := \gamma^{i-k_\Omega}.$$

Dann ist

$$\mathcal{B}_U := (k_\Omega+l_S, (\tilde{A}_i^U)_{1\le i\le k_\Omega+l_S}, (c_i^U)_{1\le i\le k_\Omega+l_S}, \alpha_\Omega, (a_i^U)_{1\le i\le k_\Omega+l_S}, ({}^{i}\omega^{U})_{1\le i\le k_\Omega+l_S})$$

eine Beschreibung von ∂U. Dies folgt, weil für $1 \le i \le k_\Omega$, $\eta \in \Delta$, $\xi \in [-\alpha_\Omega,\alpha_\Omega]$ gilt:

$$\tilde{A}_i^U\cdot(\eta,a_i^U(\eta)+\xi) + c_i^U = \tilde{A}_i^\Omega\cdot(\eta,a_i^\Omega(\eta)-\xi) + c_i^\Omega.$$

Die Beschreibungen $\mathcal{B}_S, \mathcal{B}_U$ von $\partial K_S(0)$, ∂U wurden so gewählt, daß folgende Eigenschaft erfüllt ist:

Sei $f: \partial U \to \mathbb{C}$ meßbar, $p \in [1,\infty)$, $\sigma \in [0,3)$. Dann ist $f \in W^{\sigma,p}(\partial U)$ genau dann, wenn $f|\partial\Omega \in W^{\sigma,p}(\partial\Omega)$ und $f|\partial K_S(0) \in W^{\sigma,p}(\partial K_S(0))$. Falls eine – und damit jede – Seite dieser Äquivalenz zutrifft, so gilt:

$$\text{(7.30)}\quad \|f\|^p_{\sigma,s,\mathcal{B}_U} = \|f|\partial\Omega\|^p_{\sigma,p,\mathcal{B}} + \|f|\partial K_S(0)\|^p_{\sigma,p,\mathcal{B}_S}.$$

Wie wir bisher anstelle von $\|\ \|_{m,p,\mathcal{B}}$ nur $\|\ \|_{m,p}$ geschrieben haben, so werden wir auch im Folgenden statt $\|\ \|_{m,p,\mathcal{B}}$, $\|\ \|_{m,p,\mathcal{B}_S}$, $\|\ \|_{m,p,\mathcal{B}_U}$ nur die Bezeichnung $\|\ \|_{m,p}$ verwenden ($p \in [1,\infty)$, $m \in [0,3)$).

<u>Lemma 7.14:</u> <u>Sei</u> $r \in (1,\infty)$. <u>Dann gibt es</u> $R_{10}(r) > 0$, <u>so daß für</u> $v \in C^{\infty}(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega})$ <u>gilt:</u>

$$v|\partial K_S(0) \in W^{2-1/r,r}(\partial K_S(0)),$$

$$\|v|\partial K_S(0)\|_{2-1/r,r} \le R_{10}(r) \cdot \sum_{b \in \mathbb{N}_0^3, |b|_* \le 2} |(D_b v)|\partial K_S(0)|_0 .$$

<u>Beweis:</u> Nach [FJK], S. 330 gibt es $R_{10,1}(r) > 0$, so daß

$$\|g\|_{2-1/r,r} \le R_{10,1}(r) \cdot |g|_{1,1-1/(2r)} \quad \text{für } g \in C^{1,1-1/(2r)}(\bar{\Delta}).$$

Weiter gibt es $R_{10,2}(r) > 0$, so daß

$$|g|_{1,1-1/(2r)} \le R_{10,2}(r) \cdot |g|_2 \quad \text{für } g \in C^2(\bar{\Delta}).$$

Wir erinnern an die Definition der Funktion $\overset{t}{u}{}^{B_S}$, für $1 \le t \le l_S$ (Siehe Definition 7.1 und § 2). Mit der Abkürzung $\overset{t}{u} := \overset{t}{u}{}^{B_S}$ $(1 \le t \le l_S)$ ergibt sich für $1 \le t \le l_S$:

$$\begin{aligned}
&|v \circ \overset{t}{u}|_2 \\
&\le |v|\partial K_S(0)|_0 + \sum_{\nu=1}^{2} \sum_{k=1}^{3} \left|D_k v|\partial K_S(0)\right|_0 \cdot \left|D_\nu \overset{t}{u}_k\right|_0 \\
&\quad + \sum_{\mu,\nu=1}^{2} \sum_{k,l=1}^{3} \left|D_l D_k v|\partial K_S(0)\right|_0 \cdot \left|D_\nu \overset{t}{u}_k\right|_0 \cdot \left|D_\mu \overset{t}{u}_k\right|_0 \\
&\quad + \sum_{\mu,\nu=1}^{2} \sum_{k=1}^{3} \left|D_k v|\partial K_S(0)\right|_0 \cdot \left|D_\mu D_\nu \overset{t}{u}_k\right|_0
\end{aligned}$$

$$\le R_{10,3} \cdot \sum_{b \in \mathbb{N}_0^3, |b|_* \le 2} \left|D_b v|\partial K_S(0)\right|_0$$

$$\begin{aligned}
(\text{mit } R_{10,3} := 1 + \max\{ &\sum_{\nu=1}^{3} |D_\nu \overset{r}{u}_k|_0 + \sum_{\mu,\nu=1}^{3} |D_\nu \overset{r}{u}_k|_0 \cdot |D_\mu \overset{r}{u}_l|_0 \\
&+ \sum_{\mu,\nu=1}^{3} |D_\mu D_\nu \overset{r}{u}_k|_0 :\ 1 \le k,l \le 3, \\
&1 \le r \le l_S\}).
\end{aligned}$$

