Bayreuther Math. Schr. 28 (1989), 1-109

Das lineare Stokes-System in $\mathbb{R}^3$

II. Das Außenraumproblem

Paul Deuring
Wolf von Wahl

Bayreuth 1988

Inhaltsverzeichnis

§ 8. L_p-Abschätzungen von Lösungen des linearen Stokes-Systems im Außenraum

§ 9. Der Stokes-Operator im Außenraum ist selbstadjungiert.

Einleitung

In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir das Stokes-System

(1) $-\nu\cdot\Delta\vec{u}(x) + \nabla\pi(x) = \vec{f}(x)$, $\qquad$ $\operatorname{div}\vec{u}(x) = 0$

im Außenraum, also für $x \in \mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}$, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit $C^{2,\gamma}$-Rand ist. Wir schreiben Dirichlet-Randbedingungen vor:

(2) $\vec{u}|\partial\Omega = \vec{a}$.

Hierbei ist $\vec{a}$ eine Funktion von $\partial\Omega$ in $\mathbb{C}^3$; insbesondere interessiert der Fall $\vec{a} = 0$.

Diese Problemstellung wurde in der Einleitung von [DvWW] näher erläutert. Wir erinnern, daß (1) auch für $x \in \Omega$, also für den Innenraumfall, betrachtet wurde, bei unveränderter Randbedingung (2). Dieser Fall wurde in [DvWW] abschließend behandelt. Der Außenraumfall wurde dagegen nur insoweit angesprochen, als er mehr oder weniger analog zum Innenraumfall bearbeitet werden konnte. Insbesondere konstruierten wir eine Lösung zum Außenraumfall für eine spezielle Funktion $\vec{f}$, nämlich für $\vec{f} = 0$ (Satz 6.4).

Die vorliegende Arbeit setzt [DvWW] unmittelbar fort: Wir verwenden dieselben Bezeichnungen, und schließen auch an die dortige Numerierung an. Auf Randnummern, Sätze und Lemmata aus [DvWW] verweisen wir ohne den Zusatz "[DvWW]".

Das Programm der vorliegenden Arbeit besteht darin, die Konstruktion einer Außenraumlösung von (1), (2) abzuschließen, und gleichzeitig diese Lösungen in L_p-Normen abzuschätzen. Einige hierbei auftretende Zwischenresultate nützen wir dann aus, um die Selbstadjungiertheit des Stokes-Operators im Außenraum zu zeigen, ein Ergebnis, das für die Behandlung des vollen Navier-Stokes-Systems im Außenraum nützlich ist.

An dieser Stelle wollen wir noch erläutern, wie sich die L_p-Abschätzungen im Innen- und Außenraumfall unterscheiden. Gemäß Satz 7.4 gibt es im Innenraumfall zu $p \in (3/2,\infty)$ eine Konstante $c(\Omega,p)$, so daß zu $\vec{f} \in L_p(\Omega)^3$, $\vec{a} \in W^{2-1/p,p}(\partial\Omega)^3$ eine Lösung $(\vec{u},\pi)$ zu (1), (2) existiert mit

$$(3)\quad \|\vec{u}|\Omega\|_{2,p} + \|\pi\|_{1,p} \le c(\Omega,p)\cdot(\|\vec{f}\|_p + \|\vec{a}\|_{2-1/p,p}).$$

(Wir bemerken, daß diese Lösung in einer geeigneten Funktionenklasse eindeutig bestimmt ist; siehe dazu Satz 7.4.)

Es wird sich als nützlich erweisen, eine äquivalente Formulierung von (3) zu betrachten. Dazu notieren wir zunächst folgende Ungleichung für $|u|_o$, die sich mit dem Sobolev-Lemma aus (3) ergibt:

$$|\vec{u}|_o \le c(\Omega,p)\cdot(\|\vec{f}\|_p + \|\vec{a}\|_{2-1/p,p}),$$

für $\vec{f},\vec{a},\vec{u}$ wie in (3).

(Die Konstante $c(\Omega,p)$ kann sich von Zeile zu Zeile ändern.)

Wegen der Beschränktheit von Ω erhalten wir somit diese beiden Ungleichungen, die zu (3) äquivalent sind.

$$(4)\quad \|\vec{u}\|_s \le c(\Omega,p)\cdot(\|\vec{f}\|_p + \|\vec{a}\|_{2-1/p,p}),$$

$$(5)\quad \|D_k(\vec{u}|\Omega)\|_p + \|D_l D_k(\vec{u}|\Omega)\|_p + \|\pi\|_{1,p} \le c(\Omega,p)\cdot(\|\vec{f}\|_p + \|\vec{a}\|_{2-1/p,p}),$$

für $\vec{f},\vec{a},\vec{u},\pi$ wie in (3), und für $s \in [1,\infty)$, $1 \le k,l \le 3$.

Im Außenraumfall werden wir bei vorgegebenem $p \in (3/2,\infty)$ folgendes Ergebnis erhalten (siehe Satz 8.1, sowie [GT], (7.10)):

Zu $s,t \in (3,\infty)$ mit $t \ge p$ gibt es eine Konstante $c(\Omega,p,s,t)$, so daß zu $\vec{f} \in L_1(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})^3 \cap L_p(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})^3$, $\vec{a} \in W^{2-1/p,p}(\partial\Omega)^3$, eine Lösung $(\vec{u},\pi)$ zu (1), (2) existiert mit

$$(6)\quad \|\vec{u}\|_s \le c(\Omega,p,s,t)\cdot\Big(\|\vec{f}\|_p + \|\vec{a}\|_{2-1/p,p} + \|\vec{f}\|_{(1/p+1/3)^{-1}\wedge(1/t+2/3)^{-1}\wedge(1/s+2/3)^{-1}}\Big)$$

Weiter gibt es zu $t \in (3,\infty)$ mit $t \ge p$ eine Konstante $c(\Omega,p,t)$, so daß für $\vec{f},\vec{a},\vec{u},\pi$ wie in (6), sowie für $1 \le k,l \le 3$ gilt:

$$(7)\quad \|D_k(\vec{u}|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})\|_p + \|D_l D_k(\vec{u}|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})\|_p + \|\pi\|_p \le c(\Omega,p,t)\cdot\Big(\|\vec{f}\|_p + \|a\|_{2-1/p,p} + \|\vec{f}\|_{(1/p+1/3)^{-1}\wedge(1/t+2/3)^{-1}}\Big).$$

Auch für die in (6), (7) abgeschätzte Lösung gilt eine Eindeutigkeitsaussage, die in Satz 8.1 präzisiert wird.

Ein Vergleich mit (4), (5) zeigt zwei wesentliche Unterschiede: In der Situation von (6) (Außenraumfall) läßt sich $\|\vec{u}\|_s$ nur für $s > 3$ abschätzen, während in (4) - also im Innenraumfall - diese Abschätzung für alle $s \in [1,\infty)$ möglich ist. Ferner taucht auf der rechten Seite von (6), (7) ein Term $\|\vec{f}\|_r$ auf, mit einer Zahl r, die kleiner ist als p. Anhand zweier Gegenbeispiele (siehe Ende von § 8) belegen wir, daß diese Unterschiede unvermeidbar sind. Das eine Gegenbeispiel zeigt, daß $\vec{u}$ im Außenraumfall nicht zu $\cup\{L_s(\mathbb{R}^3\setminus\Omega)^3 : s \in [1,3]\}$ gehören muß. Das zweite Beispiel bestätigt, daß sich die linke Seite in (7) nicht gegen einen Ausdruck der Form

$$c(\Omega,p)\cdot(\|\vec{f}\|_p + \|\vec{a}\|_{2-1/p,p})$$

abschätzen läßt. Auch für die linke Seite in (6) ist dies nicht möglich. Ein diesbezügliches Gegenbeispiel kann man sich leicht zurechtlegen, indem man das eben erwähnte zweite Beispiel etwas abwandelt.

Die Schwierigkeit beim Beweis von (6), (7) besteht darin, das Einfachschichtpotential, das bei der Konstruktion unserer Lösungen auftritt, geeignet abzuschätzen. Wir erinnern, daß wir Lösungen zu (1), (2) mittels der Integralgleichungsmethode konstruieren, und daß hierbei die Außenraumlösung als Summe eines Volumen-, eines Doppelschicht- und eines Einfachschichtpotentials dargestellt wird, wie in der Einleitung zu [DvWW] erläutert. Die ersten beiden dieser Potentiale treten auch bei der Innenraumlösung auf und werden im Außenraumfall analog zum Innenraumfall behandelt.

Verallgemeinerungen zu den Resultaten in (6), (7) findet man in [So]. Dort wird (1), (2) in $\mathbb{R}^n$ statt $\mathbb{R}^3$ gelöst, und statt div $\vec{u}=0$ wird die Gleichung div $\vec{u}=\vec{g}$, mit vorgegebenem $\vec{g}$, betrachtet. Ferner wird ein Resultat gezeigt, welches der Abschätzung in (7) entspricht, aber mit den Termen $\|D_kD_l(\vec{u}|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})\|_{m,p}, \|\pi\|_{m+1,p}$ $(m\in\mathbb{N}_0)$ anstelle von $\|D_kD_l(u|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})\|_p, \|\pi\|_{1,p}$. Auf der rechten Seite der entsprechenden Ungleichung tritt dann $\|\vec{f}\|_{m,p}$ anstelle von $\|\vec{f}\|_p$ auf. Der Autor untersucht also höhere Regularitätseigenschaften von Lösungen zu (1), (2). Dafür werden in [So] stärkere Hilfsmittel benötigt. In der vorliegenden Arbeit soll dagegen ein elementarer Zugang zur L_p-Theorie von (1), (2) gegeben werden, auch wenn dabei nicht die vollste Allgemeinheit erreicht wird. Einen solchen Zugang bietet die Integralgleichungsmethode. Außerdem liefert sie beim Beweis der L_p-Abschätzungen einige Ergebnisse, die wiederum zur Selbstadjungiertheit des Stokes-Operators im Außenraum führen. Zwar benötigen wir dazu auch noch andere Resultate, so etwa die Helmholtz-Zerlegung von $L_2(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})^3$; trotzdem bleibt der

Aufwand unerwartet gering. Denn man würde erwarten, beim Beweis der Selbstadjungiertheit des Stokes-Operators im Außenraum mehr Mühe zu haben: Geht man nämlich von den gängigen Kriterien für Selbstadjungiertheit aus, so kommt man rasch zu der Frage, ob (1), (2), mit $\vec{a}=0$, in $L_2(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})^3$ surjektiv lösbar ist; d.h.: ob zu jedem $\vec{f}\in L_2(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})^3$, und zu $\vec{a}=0$, eine Lösung $(\vec{u},\pi)$ von (1), (2) existiert mit $\vec{u}\in L_2(\mathbb{R}^3\setminus\Omega)^3$. Aufgrund des ersten Gegenbeispiels in § 8 kann man dies aber nicht erwarten. (Im Innenraumfall dagegen läßt sich (1), (2) surjektiv lösen.) Aufgrund von anderen Standardresultaten über selbstadjungierte Operatoren wird man dann überprüfen, ob für ein geeignetes $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ das folgende Problem in $L_2(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})^3$ surjektiv lösbar ist:

(8) $-\nu\cdot\Delta\vec{u}+\lambda\cdot\vec{u}+\nabla\pi=\vec{f}$, div $\vec{u}=0$ auf $\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}$;

$\vec{u}|\partial\Omega=0.$

Tatsächlich läßt sich dieses Randwertproblem in der gewünschten Weise lösen. Dies zeigen wir, indem wir unsere Ergebnisse über (1), (2) anwenden, die wir bereits zur Verfügung haben. So vermeiden wir, die langwierige Theorie von (8) aufzurollen.