Jetzt folgt:

$$\begin{aligned}
\|v|\partial K_S(0)\|_{2-1/r,r} &= \sum_{t=1}^{l_S} \|v \circ \overset{t}{u}\|_{2-1/r,r} \\
&\le R_{10,1}(r) \cdot R_{10,2}(r) \cdot \sum_{t=1}^{l_S} |v \circ \overset{t}{u}|_2 \\
&\le R_{10}(r) \cdot \sum_{b \in \mathbb{N}_0^3, |b|_* \le 2} \left|D_b v|\partial K_S(0)\right|_0
\end{aligned}$$

(mit $R_{10}(r) := R_{10,1}(r) \cdot R_{10,2}(r) \cdot R_{10,3}$). □

<u>Lemma 7.15:</u> <u>Sei</u> $r \in (1,\infty)$. <u>Dann gibt es</u> $R_{11}(r) > 0$, <u>so daß für</u> $\rho \in (0,1)$ <u>und für</u> $\vec{\phi} \in C^{\rho}(\partial\Omega)^3 \cap W^{2-1/r,r}(\partial\Omega)^3$ <u>gilt:</u> [3/2

$$\|\Pi(.,\vec{\phi})|\Omega\|_{1,r},\ \|\Pi(.,\vec{\phi})|U\|_{1,r} \le R_{11}(r) \cdot \|\vec{\phi}\|_{2-1/r,r} .$$

(<u>Die Funktion</u> $\Pi(.,\vec{\phi})$ <u>wurde in Definition</u> 4.1 <u>eingeführt</u>)

Beweis: Sei $\rho, \vec{\phi}$ wie im Lemma gegeben. Wir definieren für $i,j \in \{1,2,3\}$:

$$\vec{\phi}^{i,j} := (\delta_{j1}\cdot\phi_i, \delta_{j2}\cdot\phi_i, \delta_{j3}\cdot\phi_i).$$

Weiter setzen wir

$$\vec{J} := (-2\cdot\nu/3)\cdot\Big(\sum_{j=1}^{3} W_j(\cdot,\vec{\phi}^{1,j}), \sum_{j=1}^{3} W_j(\cdot,\vec{\phi}^{2,j}), \sum_{j=1}^{3} W_j(\cdot,\vec{\phi}^{3,j})\Big).$$

Es ist für $x \in \Omega \cup \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$:

$$(7.31)\quad \Pi(x,\vec{\phi}) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \nu/(2\cdot\pi)\cdot\int_{\partial\Omega} \partial/\partial x_i\{(x_k-y_k)\cdot|x-y|^{-3}\} \cdot n_k(y)\cdot\phi_i(y)\, d\Omega(y)$$

(siehe Definition 4.1 , Lemma 1.7)

$$= (-2\cdot\nu/3)\cdot\sum_{i=1}^{3} \partial/\partial x_i \Big\{\sum_{j=1}^{3}\int_{\partial\Omega} (-3/(4\cdot\pi))\cdot\sum_{k=1}^{3}(x_k-y_k) \cdot(x_j-y_j)^2\cdot|x-y|^{-5}\cdot n_k(y)\cdot\phi_i(y)\, d\Omega(y)\Big\}$$

$$= (-2\cdot\nu/3)\cdot\sum_{i=1}^{3} \partial/\partial x_i\{\sum_{j=1}^{3}\int_{\partial\Omega} K_{jj}(x,y)\cdot\phi_i(y)\, d\Omega(y)\}$$

$$= (-2\cdot\nu/3)\cdot\sum_{i=1}^{3} \partial/\partial x_i\{\sum_{j=1}^{3}\sum_{m=1}^{3}\int_{\partial\Omega} K_{jm}(x,y)\cdot\delta_{jm}\cdot\phi_i(y)\, d\Omega(y)\}$$

$$= (-2\cdot\nu/3)\cdot\sum_{i=1}^{3} \partial/\partial x_i\{\sum_{j=1}^{3} W_j(x,\vec{\phi}^{i,j})\}$$

(siehe Lemma 4.2, III))

$$= \operatorname{div} \vec{J}(x).$$

Nach Satz 4.1 existieren für $\xi \in \partial\Omega$ die Grenzwerte

$$\vec{J}^{(in)}(\xi) := \lim_{x\to\xi,\, x\in\Omega} \vec{J}(x),\quad \vec{J}^{(ex)}(\xi) := \lim_{x\to\xi,\, x\in\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}} \vec{J}(x),$$

und es gilt für $i \in \{1,2,3\}$, $\xi \in \partial\Omega$:

$$(7.32)\quad -3/(2\cdot\nu)\cdot J_i^{(in)}(\xi) = (1/2)\cdot\Big(\sum_{j=1}^{3}\phi_j^{i,j}(\xi) - \sum_{j=1}^{3}\vec{T}(\vec{\phi}^{i,j})_j(\xi)\Big),$$

$$(7.33)\quad -3/(2\cdot\nu)\cdot J_i^{(ex)}(\xi) = (-1/2)\cdot\Big(\sum_{j=1}^{3}\phi_j^{i,j}(\xi) + \sum_{j=1}^{3}\vec{T}(\vec{\phi}^{i,j})_j(\xi)\Big).$$

Beachtet man, daß $\phi_j^{i,j} = \phi_i$ für $1 \le i,j \le 3$, so ergibt sich aus (7.32), (7.33), für $1 \le i \le 3$:

$$J_i^{(in)} = -\nu\cdot\phi_i + (2\cdot\nu/3)\cdot\sum_{j=1}^{3}\vec{T}(\vec{\phi}^{i,j})_j,$$

$$J_i^{(ex)} = \nu\cdot\phi_i + (2\cdot\nu/3)\cdot\sum_{j=1}^{3}\vec{T}(\vec{\phi}^{i,j})_j.$$

Jetzt folgt mit Lemma 7.7:

$$\vec{J}^{(in)}, \vec{J}^{(ex)} \in W^{2-1/r,r}(\partial\Omega)^3,$$

$$(7.34)\quad \|\vec{J}^{(in)}\|_{2-1/r,r},\ \|\vec{J}^{(ex)}\|_{2-1/r,r}$$

$$\le R_{11,1}(r)\cdot\|\vec{\phi}\|_{2-1/r,r} \qquad (\text{mit } R_{11,1}(r):=\nu+6\cdot\nu\cdot R_4(r)).$$

Sei $i\in\{1,2,3\}$. Aufgrund einer entsprechenden Eigenschaft von $\sum_{j=1}^{3} W_j(.,\vec{\phi}^{i,j})$ ist $J_i|\mathbb{R}^3\setminus\partial\Omega\in C^\infty(\mathbb{R}^3\setminus\partial\Omega)$. Es gilt für $x\in\mathbb{R}^3\setminus\partial\Omega$:

$$(7.35)\quad \Delta J_i(x)=\Delta_x\{(-2\cdot\nu/3)\cdot\sum_{j=1}^{3} W_j(x,\vec{\phi}^{i,j})\}$$

$$=\Delta_x\{(-2\cdot\nu/3)\cdot\sum_{j=1}^{3}\sum_{m=1}^{3}\int_{\partial\Omega} K_{jm}(x,y)\cdot\delta_{jm}\cdot\phi_i(y)\ d\Omega(y)\}$$

$$=\Delta_x\{\nu/(2\cdot\pi)\cdot\sum_{j=1}^{3}\int_{\partial\Omega}\sum_{k=1}^{3}(x_k-y_k)\cdot|x-y|^{-3}$$

$$\cdot n_k(y)\cdot\phi_i(y)\ d\Omega(y)\}$$

$$=\nu/(2\cdot\pi)\cdot\sum_{j=1}^{3}\int_{\partial\Omega}\Delta_x\{(-1)\cdot\partial/\partial x_k(|x-y|^{-1})\}\cdot\phi_i(y)\ d\Omega(y)$$

$$=\nu/(2\cdot\pi)\cdot\sum_{j,k=1}^{3}\int_{\partial\Omega}(-1)\cdot\partial/\partial x_k\{\Delta_x(|x-y|^{-1})\}\cdot\phi_i(y)\ d\Omega(y)$$

$$=0.$$

Man definiert nun eine Abbildung $u:\overline{\Omega}\to\mathbb{C}$, indem man festsetzt:

$u(x):=J_i(x)$, falls $x\in\Omega$,

$u(x):=J_i^{(in)}(x)$, falls $x\in\partial\Omega$.

Wegen Satz 4.1 und wegen der Definition von $\vec{J}^{(in)}$ (siehe vor (7.32)) gehört die Funktion u zu $C^0(\overline{\Omega})$. Ferner hat man wegen (7.34): $u|\partial\Omega\in W^{2-1/r,r}(\partial\Omega)$,

$$\|u|\partial\Omega\|_{2-1/r,r}\le R_{11,1}(r)\cdot\|\vec{\phi}\|_{2-1/r,r},$$

und wegen (7.35): $\Delta(u|\Omega)=0$. Jetzt folgt mit Lemma 7.12:

$$\|J_i|\Omega\|_{2,r}=\|u|\Omega\|_{2,r}\le R_{11,2}(r)\cdot\|\vec{\phi}\|_{2-1/r,r}$$

$$(\text{mit } R_{11,2}(r):=R_9(\Omega,r)\cdot R_{11,1}(r)).$$

Hierbei war i beliebig aus $\{1,2,3\}$.