Weitere Arbeiten, die sich mit dem Stokes-System im Außenraum beschäftigen, behandeln gewichtete Normen (siehe [Spec]), sowie den Spezialfall $\vec{f}\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})^3$ (siehe [Sol], Theorem 2.3).

§ 8. L_p-Abschätzungen von Lösungen des linearen Stokes-Systems im Außenraum

Im Folgenden setzen wir voraus, daß Ω eine $C^{2,\tilde{\gamma}}$-Berandung hat, mit einer festen Zahl $\tilde{\gamma} \in (0,1)$. Das bedeutet, daß zu jedem Element $x \in \partial\Omega$ eine offene Menge U_x in $\mathbb{R}^3$ sowie eine Zahl $j_x \in \{1,2,3\}$ und eine Funktion $\varphi_x \in C^{2,\gamma}(pr_{j_x}(U_x))$ existiert mit

$$\Omega \cap U_x = \{y \in U_x : y_{j_x} < \varphi_x(pr_{j_x}(y))\}$$

(Vergleiche mit dem Beginn von § 2.). Für die in § 3 fixierte Beschreibung

$$\mathcal{B} = (k_\Omega, (A_i)_{1 \le i \le k_\Omega}, (C_i)_{1 \le i \le k_\Omega}, \alpha_\Omega, (a_i)_{1 \le i \le k_\Omega}, (\overset{i}{\omega})_{1 \le i \le k_\Omega})$$

von $\partial\Omega$ können wir nun voraussetzen, daß $a_t \in C^{2,\gamma}(\bar{\Delta})$ ist für $1 \le t \le k_\Omega$. Aus (2.15) folgt dann, daß

$$H_j(D_i(n_l \circ \overset{t}{u})) < \infty \quad \text{für } 1 \le i \le 2,\ 1 \le t \le k_\Omega,\ 1 \le l \le 3.$$

Lemma 8.1: Sei $\vec{\phi} \in C^0(\partial\Omega)^3$ und $\vec{\phi} + \vec{T}^*(\vec{\phi}) = 0$. Dann ist $\vec{\phi}$ Lipschitz-stetig.

Beweis: Die Voraussetzung an $\vec{\phi}$ bedeutet (siehe Definition 4.2):

$$(8.1) \quad \phi_j(y) = 2 \cdot \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^{3} K_{ji}(x,y) \cdot \phi_i(x)\, d\Omega(x) \quad (y \in \partial\Omega,\ 1 \le j \le 3).$$

Aus Lemma 5.4 folgt, daß $\vec{\phi} \in C^{1/2}(\partial\Omega)^3$ ist.

Wir setzen nun für $i,j,k \in \{1,2,3\}$

$$P_{ijk} : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \ni z \to z_i \cdot z_j \cdot z_k \cdot |z|^{-5} \in \mathbb{R}.$$

Dann ist

$$(8.2) \quad |P_{ijk}(z)| \le |z|^{-2},$$

$$(8.3) \quad |D_m P_{ijk}(z)| \le 8 \cdot |z|^{-3} \quad (1 \le i,j,k,m \le 3,\ z \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}).$$

Weiter ist für $c \in \mathbb{R}^3$, $d \in \partial\Omega$ mit $c \neq d$, $1 \le i,j \le 3$:

$$(8.4) \quad K_{ij}(c,d) = 3/(4 \cdot \pi) \cdot \sum_{k=1}^{3} P_{ijk}(d-c) \cdot n_k(d).$$

Ferner gilt für $1 \le j \le 3$, $1 \le l \le 2$, $\zeta, \eta \in \Delta$, $t \in \{1,\dots,k_\Omega\}$:

$$(8.5) \quad \partial/\partial\zeta_l \Big(\sum_{k=1}^{3} P_{ijk}(\overset{t}{u}(\eta) - \overset{t}{u}(\zeta)) \Big) \cdot n_k \circ \overset{t}{u}(\zeta)$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \sum_{m=1}^{3} (D_m P_{ijk})(\overset{t}{u}(\eta) - \overset{t}{u}(\zeta)) \cdot (-D_l \overset{t}{u}_m(\zeta)) \cdot n_k \circ \overset{t}{u}(\zeta)$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \sum_{m=1}^{3} (D_m P_{ijk})(\overset{t}{u}(\eta) - \overset{t}{u}(\zeta)) \cdot (-D_l \overset{t}{u}_m(\zeta) + D_l \overset{t}{u}_m(\eta)) \cdot n_k \circ \overset{t}{u}(\zeta)$$

$$- \sum_{k=1}^{3} \sum_{m=1}^{3} (D_m P_{ijk})(\overset{t}{u}(\eta) - \overset{t}{u}(\zeta)) \cdot D_l \overset{t}{u}_m(\eta) \cdot n_k \circ \overset{t}{u}(\zeta),$$

wobei der zweite Summand auf der rechten Seite von (8.5) gleich

$$(8.6) \quad -\partial/\partial\eta_l \Big(\sum_{k=1}^{3} P_{ijk}(\overset{t}{u}(\eta) - \overset{t}{u}(\zeta)) \cdot n_k \circ \overset{t}{u}(\zeta) \Big)$$

$$= (4 \cdot \pi/3) \cdot \partial/\partial\eta_l \Big(K_{ij}(\overset{t}{u}(\eta), \overset{t}{u}(\zeta)) \Big)$$

ist. Wegen

$$|D_l \overset{t}{u}_m|_1 \leq K_B \quad (1 \leq m \leq 3,\ 1 \leq l \leq 2) \qquad \text{(siehe (2.20))},$$

und wegen (8.3), (4.4) erhält man aus (8.5), (8.6), für $i,j \in \{1,2,3\}$, $\zeta,\eta \in \Delta$, $t \in \{1,\ldots,k_\Omega\}$, $l \in \{1,2\}$:

$$(8.7)\quad \left|\partial/\partial\zeta_l\left(\sum_{k=1}^{3} P_{ijk}(\overset{t}{u}(\eta)-\overset{t}{u}(\zeta))\right)\cdot n_k \circ \overset{t}{u}(\zeta)\right| \leq K_1\cdot|\overset{t}{u}(\zeta)-\overset{t}{u}(\eta)|^{-2}$$

(mit $K_1 := 72\cdot K_B + Q_2\cdot 4\cdot\pi/3$).

Sei $j \in \{1,2,3\}$, $y,y' \in \partial\Omega$.

Im Fall $|y-y'| \geq \varepsilon_B/2$ ist

$$(8.8)\quad |\phi_j(y)-\phi_j(y')| \leq \varepsilon_B^{-1}\cdot 4\cdot|\phi_j|_o\cdot|y-y'|.$$

Im Folgenden setzen wir voraus: $|y-y'| < \varepsilon_B/2$. Dann stellen wir zunächst fest:

$$(8.9)\quad |\phi_j(y)-\phi_j(y')|$$

$$= \left|3/(2\cdot\pi)\cdot\int_{\partial\Omega} \sum_{i,k=1}^{3} (P_{jik}(y-x)\cdot n_k(y)-P_{jik}(y'-x)\cdot n_k(y'))\cdot\phi_i(x)\, d\Omega(x)\right|$$

(wegen (8.1), (8.4))

$$\leq 3/(2\cdot\pi)\cdot\left|\int_{\partial\Omega} \sum_{i,k=1}^{3} (P_{jik}(y-x)\cdot n_k(y)-P_{jik}(y'-x)\cdot n_k(y'))\cdot(\phi_i(x)-\phi_i(y))\, d\Omega(x)\right| +$$

$$+ 3/(2\cdot\pi)\cdot\left|\sum_{i,k=1}^{3} \phi_i(y)\cdot\int_{\partial\Omega} (P_{jik}(y-x)\cdot n_k(y)- P_{jik}(y'-x)\cdot n_k(y'))\, d\Omega(x)\right|.$$

Wir wollen den ersten Summanden auf der rechten Seite von (8.9) abschätzen. Sei dazu $t \in \{1,\ldots,k_\Omega\}$. Wegen der Voraussetzung $|y-y'| < \varepsilon_B/2$ trifft nach (2.27) einer der beiden folgenden Fälle zu:

<u>1. Fall:</u> Es gibt $\xi,\xi' \in \Delta$ mit $y = \overset{t}{u}(\xi)$, $y' = \overset{t}{u}(\xi')$. Damit findet man:

$$\left|\int_{\Delta} \sum_{i,k=1}^{3} (P_{jik}(y-\overset{t}{u}(\eta))\cdot n_k(y)-P_{jik}(y'-\overset{t}{u}(\eta))\cdot n_k(y'))\cdot(\phi_i\circ\overset{t}{u}(\eta)-\phi_i(y))\cdot B_t(\eta)\, d\eta\right|$$

$$\leq \sum_{z\in\{y,y'\}} \int_{\substack{\Delta\\ |\xi-\eta|\leq 2\cdot|y-y'|}} \left|\sum_{i,k=1}^{3} P_{jik}(z-\overset{t}{u}(\eta))\cdot n_k(z)\cdot(\phi_i\circ\overset{t}{u}(\eta)-\phi_i(y))\cdot B_t(\eta)\, d\eta\right|$$

$$+ \int_{\substack{\Delta\\ |\xi-\eta|\geq 2\cdot|y-y'|}} \sum_{i,k=1}^{3} \left|\sum_{l=1}^{2} (\xi_l-\xi'_l)\cdot\int_0^1 \partial/\partial\zeta_l\left(P_{jik}(\overset{t}{u}(\zeta)-\overset{t}{u}(\eta))\cdot n_k\circ\overset{t}{u}(\zeta)\right)_{\zeta=\xi'+\theta\cdot(\xi-\xi')}\, d\theta\right|$$

$$\cdot|\phi_i\circ\overset{t}{u}(\eta)-\phi_i\circ\overset{t}{u}(\xi)|\cdot B_t(\eta)\, d\eta$$

$$\leq K_2 \cdot \sum_{\rho \in \{\xi,\xi'\}} \int_{\substack{\Delta \\ |\rho-\eta| \leq 3\cdot|y-y'|}} |\overset{t}{u}(\rho)-\overset{t}{u}(\eta)|^{-1}\, d\eta$$

$$+ K_3 \cdot |\xi-\xi'|$$

$$\cdot \sum_{i=1}^{3} \sum_{l=1}^{2} \int_{0}^{1} \int_{\substack{\Delta \\ |\xi-\eta| \geq 2\cdot|y-y'|}} \Big\{ \partial/\partial\zeta_l \Big(\sum_{k=1}^{3} P_{jik}(\overset{t}{u}(\zeta)-\overset{t}{u}(\eta)) \Big) \cdot n_k \circ \overset{t}{u}(\zeta)$$

$$+ P_{jik}(\overset{t}{u}(\zeta)-\overset{t}{u}(\eta)) \cdot D_l(n_k \circ \overset{t}{u}(\zeta)) \Big\}_{\zeta=\xi'+\theta\cdot(\xi-\xi')}$$

$$\cdot |\overset{t}{u}(\eta)-\overset{t}{u}(\xi)|^{1/2}\, d\eta\, d\theta$$

(mit $K_2 := 8\cdot|\vec{\phi}|_0 \cdot (\pi/3)\cdot Q_2 \cdot K_{\mathcal{B}}$; $K_3 := |\vec{\phi}|_{1/2}\cdot K_{\mathcal{B}}$.

Beim ersten Summanden wurde (8.4), (4.2) angewandt; beim zweiten die Eigenschaft $\vec{\phi} \in C^{1/2}(\partial\Omega)^3$.)

$$\leq K_2 \cdot \sum_{\rho \in \{\xi,\xi'\}} \int_{|\rho-\eta| \leq 3\cdot|y-y'|} |\rho-\eta|^{-1}\, d\eta$$

$$+ K_4 \cdot |\xi-\xi'|$$

$$\cdot \int_0^1 \int_{\substack{\Delta \\ |\xi-\eta| \geq 2\cdot|y-y'|}} |\overset{t}{u}(\eta)-\overset{t}{u}(\zeta)|^{-2}_{\zeta=\xi'+\theta\cdot(\xi-\xi')}$$

$$\cdot |\overset{t}{u}(\eta)-\overset{t}{u}(\xi)|^{1/2}\, d\eta\, d\theta$$

(mit $K_4 := K_3 \cdot 6 \cdot \{K_1 + K_{\mathcal{B}}\}$.

Der zweite Summand wurde mit (8.2), (8.7) abgeschätzt. Ferner wurde ausgenutzt, daß $|D_l(n_k \circ \overset{t}{u})|_0 \leq K_{\mathcal{B}}$ für $1 \leq k \leq 3$, $1 \leq l \leq 2$; siehe (2.20).).

$$\leq K_2 \cdot 4 \cdot \pi \int_0^{3\cdot|y-y'|} dr$$

$$+ K_4 \cdot |\xi-\xi'| \cdot K_{\mathcal{B}}^{1/2} \cdot 4 \cdot \int_{\substack{\Delta \\ |\xi-\eta| \geq 2\cdot|y-y'|}} |\eta-\xi|^{-3/2}\, d\eta$$

(Beachte: Für $\eta \in \Delta$ ist $|\overset{t}{u}(\eta)-\overset{t}{u}(\xi)|^{1/2} \leq K_{\mathcal{B}}^{1/2}\cdot|\eta-\xi|^{1/2}$; ferner gilt für $\theta \in [0,1]$, $\eta \in \Delta$ mit $|\xi-\eta| \geq 2\cdot|y-y'|$:

$$|\overset{t}{u}(\eta)-\overset{t}{u}(\xi'+\theta\cdot(\xi-\xi'))| \geq |\eta-(\xi'+\theta\cdot(\xi-\xi'))|$$

$$\geq |\eta-\xi| - |\xi-\xi'|$$

$$= (1/2)\cdot|\eta-\xi| + (1/2)\cdot|\eta-\xi| - |\xi-\xi'|$$

$$\geq (1/2)\cdot|\eta-\xi|;$$

siehe (2.21), (2.16).)

$$\leq K_5 \cdot |y-y'| + K_6 \cdot |\xi-\xi'| \int_0^{\mathrm{diam}\,\Delta} r^{-1/2}\, dr$$

(mit $K_5 := K_2 \cdot 12 \cdot \pi$; $K_6 := K_4 \cdot K_{\mathcal{B}}^{1/2} \cdot 8 \cdot \pi$)

$$\leq K_7 \cdot |y-y'| \quad (\text{mit } K_7 := K_5 + K_6 \cdot 2 \cdot (\mathrm{diam}\,\Delta)^{1/2}).$$

<u>2. Fall:</u> Für alle $\eta \in \mathrm{Tr}\, B_t$, $\theta \in [0,1]$ ist $|y'+\theta\cdot(y-y')-\overset{t}{u}(\eta)| \geq \varepsilon_{\mathcal{B}}/2$. In diesem Fall ist

$$\Big| \int_\Delta \sum_{i,k=1}^{3} (P_{jik}(y-\overset{t}{u}(\eta))\cdot n_k(y) - P_{jik}(y'-\overset{t}{u}(\eta))\cdot n_k(y'))$$

$$\cdot (\phi_i \circ \overset{t}{u}(\eta) - \phi_i(y)) \cdot B_t(\eta)\, d\eta \Big|$$

$$\le \int_{\mathrm{Tr}\,B_t} \sum_{i,k=1}^{3} \Big\{ |P_{jik}(y-\overset{t}{u}(\eta))|\cdot|n_k(y)-n_k(y')| +$$

$$+ \Big| \int_0^1 \sum_{m=1}^{3} D_m P_{jki}(y'+\theta\cdot(y-y')-\overset{t}{u}(\eta))\cdot(y_m-y'_m)\,d\theta\cdot n_k(y')\Big|\Big\}$$

$$\cdot B_t(\eta)\,d\eta$$

$$\le K_8\cdot\int_{\mathrm{Tr}\,B_t}\Big\{|\overset{t}{u}(\eta)-y|^{-2}\cdot|y-y'|$$

$$+ \int_0^1 |\overset{t}{u}(\eta)-y'-\theta\cdot(y-y')|^{-3}\,d\theta\cdot|y-y'|\Big\}\cdot B_t(\eta)\,d\eta$$

(mit $K_8 := K_\beta+8$; wegen (8.2), (8.3), (2.23))

$$\le K_8\cdot(4\cdot\varepsilon_\beta^{-2}+8\cdot\varepsilon_\beta^{-3})\cdot\int_{\mathrm{Tr}\,B_t} B_t(\eta)\,d\eta\cdot|y-y'|$$

$$\le K_9\cdot|y-y'| \quad (\text{mit } K_9 := K_8\cdot(4\cdot\varepsilon_\beta^{-2}+8\cdot\varepsilon_\beta^{-3})\cdot K_\beta\cdot\int_\Delta d\eta).$$

Die vorangehende Fallunterscheidung gilt für jedes Element $t\in\{1,\dots,k_\Omega\}$. Damit folgt aus (2.19), mit $K_{10}:=k_\Omega\cdot\max\{K_7,K_9\}$:

(8.10) $$\Big|\int_{\partial\Omega}\sum_{i,k=1}^{3} (P_{jik}(y-x)\cdot n_k(y)-P_{jik}(y'-x)\cdot n_k(y'))$$

$$\cdot(\phi_i(x)-\phi_i(y))\,d\Omega(x)\Big|$$

$$\le K_{10}\cdot|y-y'|.$$

Als nächstes wollen wir den zweiten Summanden auf der rechten Seite von (8.9) abschätzen. Dazu stellen wir zunächst fest:

$$\Big|\sum_{i,k=1}^{3} \phi_i(y)\cdot\int_{\partial\Omega} (P_{jik}(y-x)\cdot n_k(y)-P_{jik}(y'-x)\cdot n_k(y'))\,d\Omega(x)\Big|$$

$$= \Big|\sum_{i=1}^{3} \phi_i(y)\cdot 4\cdot\pi/3\cdot\int_{\partial\Omega} (K_{ji}(x,y)-K_{ji}(x,y'))\,d\Omega(x)\Big| \quad \text{(siehe (8.4))}$$

$$= |2\cdot\pi/3\cdot(T^*(\vec{\phi}(y))_j(y)-T^*(\vec{\phi}(y))_j(y'))|$$

(nach Definition 4.2, mit der konstanten Funktion $\vec{\phi}(y)$ anstelle von $\vec{\psi}$)

$$= 4\cdot\pi/3\cdot\lim_{\kappa\downarrow 0}\Big|\sum_{i=1}^{3}\Big\{T_{ji}\Big(\vec{V}(\cdot,\vec{\phi}(y))\,|\,\mathbb{R}^3\setminus\partial\Omega, Q(\cdot,\vec{\phi}(y))\Big)$$

$$\cdot(y+\kappa\cdot n(y))\cdot n_i(y)$$

$$- T_{ji}\Big(\vec{V}(\cdot,\vec{\phi}(y))\,|\,\mathbb{R}^3\setminus\partial\Omega, Q(\cdot,\vec{\phi}(y))\Big)(y'+\kappa\cdot n(y'))\cdot n_i(y')\Big\}\Big|$$

(nach Lemma 4.8)

$$= 4\cdot\pi/3\cdot\lim_{\kappa\downarrow 0}\Big|\sum_{i=1}^{3}\int_{\partial\Omega}(-K_{ji}(x-\kappa\cdot n(y),y)+K_{ji}(x-\kappa\cdot n(y'),y'))$$

$$\cdot\phi_i(y)\,d\Omega(x)\Big|$$

(siehe Lemma 4.2, III.))

$$= \lim_{\kappa\downarrow 0}\Big|\sum_{i,k=1}^{3}\phi_i(y)\cdot\int_{\partial\Omega}(P_{jik}(y+\kappa\cdot n(y)-x)\cdot n_k(y)$$

$$-P_{jik}(y'+\kappa\cdot n(y')-x)\cdot n_k(y'))\,d\Omega(x)\Big|$$

(siehe (8.4)).