Nun erhält man aus (7.31):

$$(7.36)\quad \|\Pi(.,\vec{\phi})|\Omega\|_{1,r}\le 3\cdot R_{11,2}(r)\cdot\|\vec{\phi}\|_{2-1/r,r}.$$

Für $\Pi(.,\vec{\phi})|U$ gilt eine ähnliche Überlegung: Sei $i\in\{1,2,3\}$ festgehalten, und sei $\tilde{u}$ die stetige Fortsetzung von $J_i|U$ auf $\overline{U}$. Das bedeutet: $\tilde{u}(x)=J_i^{(ex)}(x)$ für $x\in\partial\Omega$; siehe die Definition von $\vec{J}^{(ex)}$. Beachtet man, daß $J_i|\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}\in C^\infty(\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega})$, so folgt aus (7.34) und Lemma 7.14: $\tilde{u}|\partial U\in W^{2-1/r,r}(\partial U)$. Wegen (7.35) ist $\Delta(\tilde{u}|U)=0$. Damit erhält man mit Lemma 7.12:

$$(7.37)\quad \|J_i|U\|_{2,r}=\|\tilde{u}|U\|_{2,r}\le R_9(U,r)\cdot\|\tilde{u}|\partial U\|_{2-1/r,r}.$$

Gemäß (7.30) ist aber $\|\tilde{u}|\partial U\|_{2-1/r,r}$ beschränkt durch die Summe von $\|\tilde{u}|\partial\Omega\|_{2-1/r,r}$ und $\|\tilde{u}|\partial K_S(0)\|_{2-1,r,r}$. Jetzt folgt aus (7.37), Lemma 7.14 und (7.34):

(7.38) $\|J_i|U\|_{2,r}$

$$\le R_{11,3}(r)\cdot\Big(\|\vec{\phi}\|_{2-1/r,r} + \sum_{j=1}^{3} \sum_{\substack{b\in\mathbb{N}_0^3,\\ |b|_*\le 2}} |D_b W_j(\cdot,\vec{\phi}^{i,j})|\partial K_S(0)|_0\Big)$$

(mit $R_{11,3}(r) := R_9(U,r)\cdot(R_{11,1}(r)+R_{10}(r))$).

Es ist $S \ge L_7 \ge L_4$ (siehe Definition 7.1, Satz 6.4, Lemma 6.11).
Daher gilt:

$$\sum_{j=1}^{3} \sum_{b\in\mathbb{N}_0^3,|b|_*\le 2} |D_b W_j(\cdot,\vec{\phi}^{ij})|\partial K_S(0)|_0$$

$$\le \sum_{j=1}^{3} \sum_{b\in\mathbb{N}_0^3,|b|_*\le 2} L_5(r)\cdot S^{-|b|_*-1}\cdot\|\vec{\phi}^{i,j}\|_r \quad \text{(nach Lemma 6.11)}$$

$$\le R_{11,4}(r)\cdot\|\vec{\phi}\|_r \quad \Big(\text{mit } R_{11,4} := 3\cdot L_5(r)\cdot \sum_{b\in\mathbb{N}_0^3,|b|_*\le 2} S^{-|b|_*-1}\Big).$$

Jetzt erhält man aus (7.38):

$$\|J_i|U\|_{2,r} \le R_{11,5}(r)\cdot\|\vec{\phi}\|_{2-1/r,r}$$

(mit $R_{11,5}(r) := R_{11,3}(r)\cdot(1+R_{11,4}(r))$).

Mit (7.31) ergibt sich:

(7.39) $\|\pi(\cdot,\vec{\phi})|U\|_{1,r} \le 3\cdot R_{11,5}(r)\cdot\|\vec{\phi}\|_{2-1/r,r}$.

Setzt man

$$R_{11}(r) := 3\cdot\max\{R_{11,2}(r), R_{11,5}(r)\},$$

so folgt die Behauptung aus (7.36) und (7.39). □

<u>Satz 7.4:</u> <u>Sei</u> $r\in(3/2,\infty)$, $\vec{f}\in L_r(\partial\Omega)^3$, $\vec{a}\in W^{2-1/r,r}(\partial\Omega)^3$ <u>mit</u>
$\int_{\partial\Omega} \langle\vec{a}(y),\vec{n}(y)\rangle\, d\Omega(y) = 0.$

<u>Dann gilt folgende Existenzaussage für Lösungen des Innenraumproblems zum linearen Stokes-System: Die Menge</u>

$$L_{\Omega,in}(\vec{f},\vec{a}) := \Big\{\vec{u}\times\pi \in C^0(\bar\Omega)^3 \times W^{1,r}(\Omega):$$
$$\vec{u}|\Omega \in W^{2,r}(\Omega)^3,\ -\nu\cdot\Delta(\vec{u}|\Omega)+\nabla\pi = \vec{f} \text{ f.ü.},$$
$$\operatorname{div}(\vec{u}|\Omega) = 0 \text{ f.ü.},\ \vec{u}|\partial\Omega = \vec{a} \text{ f.ü.}\Big\}$$

<u>ist nicht leer</u>.