Beachtet man noch Lemma 4.4, so ergibt sich:

$$(8.11)\quad \Big| \sum_{i,k=1}^{3} \phi_i(y)\cdot \int_{\partial\Omega} (P_{jik}(y-x)\cdot n_k(y)-P_{jik}(y'-x)\cdot n_k(y'))\, d\Omega(x)\Big|$$

$$= \lim_{\kappa\downarrow 0} \Big| \sum_{i,k=1}^{3} \phi_i(y)\cdot \int_{\partial\Omega} \Big\{P_{jik}(y+\kappa\cdot n(y)-x)\cdot n_k(y)$$

$$- P_{jik}(y'+\kappa\cdot n(y')-x)\cdot n_k(y') - P_{jik}(y+\kappa\cdot n(y)-x)\cdot n_k(x)$$

$$+ P_{jik}(y'+\kappa\cdot n(y')-x)\cdot n_k(x)\Big\}\, d\Omega(x)\Big| .$$

Seien nun $i,k \in \{1,2,3\}$, $\kappa \in (0,\varepsilon_{\mathfrak{B}}/4]$, $t \in \{1,\dots,k_\Omega\}$ festgehalten. Wie oben unterscheiden wir zwei Fälle:

<u>1. Fall:</u> Es gibt $\xi,\xi' \in \Delta$ mit $y=\overset{t}{u}(\xi)$, $y'=\overset{t}{u}(\xi')$. Dann ist

$$(8.12)\quad \Big| \int_{\Delta} \Big\{P_{jik}(y+\kappa\cdot n(y)-\overset{t}{u}(\eta))\cdot n_k(y) - P_{jik}(y'+\kappa\cdot n(y')-\overset{t}{u}(\eta))\cdot n_k(y')$$

$$-P_{jik}(y+\kappa\cdot n(y)-\overset{t}{u}(\eta))\cdot n_k\circ\overset{t}{u}(\eta) + P_{jik}(y'+\kappa\cdot n(y')-\overset{t}{u}(\eta))\cdot n_k\circ\overset{t}{u}(\eta)\Big\}$$

$$\cdot B_t(\eta)\, d\eta\Big|$$

$$= \Big| \int_{\Delta}\int_{0}^{1} \sum_{l=1}^{2} \Big\{\partial/\partial\zeta_l\Big(P_{jik}(\overset{t}{u}(\zeta)+\kappa\cdot n\circ\overset{t}{u}(\zeta)-\overset{t}{u}(\eta))\cdot n_k\circ\overset{t}{u}(\zeta)\Big)$$

$$- \partial/\partial\zeta_l\Big(P_{jik}(\overset{t}{u}(\zeta)+\kappa\cdot n\ \overset{t}{u}(\zeta)-\overset{t}{u}(\eta))\Big)\cdot n_k\circ\overset{t}{u}(\eta)\Big\}_{\zeta=\xi'+\theta\cdot(\xi-\xi')}\, d\theta$$

$$\cdot(\xi_l-\xi_l')\cdot B_t(\eta)\, d\eta\Big|$$

(Beachte: Für $\eta\in\Delta$, $\theta\in[0,1]$ ist nach (2.25)

$$|\overset{t}{u}(\xi'+\theta\cdot(\xi-\xi'))+\kappa\cdot n\circ\overset{t}{u}(\xi'+\theta\cdot(\xi-\xi'))-\overset{t}{u}(\eta)| \geq \kappa,$$

so daß die Abbildung

$$[0,1]\ni\theta \to P_{jik}\Big(\overset{t}{u}(\xi'+\theta\cdot(\xi-\xi'))$$
$$+\kappa\cdot n\circ\overset{t}{u}(\xi'+\theta\cdot(\xi-\xi'))-\overset{t}{u}(\eta)\Big) \in \mathbb{R}$$

stetig differenzierbar ist.).

$$\leq |\xi-\xi'|\cdot \sum_{l=1}^{2} \Big|\int_0^1\int_\Delta \Big\{\sum_{m=1}^{3} D_m P_{jik}(\overset{t}{u}(\zeta)+\kappa\cdot n\circ\overset{t}{u}(\zeta)-\overset{t}{u}(\eta))$$

$$\cdot(D_l\overset{t}{u}_m(\zeta)+\kappa\cdot D_l(n_m\circ\overset{t}{u})(\zeta))\cdot n_k\circ\overset{t}{u}(\zeta)$$

$$+ P_{jik}(\overset{t}{u}(\zeta)+\kappa\cdot n\circ\overset{t}{u}(\zeta)-\overset{t}{u}(\eta))\cdot D_l(n_k\circ\overset{t}{u})(\zeta)$$

$$- \sum_{m=1}^{3} D_m P_{jik}(\overset{t}{u}(\zeta)+\kappa\cdot n\circ\overset{t}{u}(\zeta)-\overset{t}{u}(\eta))$$

$$\cdot(D_l\overset{t}{u}_m(\zeta)+\kappa\cdot D_l(n_m\circ\overset{t}{u})(\zeta))\cdot n_k\circ\overset{t}{u}(\eta)\Big\}_{\zeta=\xi'+\theta\cdot(\xi-\xi')}$$

$$\cdot B_t(\eta)\, d\eta\, d\theta\Big|$$

$$= |\xi-\xi'|\cdot \sum_{l=1}^{2} \Big|\int_0^1\int_\Delta \Big\{\sum_{m=1}^{3} D_m P_{jik}(\overset{t}{u}(\zeta)+\kappa\cdot n\circ\overset{t}{u}(\zeta)-\overset{t}{u}(\eta))$$

$$\cdot(D_l\overset{t}{u}_m(\zeta)+\kappa\cdot D_l(n_m\circ\overset{t}{u})(\zeta)-D_l\overset{t}{u}_m(\eta))\cdot(n_k\circ\overset{t}{u}(\zeta)-n_k\circ\overset{t}{u}(\eta))$$

$$+ P_{jik}(\overset{t}{u}(\zeta)+\kappa\cdot n\circ\overset{t}{u}(\zeta)-\overset{t}{u}(\eta))\cdot D_l(n_k\circ\overset{t}{u})(\zeta)\ +$$

$$+\sum_{m=1}^{3} D_m P_{jik}(\overset{t}{u}(\zeta)+\kappa\cdot n\circ\overset{t}{u}(\zeta)-\overset{t}{u}(\eta))$$

$$\cdot D_l\overset{t}{u}_m(\eta)\cdot(n_k\circ\overset{t}{u}(\zeta)-n_k\circ\overset{t}{u}(\eta))\Big\}_{\zeta=\xi'+\theta\cdot(\xi-\xi')}\cdot B_t(\eta)\;d\eta\;d\theta\Big|$$

$$\le|\xi-\xi'|\cdot\sum_{l=1}^{2}\Big[\int_0^1\int_\Delta\Big\{24\cdot|\overset{t}{u}(\zeta)+\kappa\cdot n\circ\overset{t}{u}(\zeta)-\overset{t}{u}(\eta)|^{-3}\cdot K_{\mathcal{B}}\cdot(|\zeta-\eta|+\kappa)$$

$$\cdot K_{\mathcal{B}}\cdot|\overset{t}{u}(\zeta)-\overset{t}{u}(\eta)|\Big\}_{\zeta=\xi'+\theta\cdot(\xi-\xi')}\cdot K_{\mathcal{B}}\;d\eta\;d\theta$$

$$+|\xi-\xi'|\cdot\sum_{l=1}^{2}\Big|\int_0^1\int_\Delta\Big\{P_{jik}(\overset{t}{u}(\zeta)+\kappa\cdot n\circ\overset{t}{u}(\zeta)-\overset{t}{u}(\eta))\cdot D_l(n_k\circ\overset{t}{u})(\zeta)$$

$$-\partial/\partial\eta_l\Big(P_{jik}(\overset{t}{u}(\zeta)+\kappa\cdot n\circ\overset{t}{u}(\zeta)-\overset{t}{u}(\eta))\Big)$$

$$\cdot(n_k\circ\overset{t}{u}(\zeta)-n_k\circ\overset{t}{u}(\eta))\Big\}_{\zeta=\xi'+\theta\cdot(\xi-\xi')}\cdot B_t(\eta)\;d\eta\;d\theta\Big|\Big]$$

(Hier wurde (8.3) sowie (2.20), (2.23) angewandt.).

$$\le K_{11}\cdot|\xi-\xi'|\cdot\int_0^1\int_\Delta|\overset{t}{u}(\xi'+\theta\cdot(\xi-\xi'))-\overset{t}{u}(\eta)|^{-1}\;d\eta\;d\theta$$

$$+|\xi-\xi'|\cdot\sum_{l=1}^{2}\Big|\int_0^1\int_\Delta\Big\{P_{jik}(\overset{t}{u}(\zeta)+\kappa\cdot n\circ\overset{t}{u}(\zeta)-\overset{t}{u}(\eta))$$

$$\cdot D_l(n_k\circ\overset{t}{u})(\zeta)\cdot B_t(\eta)$$

$$+P_{jik}(\overset{t}{u}(\zeta)+\kappa\cdot n\circ\overset{t}{u}(\zeta)-\overset{t}{u}(\eta))\cdot\Big(-D_l(n_k\circ\overset{t}{u})(\eta)\cdot B_t(\eta)+$$

$$+(n_k\circ\overset{t}{u}(\zeta)-n_k\circ\overset{t}{u}(\eta))\cdot D_l B_t(\eta)\Big)\Big\}_{\zeta=\xi'+\theta\cdot(\xi-\xi')}\;d\eta d\theta\Big|$$

(Es wurde $K_{11}:=48\cdot K_{\mathcal{B}}^3\cdot(\varepsilon_{\mathcal{B}}^{-3}+\varepsilon_{\mathcal{B}}^{-2})$ gesetzt. Beachte dazu, daß

$$|\overset{t}{u}(\zeta)+\kappa\cdot n\;\overset{t}{u}(\zeta)-\overset{t}{u}(\eta)|\ge\varepsilon_{\mathcal{B}}\cdot|\overset{t}{u}(\zeta)-\overset{t}{u}(\eta)|\ge\varepsilon_{\mathcal{B}}\cdot|\zeta-\eta|;$$

$$|\overset{t}{u}(\zeta)+\kappa\cdot n\circ\overset{t}{u}(\zeta)-\overset{t}{u}(\eta)|\ge\kappa,\quad\text{für }\eta,\zeta\in\Delta;$$

siehe (2.25), (2.16). Beim zweiten Summanden wurde ausgenutzt, daß $(n_k\circ\overset{t}{u})\cdot B_t\in C^1(\Delta)$, Tr $B_t\subset\Delta$.).

$$\le K_{12}\cdot|\xi-\xi'|$$

$$+|\xi-\xi'|\cdot\sum_{l=1}^{2}\Big|\int_0^1\int_\Delta\Big\{P_{jik}(\overset{t}{u}(\zeta)+\kappa\cdot n\circ\overset{t}{u}(\zeta)-\overset{t}{u}(\eta))$$

$$\cdot(D_l(n_k\circ\overset{t}{u})(\zeta)-D_l(n_k\circ\overset{t}{u})(\eta))\Big\}_{\zeta=\xi'+\theta\cdot(\xi-\xi')}\cdot B_t(\eta)\;d\eta\;d\theta\Big|$$

$$+|\xi-\xi'|\cdot 2\cdot K_{\mathcal{B}}^2\cdot\int_0^1\int_\Delta\Big\{|\overset{t}{u}(\zeta)+\kappa\cdot n\circ\overset{t}{u}(\zeta)-\overset{t}{u}(\eta)|^{-2}$$

$$\cdot|\overset{t}{u}(\zeta)-\overset{t}{u}(\eta)|\Big\}_{\zeta=\xi'+\theta\cdot(\xi-\xi')}\;d\eta\;d\theta$$

(Hier wurde $K_{12}:=K_{11}\cdot 4\cdot\pi\cdot\operatorname{diam}\Delta$ abgekürzt. Beim letzten Summanden wurde (2.20), (2.23), (8.2) ausgenutzt.)

$$\le K_{12}\cdot|\xi-\xi'|\;+\;K_{13}\cdot|\xi-\xi'|\cdot\int_0^1\int_\Delta\Big\{|\overset{t}{u}(\zeta)+\kappa\cdot n\circ\overset{t}{u}(\zeta)-\overset{t}{u}(\eta)|^{-2}$$

$$\cdot(|\zeta-\eta|^{\tilde{\gamma}}+|\overset{t}{u}(\zeta)-\overset{t}{u}(\eta)|)\Big\}_{\zeta=\xi'+\theta\cdot(\xi-\xi')}\;d\eta\;d\theta$$

(mit

$$K_{13} := K_{\mathcal{B}} \cdot 2 \cdot \max\left\{ H_{\tilde{\gamma}}(D_l(n_r \circ \overset{s}{u})) : 1 \le l \le 2,\ 1 \le r \le 3,\ 1 \le s \le k_\Omega \right\}$$

$$+ 2 \cdot K_{\mathcal{B}}^2 ;$$

wegen (8.2). Beachte: $H_\alpha(D_l(n_k \circ \overset{t}{u})) < \infty$, weil Ω $C^{2,\tilde{\gamma}}$-berandet ist.)

$$\le |\xi - \xi'| \cdot \left(K_{12} + K_{14} \cdot \int_0^1 \int_\Delta |\overset{t}{u}(\xi' + \theta \cdot (\xi - \xi')) - \overset{t}{u}(\eta)|^{-2+\tilde{\gamma}}\, d\eta\, d\theta \right)$$

(mit $K_{14} := K_{13} \cdot \varepsilon_{\mathcal{B}}^2 \cdot (1 + K_{\mathcal{B}}^{1-\tilde{\gamma}})$; wegen (2.16), (2.25))

$$\le K_{15} \cdot |\xi - \xi'| \qquad \text{(mit } K_{15} := K_{12} + K_{14} \cdot 2 \cdot \pi \cdot (\operatorname{diam} \Delta)^{\tilde{\gamma}} / \tilde{\gamma})$$

$$\le K_{15} \cdot |y - y'| .$$

<u>2. Fall:</u> $|y' + \theta \cdot (y - y') - \overset{t}{u}(\eta)| \ge \varepsilon_{\mathcal{B}}/2$ für $\eta \in \operatorname{Tr} B_t$. Jetzt ergibt sich:

$$(8.13) \quad \left| \int_\Delta \left\{ P_{jik}(y + \kappa \cdot n(y) - \overset{t}{u}(\eta)) \cdot n_k(y) - P_{jik}(y' + \kappa \cdot n(y') - \overset{t}{u}(\eta)) \cdot n_k(y') \right.\right.$$

$$- P_{jik}(y + \kappa \cdot n(y) - \overset{t}{u}(\eta)) \cdot n_k \circ \overset{t}{u}(\eta)$$

$$\left.\left. + P_{jik}(y' + \kappa \cdot n(y') - \overset{t}{u}(\eta)) \cdot n_k \circ \overset{t}{u}(\eta) \right\} \cdot B_t(\eta)\, d\eta \right|$$

$$= \left| \int_{\operatorname{Tr} B_t} \left\{ P_{jik}(y + \kappa \cdot n(y) - \overset{t}{u}(\eta)) \cdot (n_k(y) - n_k(y')) \right.\right.$$

$$+ \int_0^1 \sum_{m=1}^3 D_m P_{jik}\left(y' + \kappa \cdot n(y') - \overset{t}{u}(\eta) + \theta \cdot (y - y' + \kappa \cdot n(y) - \kappa \cdot n(y')) \right) d\theta$$

$$\left.\left. \cdot (y_m - y'_m + \kappa \cdot n_m(y) - \kappa \cdot n_m(y')) \cdot (n_k(y') - n_k \circ \overset{t}{u}(\eta)) \right\} \cdot B_t(\eta)\, d\eta \right|$$

$$\le \int_{\operatorname{Tr} B_t} \left\{ |y + \kappa \cdot n(y) - \overset{t}{u}(\eta)|^{-2} \cdot K_{\mathcal{B}} \cdot |y - y'| \right.$$

$$+ \int_0^1 24 \cdot |y' + \kappa \cdot n(y') - \overset{t}{u}(\eta) + \theta \cdot (y - y' + \kappa \cdot n(y) - \kappa \cdot n(y'))|^{-3}\, d\theta$$

$$\left. \cdot (|y - y'| + \kappa \cdot K_{\mathcal{B}} \cdot |y - y'|) \cdot 2 \right\} \cdot B_t(\eta)\, d\eta$$

(mit (8.2), (8.3), (2.23))

$$\le K_{16} \cdot |y - y'| \cdot \int_{\operatorname{Tr} B_t} \left\{ (|\overset{t}{u}(\eta) - y| - \kappa)^{-2} \right.$$

$$+ \int_0^1 \left(|y' + \theta (y - y') - \overset{t}{u}(\eta)| - \kappa \cdot |n(y') + \theta (n(y) - n(y'))| \right)^{-3} d\theta$$

$$\cdot B_t(\eta)\, d\eta$$

(mit $K_{16} := K_{\mathcal{B}} + 24 \cdot (1 + (\varepsilon_{\mathcal{B}}/2) \cdot K_{\mathcal{B}})$;

beachte, daß $\kappa \le \varepsilon_{\mathcal{B}}/4$ vorausgesetzt wurde.)

$$\le K_{17} \cdot |y - y'| \cdot \int_{\operatorname{Tr} B_t} B_t(\eta)\, d\eta$$

(mit $K_{17} := K_{16} \cdot ((\varepsilon_{\mathcal{B}}/4)^{-2} + (\varepsilon_{\mathcal{B}}/4)^{-3})$.

Hier wurde die Voraussetzung im 2. Fall sowie die Eigenschaft $\kappa \le \varepsilon_B/4$ angewandt.)

$$\le K_{18}\cdot|y-y'| \quad (\text{mit } K_{18} := K_{17}\cdot K_B\cdot\int_\Delta d\eta).$$

Die vorangehende Fallunterscheidung gilt wiederum für alle $t \in \{1,\dots,k_\Omega\}$. Setzt man also

$$K_{19} := 9\cdot|\vec{\phi}|_0\cdot k_\Omega\cdot\max\{K_{13},K_{18}\},$$

so erhält man aus (8.11), (8.12), (8.13) und (2.19):

$$(8.14)\quad \left|\sum_{i,k=1}^{3} \phi_i(y)\cdot\int_{\partial\Omega}(P_{jik}(y-x)\cdot n_k(y)-P_{jik}(y'-x)\cdot n_k(y'))\,d\Omega(x)\right|$$

$$\le K_{19}\cdot|y-y'|.$$

Setze $K_{20} := (K_{10}+K_{19})\cdot 3/(2\cdot\pi)$. Dann ergibt sich aus (8.9), (8.10) und (8.14):

$$|\phi_j(y)-\phi_j(y')| \le K_{20}\cdot|y-y'|.$$

Dies gilt im Fall $|y-y'| < \varepsilon_B$. Berücksichtigt man (8.8), so folgt, daß $K_{21} := \max\{K_{20}, 4\cdot\varepsilon_B^{-1}\cdot|\phi_j|_0\}$ eine Lipschitz-Konstante zur Funktion ϕ_j ist. □

Satz 8.1: Seien $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$. Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine Lipschitz-stetige Funktion. Setze $M := \{t\in[a,b]: f'(t) \text{ existiert}\}$.

Dann ist $[a,b]\setminus M$ eine Nullmenge. Definiert man $f':[a,b]\to\mathbb{R}$ durch $f'(t)$, falls $t\in M$, und durch $f'(t) := 0$ sonst, so gilt für $x\in[a,b]$:

$$f(x) = \int_a^x f'(t)\,dt + f(a).$$

Beweis: Siehe [Roy], S. 104-108, insbesondere Corollary 5.14, Problem 5.16 a). □

Lemma 8.2: Sei $F:\Delta\to\mathbb{C}$ Lipschitz-stetig, $i\in\{1,2\}$. Dann gibt es eine meßbare und beschränkte Abbildung $d_iF:\Delta\to\mathbb{C}$, so daß für $G\in C_0^1(\Delta)$ gilt:

$$\int_\Delta d_iG\cdot F\,dx = -\int_\Delta G\cdot D_iF\,dx.$$

Beweis: Sei $f\in\{\mathrm{Re}\,F, \mathrm{Im}\,F\}$. Wir betrachten o.E. den Fall $i=2$. Zu $a\in(-\alpha_\Omega,\alpha_\Omega)$ sei

$$N_a := \{t\in(-\alpha_\Omega,\alpha_\Omega): (f(a,.))'(t) \text{ existiert.}\}.$$

Wegen Satz 8.1 ist $(-\alpha_\Omega,\alpha_\Omega)\setminus N_a$ eine Nullmenge, denn $f(a,.)$ ist Lipschitz-stetig ($a\in(-\alpha_\Omega,\alpha_\Omega)$). Wir definieren

$$d_2f(x) := \limsup_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} (f(x_1,x_2+h)-f(x_1,x_2))/h \text{ für } x\in\Delta.$$

Dann ist D_2f meßbar. Wegen der Lipschitz-Stetigkeit von f ist d_2f beschränkt, und für $a\in(-\alpha_\Omega,\alpha_\Omega)$, $t\in N_a$ ist

$$d_2f(a,t) = (f(a,.))'(t).$$

Sei nun $G \in C_0^1(\Delta)$, $g \in \{\mathrm{Re}\, G, \mathrm{Im}\, G\}$. Sei $a \in (-\alpha_\Omega, \alpha_\Omega)$ festgehalten. Wir wählen $\alpha \in (0, \alpha_\Omega)$, so daß $\mathrm{Tr}\, g(a,.) \subset (-\alpha, \alpha)$. Setze

$$M_a := \{t \in [-\alpha,\alpha]:\ ((f\cdot g)(a,.))'(t) \text{ existiert}\}.$$

Nach Satz 8.1 ist $[-\alpha,\alpha] \setminus M_a$ eine Nullmenge. Definiere die Abbildung $P_a : [-\alpha,\alpha] \to \mathbb{R}$ durch

$$P_a(t) := ((f\cdot g)(a,.))'(t), \text{ falls } t \in M_a,\ P_a(t) := 0 \text{ sonst.}$$

Mit Satz 8.1 ergibt sich dann:

$$0 = (f\cdot g)(\alpha) - (f\cdot g)(-\alpha) = \int_{-\alpha}^{\alpha} P_a(t)\, dt.$$

Für $t \in N_a \cap [-\alpha,\alpha]$ ist aber $t \in M_a$ und

$$P_a(t) = d_2 f(a,t)\cdot g(a,t) + f(a,t)\cdot D_2 g(a,t).$$

Da $[-\alpha,\alpha]\setminus N_a$ Nullmenge und $\mathrm{Tr}\, g(a,.) \subset [-\alpha,\alpha]$, folgt nun:

$$0 = \int_{-\alpha_\Omega}^{\alpha_\Omega} (d_2 f(a,t)\cdot g(a,t) + f(a,t)\cdot D_2 g(a,t))\, dt.$$

Weil hierbei a beliebig aus $(-\alpha_\Omega, \alpha_\Omega)$ war, haben wir:

$$0 = \int_\Delta (d_2 f\cdot g + f\cdot D_2 g)\, dx. \qquad \square$$

<u>Lemma 8.3:</u> <u>Sei</u> $L \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$. <u>Es gebe</u> $c > 0$, <u>so daß</u>

$$(8.15)\quad |L(z)| \le c\cdot|z|^{-1},\ |D_l L(z)| \le c\cdot|z|^{-2},\ |D_m D_l L(z)| \le c\cdot|z|^{-3}$$

<u>für</u> $m,l \in \{1,2,3\}$, $z \in \mathbb{R}^3\setminus\{0\}$. <u>Sei</u> $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{C}$ <u>Lipschitz-stetig</u>. <u>Dann</u>

<u>ist die Funktion</u>

$$g : \partial\Omega \ni x \to \int_{\partial\Omega} L(x-y)\cdot\varphi(y)\, d\Omega(y) \in \mathbb{C}$$

<u>aus</u> $W^{2-1/r,r}(\partial\Omega)$ <u>für</u> $r \in [1,\infty)$.