<u>Es gilt folgende Eindeutigkeitsaussage:</u> <u>Sind</u> $(\vec{v}_1,\pi_1),(\vec{v}_2,\pi_2)\in L_{\Omega,in}(\vec{f},\vec{a})$, <u>so ist</u> $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$, <u>und es gibt</u> $K\in\mathbb{R}$ <u>mit</u> $\pi_1+K = \pi_2$ f.ü.

<u>Wenn</u> $\vec{f}\in C^\alpha(\Omega)^3$ <u>ist für ein Element</u> $\alpha\in(0,1)$, <u>so gilt für</u> $(\vec{u},\pi)\in L_{\Omega,in}(\vec{f},\vec{a})$: $\vec{u}|\Omega\in C^2(\Omega)^3$, $\tilde\pi\in C^1(\Omega)$ <u>für eine Funktion</u> $\tilde\pi\in[\pi]$.

<u>Schließlich gibt es eine Zahl</u> $R_{12}(r)>0$, <u>so daß für</u> $\vec{f}\in L_r(\Omega)^3$, $\vec{a}\in W^{2-1/r,r}(\partial\Omega)^3$ <u>mit</u>

$$\int_{\partial\Omega} \langle\vec{a}(y),\vec{n}(y)\rangle\, d\Omega(y) = 0,$$

<u>und für</u> $(\vec{u},\pi)\in L_{\Omega,in}(\vec{f},\vec{a})$ <u>gilt</u>:

$$\|\vec{u}|\Omega\|_{2,r} + \|\nabla\pi\|_r \le R_{12}(r)\cdot(\|\vec{f}\|_r + \|\vec{a}\|_{2-1/r,r}).$$

<u>Beweis:</u> Sei $\vec{g}$ die triviale Fortsetzung von $\vec{f}$ auf $\mathbb{R}^3$. Sei $t>0$ mit $\bar\Omega\subset K_t(0)$. Dann ist $Tr\,\vec{g}\subset K_t(0)$ und $\vec{g}\in L_1(\mathbb{R}^3)^3 \cap L_r(\mathbb{R}^3)^3$.

Für die in Satz 1.4 I) eingeführten Funktionen $\vec{u}(\vec{g})$, $\pi(\vec{g})$ folgt jetzt nach Satz 1.4, I), II):

$$-\nu\cdot\Delta\vec{u}(\vec{g}) + \nabla\pi(\vec{g}) = \vec{g} \text{ f.ü.}, \quad \operatorname{div}\vec{u}(\vec{g}) = 0 \text{ f.ü.}$$

$$\vec{u}(\vec{g})|K_t(0) \in W^{2,r}(K_t(0))^3, \quad \pi(\vec{g}) \in W^{1,r}(K_t(0));$$

(7.40) $\|\vec{u}(\vec{g})|K_t(0)\|_{2,r} + \|\pi(\vec{g})|K_t(0)\|_r \le P_{11}(r,t)\cdot\|\vec{g}\|_r.$

Insbesondere ist $\vec{u}(\vec{g})|\Omega \in W^{2,r}(\Omega)^3$. Das bedeutet nach [A], 5.4(9), (10), daß es $\vec{u}_1 \in C^0(\bar{\Omega})^3$ gibt mit $[\vec{u}_1|\Omega] = [\vec{u}(\vec{g})|\Omega]$. Wegen $u_{1i} \in C^0(\bar{\Omega})$, $u_{1i}|\Omega \in W^{2,r}(\Omega)$ gilt nach Satz 2.1, 2.2:

$$[u_{1i}|\partial\Omega] = R_\Omega([u_{1i}|\partial\Omega]) \in W^{2-1/r,r}(\partial\Omega) \quad (1 \le i \le 3).$$

Man erhält jetzt folgende Abschätzung:

(7.41) $\|\vec{u}_1|\partial\Omega\|_{2-1/r,r}$

$\le R_8(\Omega,2,r)\cdot\|\vec{u}_1|\Omega\|_{2,r}$ (nach Satz 2.2)

$\le R_8(\Omega,2,r)\cdot\|u_i(\vec{g})|K_t(0)\|_{2,r}$

$\le R_{12,1}(r)\cdot\|\vec{g}\|_r$ (mit $R_{12,1}(r) := R_8(\Omega,2,r)\cdot P_{11}(r,t)$; wegen (7.40))