<u>Beweis:</u> Es ist $g = \sum_{i=1}^{k_\Omega} g^{(i)}$, mit

$$(8.16)\quad g^{(i)} : \partial\Omega \ni x \to \int_\Delta L(x - \overset{i}{u}(\eta))\cdot\varphi\circ\overset{i}{u}(\eta)\cdot B_i(\eta)\, d\eta \in \mathbb{C} \qquad (1 \le i \le k_\Omega)$$

(siehe (2.19)). Sei nun $i,t \in \{1,\dots,k_\Omega\}$, $\alpha \in (0,1)$, $l \in \{1,2\}$ festgehalten. Wir zeigen, daß $D_l(g^{(i)}\circ\overset{t}{u})$ existiert und zu $C^\alpha(\Delta)$ gehört. Dazu untersuchen wir die Funktionen

$$(8.17)\quad R_1 := (g^{(i)}\circ\overset{t}{u})\,|\,(\overset{t}{u})^{-1}(\Lambda_t \setminus \overline{\Lambda_i^{1/2}}) \text{ und}$$

$$R_2 := (g^{(i)}\circ\overset{t}{u})\,|\,(\overset{t}{u})^{-1}(\Lambda_t \cap \Lambda_i).$$

Wir betrachten zunächst R_1. Es ist $\mathrm{Tr}\, B_i \subset \Delta^{1/4}$ (siehe (2.14)), so daß $\overset{i}{u}(\eta) \in \Lambda_i^{1/4}$ für $\eta \in \mathrm{Tr}\, B_i$. Somit ist für $\rho \in (\overset{t}{u})^{-1}(\Lambda_t\setminus\overline{\Lambda_i^{1/2}})$ und für $\eta \in \mathrm{Tr}\, B_i$ die Differenz $|\overset{t}{u}(\rho) - \overset{i}{u}(\eta)|$ größer oder gleich

$$\delta_1 := \min\{\mathrm{dist}(\partial\Omega\setminus\overline{\Lambda_r^{1/2}}, \Lambda_r^{1/4}) : 1 \le r \le k_\Omega\}.$$

Gemäß (2.12) ist $\delta_1 > 0$. Damit folgt, daß $g^{(i)}\circ\overset{t}{u}$ auf der offenen Menge $(\overset{t}{u})^{-1}(\Lambda_t\setminus\overline{\Lambda_i^{1/2}})$ stetig differenzierbar ist, mit

$$(8.18)\quad \partial/\partial\rho_l (g^{(i)}\circ\overset{t}{u})(\rho) = \int_\Delta \sum_{\nu=1}^{3} D_\nu L(\overset{t}{u}(\rho) - \overset{i}{u}(\eta))\cdot D_l\overset{t}{u}_\nu(\rho) \cdot\varphi\circ\overset{i}{u}(\eta)\cdot B_i(\eta)\, d\eta$$

für $\rho \in (\overset{t}{u})^{-1}(\Lambda_t\setminus\overline{\Lambda_i^{1/2}})$.

Weiterhin folgt, daß es $K_1 > 0$ gibt mit $|\partial/\partial\rho_1(g^{(i)} \circ \overset{t}{u})(\rho)| \leq K_1$, für ρ wie in (8.18). Jetzt findet man für $\rho, \rho' \in (\overset{t}{u})^{-1}(\Lambda_t \setminus \overline{\Lambda_i^{1/2}})$ mit $|\rho-\rho'| \geq \delta_1 \cdot (2 \cdot K_{\mathcal{B}})^{-1}$:

$$(8.19) \quad |\partial/\partial\rho_1(g^{(i)} \circ \overset{t}{u})(\rho) - \partial/\partial\rho_1'(g^{(i)} \circ \overset{t}{u})(\rho')|$$

$$\leq 4 \cdot K_1 \cdot \delta_1^{-1} \cdot K_{\mathcal{B}} \cdot |\rho-\rho'|.$$

Ist dagegen

$$(8.20) \quad \rho, \rho' \in (\overset{t}{u})^{-1}(\Lambda_t \setminus \overline{\Lambda_i^{1/2}}) \text{ mit } |\rho-\rho'| < \delta_1 \cdot (2 \cdot K_{\mathcal{B}})^{-1},$$

so ergibt sich für $\eta \in \mathrm{Tr}\, B_i \subset \Delta^{1/4}$ (d.h.: $\overset{i}{u}(\eta) \in \Lambda_i^{1/4}$), und für $\theta \in [0,1]$:

$$(8.21) \quad |\overset{t}{u}(\rho'+\theta \cdot (\rho-\rho')) - \overset{i}{u}(\eta)| \geq |\overset{t}{u}(\rho') - \overset{i}{u}(\eta)| - |\overset{t}{u}(\rho'+\theta \cdot (\rho-\rho')) - \overset{t}{u}(\rho')|$$

$$\geq \delta_1 - K_{\mathcal{B}} \cdot |\theta \cdot (\rho-\rho')| \quad \text{(wegen (2.20))}$$

$$\geq \delta_1/2 > 0.$$

Für ρ, ρ' wie in (8.20) findet man nun, mit der Abkürzung $\zeta(\theta) := \rho'+\theta \cdot (\rho-\rho')$ $(\theta \in [0,1])$:

$$(8.22) \quad |\partial/\partial\rho_1(g^{(i)} \circ \overset{t}{u})(\rho) - \partial/\partial\rho_1'(g^{(i)} \circ \overset{t}{u})(\rho')|$$

$$= \Big| \int_\Delta \sum_{\nu=1}^{3} \sum_{m=1}^{2} \int_0^1 \Big\{ \sum_{\mu=1}^{3} D_\mu D_\nu L(\overset{t}{u}(\zeta(\theta)) - \overset{i}{u}(\eta))$$

$$\cdot D_m \overset{t}{u}_\mu(\zeta(\theta)) \cdot D_1 \overset{t}{u}_\nu(\zeta(\theta))$$

$$+ D_\nu L(\overset{t}{u}(\zeta(\theta)) - \overset{i}{u}(\eta)) \cdot D_m D_1 \overset{t}{u}_\nu(\zeta(\theta)) \Big\} \cdot (\rho_m - \rho_m') \, d\theta$$

$$\cdot \varphi \circ \overset{i}{u}(\eta) \cdot B_i(\eta) \, d\eta \Big|$$

((8.18), (8.21), Mittelwertsatz)

$$\leq \int_\Delta B_i(\eta) \, d\eta \cdot 6 \cdot \Big\{ 3 \cdot c \cdot (\delta_1/2)^{-3} \cdot K_{\mathcal{B}}^2 + c \cdot (\delta_1/2)^{-2} \cdot K_{\mathcal{B}} \Big\}$$

$$\cdot |\varphi|_0 \cdot K_{\mathcal{B}} \cdot |\rho-\rho'|.$$

Die vorangehende Ungleichung ergibt sich aus (8.15), (8.21) und (2.20). Aus (8.17), (8.19) und (8.22) erhält man:

$$(8.23) \quad R_1 \in C_\alpha\Big((\overset{t}{u})^{-1}(\Lambda_t \setminus \overline{\Lambda_i^{1/2}})\Big).$$

Wir betrachten nun R_2. Zu $\kappa \in (0, \varepsilon_{\mathcal{B}}]$ setzen wir

$$(8.24) \quad G^\kappa : (\overset{t}{u})^{-1}(\Lambda_t \cap \Lambda_i) \ni \rho \to$$

$$\to \int_\Delta L(\overset{t}{u}(\rho) - \overset{i}{u}(\eta) - \kappa \cdot n \circ \overset{i}{u}(\eta)) \cdot \varphi \circ \overset{i}{u}(\eta) \cdot B_i(\eta) \, d\eta \in \mathbb{C}.$$

Wegen (2.25) ist $G^\kappa \in C^1((\overset{t}{u})^{-1}(\Lambda_t \cap \Lambda_i))$, mit

$$\partial/\partial\rho_1 \, G^\kappa(\rho) = \int_\Delta \sum_{\nu=1}^{3} D_\nu L(\overset{t}{u}(\rho) - \overset{i}{u}(\eta) - \kappa \cdot n \circ \overset{i}{u}(\eta)) \cdot D_1 \overset{t}{u}_\nu(\rho)$$

$$\cdot \varphi \circ \overset{i}{u}(\eta) \cdot B_i(\eta) \, d\eta,$$

für $\rho \in (\overset{t}{u})^{-1}(\Lambda_t \cap \Lambda_i)$, $\kappa \in (0, \varepsilon_{\mathcal{B}}]$.

Zur Abkürzung setzen wir $\Psi := \Psi_{it}$. (Ψ_{it} wurde vor Lemma 2.2 definiert.) Dann ist für $\rho \in (\overset{t}{u})^{-1}(\Lambda_t \cap \Lambda_i)$, $\nu \in \{1,2,3\}$:

$$D_1\overset{t}{u}_\nu(\rho) = D_1\Big(\overset{t}{u}|(\overset{t}{u})^{-1}(\Lambda_t\cap\Lambda_i)\Big)_\nu(\rho) = D_1(\overset{i}{u}\circ\Psi)_\nu(\rho)$$

$$= \sum_{m=1}^{2} D_m\overset{i}{u}_\nu(\Psi(\rho))\cdot D_1\Psi_m(\rho).$$

Jetzt folgt für $\kappa \in (0,\varepsilon_{\mathcal{B}}]$, $\rho \in (\overset{t}{u})^{-1}(\Lambda_t\cap\Lambda_i)$:

(8.25) $\partial/\partial\rho_1 G^\kappa(\rho)$

$$= \int_\Delta \sum_{\nu=1}^{3} D_\nu L(\overset{i}{u}\circ\Psi(\rho)-\overset{i}{u}(\eta)-\kappa\cdot n\circ\overset{i}{u}(\eta))$$

$$\cdot\Big(\sum_{m=1}^{2} D_m\overset{i}{u}_\nu\circ\Psi(\rho)\cdot D_1\Psi_m(\rho)\Big)\cdot\varphi\circ\overset{i}{u}(\eta)\cdot B_i(\eta)\;d\eta$$

$$= \int_\Delta \sum_{m=1}^{2} D_1\Psi_m(\rho)\cdot\Big\{\sum_{\nu=1}^{3} D_\nu L(\overset{i}{u}\circ\Psi(\rho)-\overset{i}{u}(\eta)-\kappa\cdot n\circ\overset{i}{u}(\eta))$$

$$\cdot(D_m\overset{i}{u}_\nu\circ\Psi(\rho)-D_m\overset{i}{u}_\nu(\eta)-\kappa\cdot D_m(n\circ\overset{i}{u})_\nu(\eta))$$

$$-\;\partial/\partial\eta_m(L(\overset{i}{u}\circ\Psi(\rho)-\overset{i}{u}(\eta)-\kappa\cdot n\circ\overset{i}{u}(\eta)))\Big\}\cdot\varphi\circ\overset{i}{u}(\eta)\cdot B_i(\eta)\;d\eta$$

$$= \int_\Delta \sum_{m=1}^{2} D_1\Psi_m(\rho)\cdot f_m(\rho,\eta,\kappa)\;d\eta,$$

mit

$$f_m : (\overset{t}{u})^{-1}(\Lambda_t\cap\Lambda_i)\times\Delta\times[0,\varepsilon_{\mathcal{B}}] \ni (\rho,\eta,\kappa)$$

$$\to \sum_{\nu=1}^{3} D_\nu L(\overset{i}{u}\circ\Psi(\rho)-\overset{i}{u}(\eta)-\kappa\cdot n\circ\overset{i}{u}(\eta))$$

$$\cdot(D_m\overset{i}{u}_\nu\circ\Psi(\rho)-D_m\overset{i}{u}_\nu(\eta)-\kappa\cdot D_m(n\circ\overset{i}{u})_\nu(\eta))\cdot\varphi\circ\overset{i}{u}(\eta)\cdot B_i(\eta)$$

$$+\;L(\overset{i}{u}\circ\Psi(\rho)-\overset{i}{u}(\eta)-\kappa\cdot n\circ\overset{i}{u}(\eta))\cdot(d_m(\varphi\circ\overset{i}{u})\cdot B_i+(\varphi\circ\overset{i}{u})\cdot D_m B_i)(\eta)$$

$$\in (0,\infty).$$

Die letzte Gleichung auf der rechten Seite von (8.25) folgt aus Lemma 8.2 (partielle Integration). Beachte: Tr $B_i \subset \Delta$, $\varphi\circ\overset{i}{u}$ Lipschitz-stetig. Die beschränkte Funktion $d_m(\varphi\circ\overset{i}{u})$ $(1 \le m \le 3)$ wurde in Lemma 8.2 definiert. Für $\kappa \in [0,\varepsilon_{\mathcal{B}}]$, $\rho \in (\overset{t}{u})^{-1}(\Lambda_t\cap\Lambda_i)$, $\eta \in \Delta$, $m \in \{1,2\}$ ist

(8.26) $|f_m(\rho,\eta,\kappa)|$

$$\le 3\cdot c\cdot|\overset{i}{u}\circ\Psi(\rho)-\overset{i}{u}(\eta)-\kappa\cdot n\circ\overset{i}{u}(\eta)|^{-2}\cdot K_{\mathcal{B}}\cdot(|\Psi(\rho)-\eta|+\kappa)\cdot|\varphi|_0\cdot K_{\mathcal{B}}$$

$$+\;c\cdot|\overset{i}{u}\circ\Psi(\rho)-\overset{i}{u}(\eta)-\kappa\cdot n\circ\overset{i}{u}(\eta)|^{-1}\cdot(|d_m(\varphi\circ\overset{i}{u})|_0+|\varphi|_0)\cdot K_{\mathcal{B}}$$

(mit (2.20))

$$\le K_2\cdot|\Psi(\rho)-\eta|^{-1}$$

(mit $K_2 = 3\cdot c\cdot(\varepsilon_{\mathcal{B}}^{-2}+\varepsilon_{\mathcal{B}}^{-1})\cdot|\varphi|_0\cdot K_{\mathcal{B}}^2$

$$+\;c\cdot\varepsilon_{\mathcal{B}}^{-1}\cdot\Big(\max_{\substack{1\le j\le k_\Omega\\ 1\le n\le 3}} |d_n(\varphi\circ\overset{j}{u})|_0+|\varphi|_0\Big)\cdot K_{\mathcal{B}}\;).$$

Bei der letzten Ungleichung wurden die Abschätzungen (2.16) und (2.25) ausgenutzt.

Jetzt ergibt sich für $\delta > 0$, $\kappa \in [0,\varepsilon_{\mathcal{B}}]$, $\rho \in (\overset{t}{u})^{-1}(\Lambda_t\cap\Lambda_i)$:

$$(8.27)\quad \sum_{m=1}^{3} |D_1\Psi_m(\rho)|\cdot \int\limits_{\substack{\Delta \\ |\Psi(\rho)-\eta|\leq\delta}} |f_m(\rho,\eta,\kappa)|\, d\eta$$

$$\leq \int\limits_{|\Psi(\rho)-\eta|<\delta} 2\cdot K_{\mathcal{B}}\cdot K_2\cdot|\Psi(\rho)-\eta|^{-1}\, d\eta \quad \text{(wegen (8.26), (2.20))}$$

$$\leq K_3\cdot\delta \quad (\text{mit } K_3 := 2\cdot\pi\cdot K_{\mathcal{B}}\cdot K_2).$$

Speziell mit $\delta = 1+\operatorname{diam}\Delta$, $\kappa = 0$ folgt, daß die Funktion

$$(8.28)\quad H:(\overset{t}{u})^{-1}(\Lambda_t\cap\Lambda_i)\ni\rho \to \sum_{m=1}^{2} D_m\Psi_1(\rho)\cdot\int\limits_{\Delta} f_m(\rho,\eta,0)\, d\eta \in \mathbb{C}$$

wohldefiniert ist.

Für $\rho,\rho' \in (\overset{t}{u})^{-1}(\Lambda_t\cap\Lambda_i)$ mit $\rho\neq\rho'$, $\eta\in\Delta$ mit $|\Psi(\rho)-\eta| \geq 2\cdot K_{\mathcal{B}}^2\cdot|\rho-\rho'|$, $\kappa\in[0,\varepsilon_{\mathcal{B}}]$, $\theta\in[0,1]$ gilt (siehe (2.25), (2.21), (2.20), (2.16)):

$$(8.29)\quad |\overset{i}{u}(\Psi(\rho')+\theta\cdot(\Psi(\rho)-\Psi(\rho')))-\overset{i}{u}(\eta)-\kappa\cdot n\circ\overset{i}{u}(\eta)|$$

$$\geq \varepsilon_{\mathcal{B}}\cdot|\overset{i}{u}(\Psi(\rho')+\theta\cdot(\Psi(\rho)-\Psi(\rho')))-\overset{i}{u}(\eta)|$$

$$\geq \varepsilon_{\mathcal{B}}\cdot\Big(|\overset{i}{u}\circ\Psi(\rho)-\overset{i}{u}(\eta)|-|\overset{i}{u}(\Psi(\rho')+\theta\cdot(\Psi(\rho)-\Psi(\rho')))-\overset{i}{u}(\Psi(\rho))|\Big)$$

$$\geq \varepsilon_{\mathcal{B}}\cdot\Big(|\overset{i}{u}\circ\Psi(\rho)-\overset{i}{u}(\eta)|-K_{\mathcal{B}}\cdot|\Psi(\rho)-\Psi(\rho')|\Big)$$

$$\geq \varepsilon_{\mathcal{B}}\cdot\Big(|\overset{i}{u}\circ\Psi(\rho)-\overset{i}{u}(\eta)|-K_{\mathcal{B}}^2\cdot|\rho-\rho'|\Big) \geq \varepsilon_{\mathcal{B}}\cdot\Big(|\Psi(\rho)-\eta|-K_{\mathcal{B}}^2\cdot|\rho-\rho'|\Big)$$

$$\geq (1/2)\cdot\varepsilon_{\mathcal{B}}\cdot|\Psi(\rho)-\eta| \geq (1/2)\cdot\varepsilon_{\mathcal{B}}\cdot K_{\mathcal{B}}^2\cdot|\rho-\rho'| > 0.$$

Somit ist für ρ,ρ',η,κ wie in (8.29) und für $\nu\in\{1,2,3\}$ die Funktion

$$[0,1]\ni\theta \to D_\nu L\Big(\overset{i}{u}(\Psi(\rho')+\theta\cdot(\Psi(\rho)-\Psi(\rho')))-\overset{i}{u}(\eta)-\kappa\cdot n\circ\overset{i}{u}(\eta)\Big)\in\mathbb{R}$$

stetig differenzierbar. Nun ergibt sich mit Hilfe des Mittelwertsatzes, für ρ,ρ',η,κ wie in (8.29), $m\in\{1,2\}$, und mit der Abkürzung $\Gamma(\theta) := \Psi(\rho')+\theta\cdot(\Psi(\rho)-\Psi(\rho'))$ für $\theta\in[0,1]$:

$$(8.30)\quad |f_m(\rho,\eta,\kappa)-f_m(\rho',\eta,\kappa)|$$

$$\leq \Big|\sum_{n=1}^{2}(\Psi_n(\rho)-\Psi_n(\rho'))\cdot\int_0^1\Big\{\Big[\sum_{\mu,\nu=1}^{3} D_\mu D_\nu L(\overset{i}{u}(\Gamma(\theta))-\overset{i}{u}(\eta)-\kappa\cdot n\circ\overset{i}{u}(\eta))$$

$$\cdot D_n\overset{i}{u}_\mu(\Gamma(\theta))\cdot\Big(D_m\overset{i}{u}_\nu(\Gamma(\theta))-D_m\overset{i}{u}_\nu(\eta)-\kappa\cdot D_m(n\circ\overset{i}{u})_\nu(\eta)\Big)$$

$$+\sum_{\nu=1}^{3} D_\nu L\Big(\overset{i}{u}(\Gamma(\theta))-\overset{i}{u}(\eta)-\kappa\cdot n\circ\overset{i}{u}(\eta)\Big)\cdot D_n D_m\overset{i}{u}_\nu(\Gamma(\theta))\Big]$$

$$\cdot\varphi\circ\overset{i}{u}(\eta)\cdot B_i(\eta)$$

$$+\sum_{\mu=1}^{3} D_\mu L(\overset{i}{u}(\Gamma(\theta))-\overset{i}{u}(\eta)-\kappa\cdot n\circ\overset{i}{u}(\eta))\cdot D_n\overset{i}{u}_\mu(\Gamma(\theta))$$

$$\cdot(d_m(\varphi\circ\overset{i}{u})\cdot B_i+(\varphi\circ\overset{i}{u})\cdot D_m B_i)(\eta)\Big\}\, d\theta\Big|$$

$$\leq K_{\mathcal{B}}\cdot|\rho-\rho'|\cdot\int_0^1\Big\{\Big[9\cdot c\cdot|\overset{i}{u}(\Gamma(\theta))-\overset{i}{u}(\eta)-\kappa\cdot n\circ\overset{i}{u}(\eta)|^{-3}$$

$$\cdot K_{\mathcal{B}}^2\cdot(|\Gamma(\theta)-\eta|+\kappa)$$

$$+3\cdot c\cdot|\overset{i}{u}(\Gamma(\theta))-\overset{i}{u}(\eta)-\kappa\cdot n\circ\overset{i}{u}(\eta)|^{-2}\cdot K_{\mathcal{B}}\Big]\cdot|\varphi|_0\cdot K_{\mathcal{B}}$$

$$+3\cdot c\cdot|\overset{i}{u}(\Gamma(\theta))-\overset{i}{u}(\eta)-\kappa\cdot n\circ\overset{i}{u}(\eta)|^{-2}\cdot K_{\mathcal{B}}^2\cdot(|d_m(\varphi\circ\overset{i}{u})|_0+|\varphi|_0)\Big\}\, d\theta$$