$= R_{12,1}(r)\cdot\|\vec{f}\|_r.$

Nach Lemma 2.5 gibt es $\rho \in (0,1)$, so daß für $b \in W^{2-1/r,r}(\partial\Omega)$ gilt: $[b] \cap C^\rho(\partial\Omega) \neq \emptyset$. Man kann daher $\tilde{\vec{a}}$ aus $C^\rho(\partial\Omega)^3$ wählen mit $\tilde{\vec{a}} = \vec{a}$ f.ü. Wegen $\vec{u}_1|\partial\Omega \in W^{2-1/r,r}(\partial\Omega)^3 \cap C^0(\partial\Omega)^3$ folgt außerdem: $\vec{u}_1|\partial\Omega \in C^\rho(\partial\Omega)^3$. Weiterhin erhält man aus Lemma 2.4:

$$\int_{\partial\Omega} \langle \vec{u}_1|\partial\Omega, \vec{n}\rangle \, d\Omega = \int_\Omega \operatorname{div}(\vec{u}_1|\Omega)\, dx = \int_\Omega \operatorname{div}(\vec{u}(\vec{g})|\Omega)\, dx = 0.$$

Somit sind die Voraussetzungen von Satz 7.1 erfüllt, wenn man dort $\vec{U}$ durch $\vec{u}_1|\partial\Omega - \tilde{\vec{a}}$ ersetzt. Sei dann $\vec{\phi}$ eine Abkürzung für die Funktion $\vec{\phi}(-\vec{u}_1|\partial\Omega + \tilde{\vec{a}})$ aus Satz 7.1. Das bedeutet: $\vec{\phi} \in W^{2-1/r,r}(\partial\Omega)^3 \cap C^\rho(\partial\Omega)^3$,

(7.42) $-\vec{u}_1|\partial\Omega + \tilde{\vec{a}} = (1/2)\cdot(\vec{\phi} - T(\vec{\phi}))$,

(7.43) $\|\vec{\phi}\|_{2-1/r,r} \le R_7(r)\cdot\|\vec{u}_1|\partial\Omega - \tilde{\vec{a}}\|_{2-1/r,r}.$

Sei nun $\vec{u}_2 := \vec{W}(.,\vec{\phi})_i$ (siehe Satz 4.1). Es gilt nach Satz 6.3 und wegen (7.42):

$$\vec{u}_2 \in C^0(\bar{\Omega})^3, \quad \vec{u}_2|\Omega \in C^2(\Omega)^3, \quad \Pi(.,\vec{\phi})|\Omega \in C^1(\Omega),$$

(7.44) $-\nu\cdot\Delta(\vec{u}_2|\Omega) + \nabla(\Pi(.,\vec{\phi})|\Omega) = 0, \quad \operatorname{div}(\vec{u}_2|\Omega) = 0,$

(7.45) $\vec{u}_2|\partial\Omega = -\vec{u}_1|\partial\Omega + \tilde{\vec{a}}.$

Die Funktion $\Pi(.,\vec{\phi})$ läßt sich so abschätzen:

(7.46) $\|\Pi(.,\vec{\phi})|\Omega\|_{1,r} \le R_{11}(r)\cdot\|\vec{\phi}\|_{2-1/r,r}$ (nach Lemma 7.15)

$\le R_{12,2}(r)\cdot\|\vec{u}_1|\partial\Omega - \tilde{\vec{a}}\|_{2-1/r,r}$

(mit $R_{12,2}(r) := R_{11}(r)\cdot R_7(r)$; wegen (7.43))

$\le R_{12,3}(r)\cdot(\|\vec{f}\|_r + \|\vec{a}\|_{2-1/r,r})$

(mit $R_{12,3}(r) := R_{12,2}(r)\cdot(R_{12,1}(r)+1)$; wegen (7.41)).

Wegen (7.41) ist $-u_{1i}|\partial\Omega+\tilde{a}_i \in W^{2-1/r,r}(\partial\Omega)$; wegen (7.46) gilt: $D_i(\Pi(\cdot,\vec{\phi})|\Omega) \in L_r(\Omega)$ $(i \in \{1,2,3\})$. Daraus sowie aus (7.44) und (7.45) folgt, daß man Lemma 7.12 auf u_{2i} anwenden kann; es ergibt sich für $i \in \{1,2,3\}$:

$$\|u_{2i}|\Omega\|_{2,r} \le (1/\nu)\cdot R_9(\Omega,r) \cdot (\|D_i[\Pi(\cdot,\vec{\phi})|\Omega]\|_r + \|u_{1i}|\partial\Omega-\tilde{a}_i\|_{2-1/r,r}).$$

Nun folgt mit (7.46) und (7.41):

(7.47) $\|\vec{u}_2|\Omega\|_{2,r} \le R_{12,4}(r)\cdot(\|\vec{f}\|_r+\|\vec{a}\|_{2-1/r,r}),$

wobei $R_{12,4}(r) := (1/\nu)\cdot R_9(\Omega,r)\cdot(R_{12,3}(r)+R_{12,1}(r)+1)$.

Wir setzen nun

$$\vec{u} := \vec{u}_1+\vec{u}_2,\quad \pi := \pi(\vec{g})|\Omega+\Pi(\cdot,\vec{\phi})|\Omega.$$

Dann ist $\vec{u} \in C^0(\bar{\Omega})$ mit $\vec{u}|\partial\Omega \in W^{2,r}(\Omega)^3$, $\pi \in W^{1,r}(\Omega)$,

$$-\nu\cdot\Delta(\vec{u}|\Omega)+\nabla\pi = \vec{f} \text{ f.ü.}, \quad \operatorname{div}(\vec{u}|\Omega) = 0 \text{ f.ü.},$$

$\vec{u}|\partial\Omega = \vec{\tilde{a}}$, also: $\vec{u}|\partial\Omega = \vec{a}$ f.ü.

Zusammen folgt: $(\vec{u},\pi) \in L_{\Omega,in}(\vec{f},\vec{a})$. Aus (7.40), (7.46) und (7.47) ergibt sich:

$$\|\vec{u}|\Omega\|_{2,r}+\|\pi\|_r \le R_{12}(r)\cdot(\|\vec{f}\|_r+\|\vec{a}\|_{2-1/r,r})$$

(mit $R_{12}(r) := P_{11}(r,t)+R_{12,3}(r)+R_{12,4}(r)$).

Sei nun zusätzlich vorausgesetzt, daß $\vec{f} \in C^\alpha(\Omega)^3$ ist, für ein $\alpha \in (0,1)$. Dann ergibt sich aus Satz 1.4, III): $\vec{u}(\vec{g})|\Omega \in C^2(\Omega)^3$, $\pi(\vec{g})|\Omega \in C^1(\Omega)$. Damit ist aber $\vec{u}_1|\Omega = \vec{u}(\vec{g})|\Omega$. Es wurde bereits erwähnt, daß $\vec{u}_2|\Omega \in C^2(\Omega)^3$, $\Pi(\cdot,\vec{\phi})|\Omega \in C^1(\Omega)$. Somit folgt: $\vec{u}|\Omega \in C^2(\Omega)^3$, $\pi \in C^1(\Omega)$.

Zu zeigen bleibt die Eindeutigkeitsaussage des Satzes. Seien also $(\vec{v}_1,\pi_1),(\vec{v}_2,\pi_2) \in L_{\Omega,in}(\vec{f},\vec{a})$. Dann ist $\vec{w} := \vec{v}_1-\vec{v}_2 \in C^0(\bar{\Omega})^3$ mit $\vec{w}|\Omega \in W^{2,r}(\Omega)^3$, $\vec{w}|\partial\Omega = 0$, $p := \pi_1-\pi_2 \in W^{1,r}(\Omega)$ und

(7.48) $-\nu\cdot\Delta(\vec{w}|\Omega)+\nabla p = 0$ f.ü., $\operatorname{div}(\vec{w}|\Omega) = 0$ f.ü.

Es folgt für $i \in \{1,2,3\}$, mit Lemma 7.13:

$$0 = \int_\Omega (-\nu\cdot\Delta(w_i|\Omega)+D_i p)\cdot w_i \, dx$$

$$= \int_\Omega \Big(\nu\cdot\sum_{j=1}^{3}(D_j(w_i|\Omega))^2 - p\cdot D_i(w_i|\Omega)\Big)\, dx.$$

Somit hat man wegen $\operatorname{div}(\vec{w}|\Omega) = 0$ f.ü.:

$$0 = \sum_{i,j=1}^{3}\int_\Omega (D_j(w_j|\Omega))^2 \, dx.$$

Das bedeutet: $D_j(w_i|\Omega) = 0$ f.ü., für $1 \le i,j \le 3$. Da Ω zusammenhängend, folgt jetzt aus [A], 3.27: w_i fast überall konstant $(1 \le i \le 3)$. Weil aber $w_i \in C^0(\bar{\Omega})$ und $w_i|\partial\Omega = 0$, heißt das: $w_i = 0$ $(1 \le i \le 3)$. Aus (7.48) ergibt sich nun: $\nabla p = 0$, also nach [A], 3.27: p fast überall konstant. Es gibt also $K \in \mathbb{R}$ mit $p = K$ f.ü. Jetzt folgt: $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$, $\pi_1+K = \pi_2$ f.ü. □

Bemerkung: Der Randwert $\vec{a}$ muß in Satz 7.4 die Bedingung

$$\int_{\partial\Omega} \langle \vec{a}, \vec{n} \rangle \, d\Omega = 0$$

erfüllen. Auf diese Bedingung kann nicht verzichtet werden. Denn sei $r \in (3/2,\infty)$, $\vec{f} \in L_r(\partial\Omega)^3$, $\vec{a} \in W^{2-1/r,r}(\partial\Omega)^3$, und es gebe ein Element $(\vec{u},\pi)$ aus $L_{\Omega,in}(\vec{f},\vec{a})$. Dann haben wir mit Lemma 2.4:

$$\int_{\partial\Omega} \langle \vec{a}, n \rangle \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{u}|\partial\Omega, \vec{n} \rangle \, d\Omega = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{u}|\Omega) \, dx = 0.$$

Literaturverzeichnis

[A] Adams, R. A.: Sobolev spaces. Academic Press, New York u.a. (1975).

[Alt] Alt, H. W.: Lineare Funktionalanalysis. Springer, Berlin u.a. (1985).

[BJS] Bers, L., John, F., Schechter, M.: Partial differential equations. Wiley, Providence R. I. (1979).

[DW] Deuring, P., Wahl, W. von: Das lineare Stokes-System in $\mathbb{R}^3$. II. Das Außenraumproblem. Erscheint in den Bayreuther Mathematischen Schriften.

[Fl] Flügge, S.: Lehrbuch der Theoretischen Physik. Band II. Springer, Berlin u.a. (1967).

[F3] Forster, O.: Analysis 3. Vieweg, Braunschweig u.a. (1984).

[F] Friedman, A.: Partial differential equations. Holt, Rinhart and Winston, New York u.a. (1969).

[FJK] Fučik, S., John, O., Kufner, A.: Function spaces. Noordhoff, Leyden (1977).

[Gr] Granger, R. A.: Fluid Mechanics. Holt, Rinehart and Winston, New York u.a. (1985).

[GT] Gilbarg, T., Trudinger, N. S.: Elliptic partial differential equations of second order. Springer, New York u.a. (1983).

[J] Jörgens, K.: Lineare Integraloperatoren. Teubner, Stuttgart (1970).

[L] Ladyzhenskaya, O. A.: The mathematical theory of viscous incompressible flow. Gordon and Breach, New York u.a. (1969).

[N] Neri, U.: Singular integrals. Lecture Notes in Mathematics. 200. Springer, Berlin u.a. (1971).

[RT2] Reiffen, H. J., Trapp, H. W.: Einführung in die Analysis II. Bibliographisches Institut, Mannheim u.a. (1971).

[RT3] Reiffen, H. J., Trapp, H. W.: Einführung in die Analysis III. Bibliographisches Institut, Mannheim u.a. (1973).

[Si] Simader, C. G.: On Dirichlet's boundary value problem. Lecture Notes in Mathematics. 268. Springer, Berlin u.a. (1972).

[SiSo] Simader, C. G., Sohr, H.: The weak Dirichlet and Neumann problem in L^q for the Laplacian in bounded and exterior domains. Erscheint in der Reihe "Lecture Notes in Mathematics", Springer.

[Wa] Wahl, W. von: The equations of Navier-Stokes and abstract parabolic equations. Vieweg, Braunschweig u.a. (1985).

[W] Weidmann, J.: Linear operators in Hilbert spaces. Springer, Berlin u.a. (1980).

[Y] Yoshida, K.: Functional analysis. Springer, Berlin u.a. (1978).

Herausgeber dieser Schriftenreihe sind die Dozenten des Mathematischen Instituts der Universität Bayreuth. Arbeiten, die in dieser Schriftenreihe erscheinen sollen, sind über einen der Dozenten einzureichen. In der Reihe erscheint etwa vierteljährlich ein Heft. Inhaltlich handelt es sich um Originalarbeiten, Dissertationen, Habilitationsschriften und Manuskripte zu Spezialvorlesungen. Die Arbeiten werden im Zentralblatt für Mathematik, den Mathematical Reviews und dem Referativnis Journal referiert.

Einzelhefte können zur Zeit zum Preis von DM 9,80 über folgende Adresse bezogen werden:

Universitätsbibliothek Bayreuth
Geschenk- und Tauschstelle
Postfach 101251
D-8580 Bayreuth
Bundesrepublik Deutschland

In dieser Schriftenreihe sind u.a. bisher erschienen:

Heft 20: **A.W.M. Dress/R. Franz:** Parametrizing the subgroups of finite index in a free group and related topics; 1-8
J. Grabmeier: Unzerlegbare Moduln mit trivialer Youngquelle und Darstellungstheorie der Schuralgebra; 9-152
H. Sohr/W. von Wahl: A New Proof of Leray's Structure Theorem and the Smoothness of Weak Solutions of Navier-Stokes Equations for Large $|x|$; 153-204
W. von Wahl: Corrections to my paper: "On Nonlinear Evolution Equations in a Banach Space and on Nonlinear Vibrations of the Clamped Plate"; 205-209

Heft 21: **A. Kerber (Ed.):** Diskrete Strukturen, algebraische Methoden und Anwendungen. Tagungsbericht 2. Sommerschule Diskrete Strukturen; 327 S.

Heft 22: **H. Milbrodt/U.G. Oppel:** Projektive systems and projective limits of vector measures; 1-86
U. Schoenwaelder: Von Normalteilern induzierte Moduln über endlichen Körpern: die unzerlegbaren F_2A_4-Matrixdarstellungen; 87-136

Heft 23: **A. Wiedemann:** Die Auslander-Reiten Köcher der gitterendlichen Gorensteinordnungen; 1-134
H. Pahlings: The subgroup structure of the Hall-Janko group J_2; 135-165