(mit (2.20))

$$\leqq K_4 \cdot |\rho-\rho'| \cdot \int_0^1 |\overset{i}{u}(\Gamma(\theta))-\overset{i}{u}(\eta)-\kappa\cdot n\circ\overset{i}{u}(\eta)|^{-2}\, d\theta$$

(mit $K_4 := K_{\mathcal{B}} \cdot c \cdot \Big([9 \cdot (\varepsilon_{\mathcal{B}}^{-1}+1) \cdot K_{\mathcal{B}}^2 + 3 \cdot K_{\mathcal{B}}] \cdot |\varphi|_o \cdot K_{\mathcal{B}}$

$+ 3 \cdot K_{\mathcal{B}}^2 \cdot \Big(\max\{ |d_r(\varphi\circ\overset{j}{u})|_o : 1 \leqq r \leqq 2,\ 1 \leqq j \leqq k_\Omega \} + |\varphi|_o \Big)\Big);$

wegen (2.25))

$$\leqq K_4 \cdot (\varepsilon_{\mathcal{B}}/2)^{-2} \cdot |\rho-\rho'| \cdot |\Psi(\rho)-\eta|^{-2} \quad \text{(wegen (8.29)).}$$

Jetzt findet man folgende Abschätzung, für $\rho,\rho' \in (\overset{t}{u})^{-1}(\Lambda_t \cap \Lambda_i)$ mit $\rho \neq \rho'$, für $\eta \in \Delta$ mit $|\Psi(\rho)-\eta| \geqq 2 \cdot K_{\mathcal{B}}^2 \cdot |\rho-\rho'|$, und für $\kappa \in [0,\varepsilon_{\mathcal{B}}]$:

$$(8.31) \quad \Big| \sum_{m=1}^{2} D_1\Psi_m(\rho) \cdot f_m(\rho,\eta,\kappa) - \sum_{m=1}^{2} D_1\Psi_m(\rho') \cdot f_m(\rho',\eta,\kappa) \Big|$$

$$\leqq \sum_{m=1}^{2} |D_1\Psi_m(\rho) - D_1\Psi_m(\rho')| \cdot |f_m(\rho',\eta,\kappa)|$$

$$+ \Big| \sum_{m=1}^{2} D_1\Psi_m(\rho) \cdot (f_m(\rho,\eta,\kappa) - f_m(\rho',\eta,\kappa)) \Big|$$

$$\leqq |\rho-\rho'| \cdot K_{\mathcal{B}} \cdot K_2 \cdot |\Psi(\rho)-\eta|^{-1} + 2 \cdot K_{\mathcal{B}} \cdot K_4 \cdot (\varepsilon_{\mathcal{B}}/2)^{-1} \cdot |\rho-\rho'| \cdot |\Psi(\rho)-\eta|^{-2}$$

(mit (8.26), (8.30), (2.20))

$$\leqq K_5 \cdot |\rho-\rho'| \cdot |\Psi(\rho)-\eta|^{-2}$$

(mit $K_5 := K_{\mathcal{B}} \cdot K_2 \cdot \operatorname{diam} \Delta + 2 \cdot K_{\mathcal{B}} \cdot K_4 \cdot (\varepsilon_{\mathcal{B}}/2)^{-1}$).

Damit ergibt sich für $\rho,\rho' \in (\overset{t}{u})^{-1}(\Lambda_t \cap \Lambda_i)$ mit $\rho \neq \rho'$, $\kappa \in [0,\varepsilon_{\mathcal{B}}]$, $\alpha \in (0,1)$:

$$(8.32) \quad \Big| \int_\Delta \sum_{m=1}^{2} D_1\Psi_m(\rho) \cdot f_m(\rho,\eta,\kappa)\, d\eta$$

$$- \int_\Delta \sum_{m=1}^{2} D_1\Psi_m(\rho') \cdot f_m(\rho',\eta,\kappa)\, d\eta \Big|$$

$$\leqq \sum_{\xi\in\{\rho,\rho'\}} \int_{\{\eta\in\Delta : |\Psi(\rho)-\eta| \leqq 2 \cdot K_{\mathcal{B}}^2 \cdot |\rho-\rho'|\}}$$

$$\Big| \sum_{m=1}^{2} D_1\Psi_m(\xi) \cdot f_m(\xi,\eta,\kappa) \Big|\, d\eta$$

$$+ \int_{\{\eta\in\Delta : |\Psi(\rho)-\eta| \geqq 2 \cdot K_{\mathcal{B}}^2 \cdot |\rho-\rho'|\}}$$

$$\Big| \sum_{m=1}^{2} D_1\Psi_m(\rho) \cdot f_m(\rho,\eta,\kappa) - \sum_{m=1}^{2} D_1\Psi_m(\rho') \cdot f_m(\rho',\eta,\kappa) \Big|\, d\eta$$

$$\leqq \sum_{\xi\in\{\rho,\rho'\}} \int_{\{\eta\in\Delta : |\Psi(\rho)-\eta| \leqq 2 \cdot K_{\mathcal{B}}^2 \cdot |\rho-\rho'|\}}$$

$$D_1\Psi_m(\xi) \cdot f_m(\xi,\eta,\kappa)\, d\eta$$

$$+ \int_{\{\eta\in\Delta : |\Psi(\rho)-\eta| \geqq 2 \cdot K_{\mathcal{B}}^2 \cdot |\rho-\rho'|\}} K_5 \cdot |\rho-\rho'| \cdot |\Psi(\rho)-\eta|^{-2}\, d\eta$$

(mit (2.20), (8.31))

$$\leq 2\cdot K_3\cdot K_\beta^2\cdot(1+K_\beta)\cdot|\rho-\rho'|$$

$$+ K_5\cdot|\rho-\rho'|\cdot(\operatorname{diam}\Delta)^{1-\alpha}\cdot\int_{\{\eta\in\Delta:|\Psi(\rho)-\eta|\geq 2\cdot K_\beta^2\cdot|\rho-\rho'|\}}$$

$$|\Psi(\rho)-\eta|^{-3+\alpha}\,d\eta$$

(mit (8.27))

$$\leq K_6\cdot|\rho-\rho'|^\alpha$$

(mit $K_6 := 2\cdot K_3\cdot K_\beta^2\cdot(1+K_\beta)\cdot(\operatorname{diam}\Delta)^{1-\alpha}$
$+ K_5\cdot(\operatorname{diam}\Delta)^{1-\alpha}\cdot 2\cdot\pi\cdot(1-\alpha)^{-1}\cdot(2\cdot K_\beta^2)^{-1+\alpha}$).

Sei $\rho\in(\overset{t}{u})^{-1}(\Lambda_t\cap\Lambda_i)$. Für alle $\eta\in\Delta$ gilt folgende Konvergenzaussage:

$$\sum_{m=1}^{2} D_1\Psi_m(\rho)\cdot f_m(\rho,\eta,\kappa)\to\sum_{m=1}^{2} D_1\Psi_m(\rho)\cdot f_m(\rho,\eta,0)\quad\text{für }\kappa\downarrow 0.$$

Weil aber aufgrund von (8.26) und (2.20) für $\eta\in\Delta$ mit $\eta\neq\Psi(\rho)$ und für $\kappa\in[0,\varepsilon_\beta]$ gilt:

$$\left|\sum_{m=1}^{2} D_1\Psi_m(\rho)\cdot f_m(\rho,\eta,\kappa)\right|\leq K_\beta\cdot K_2\cdot|\Psi(\rho)-\eta|^{-1},$$

erhält man nun mit dem Konvergenzsatz von Lebesgue, sowie mit (8.25):

(8.33) $D_1G^\kappa(\rho)\to H(\rho)\quad(\kappa\downarrow 0)$. (H wurde in (8.28) definiert.)

Andererseits folgt aus (8.27), mit $\delta := \operatorname{diam}\Delta$, sowie aus (8.25):

(8.34) $|D_1G^\kappa(\rho)|\leq K_3\cdot\operatorname{diam}\Delta\quad$ für $\kappa\in(0,\varepsilon_\beta]$, $\rho\in(\overset{t}{u})^{-1}(\Lambda_t\cap\Lambda_i)$.

Ferner erhält man aus (8.25) und (8.32):

(8.35) $|D_1G^\kappa(\rho)-D_1G^\kappa(\rho')|\leq K_6\cdot|\rho-\rho'|^\alpha$

für $\rho,\rho'\in(\overset{t}{u})^{-1}(\Lambda_t\cap\Lambda_i)$, $\kappa\in(0,\varepsilon_\beta]$.

Jetzt kann man mit dem Satz von Arzelà-Ascoli schließen, daß es eine Folge (κ_n) in $(0,\varepsilon_\beta]$ mit folgenden Eigenschaften gibt: $\kappa_n\downarrow 0$ $(n\to\infty)$; $(D_1G^{\kappa_n})$ gleichmäßig konvergent. Wegen (8.33) bedeutet dies:

$$D_1G^{\kappa_n}\to H\quad(n\to\infty)\text{ gleichmäßig.}$$

Aus dem Konvergenzsatz von Lebesgue folgt andererseits, für $\rho\in(\overset{t}{u})^{-1}(\Lambda_t\cap\Lambda_i)$ festgehalten:

$G^{\kappa_n}(\rho)\to R_2(\rho)\quad(n\to\infty)$ (siehe die Definitionen in (8.24), (8.17), (8.16)).

Somit existiert D_1R_2 und ist gleich H; ferner folgt:

$$D_1G^{\kappa_n}\to D_1R_2\quad(n\to\infty)\text{ gleichmäßig.}$$

Nun erhält man aus (8.34), (8.35):

(8.36) $D_1R_2\in C^\alpha((\overset{t}{u})^{-1}(\Lambda_t\cap\Lambda_i))$ für $\alpha\in(0,1)$.

Weil $(\overset{t}{u})^{-1}(\Lambda_t\cap\Lambda_i)$, $(\overset{t}{u})^{-1}(\Lambda_t\setminus\overline{\Lambda_i^{1/2}})$ offene Mengen in Δ sind, weil ihre Vereinigung gleich Δ ist, und weil l beliebig aus $\{1,2\}$ war, folgt aus (8.17), (8.23), (8.36): $g^{(i)}\circ\overset{t}{u}\in C^1(\Delta)$.

Sei wiederum $l \in \{1,2\}$ festgehalten. Wir folgern nun noch aus den bisherigen Ergebnissen, daß $D_l(g^{(i)} \circ \overset{t}{u}) \in C^\alpha(\Delta)$ ist. Setze dazu

$$\delta_2 := \operatorname{dist}(\partial\Omega \setminus \Lambda_i, \overline{\Lambda_i^{1/2}}).$$

Gemäß (2.12) ist $\delta_2 > 0$. Für $\rho, \rho' \in \Delta$ mit $|\rho - \rho'| \geq \delta_2 / K_\beta$ ist

$$(8.37)\quad |D_l(g^{(i)} \circ \overset{t}{u})(\rho) - D_l(g^{(i)} \circ \overset{t}{u})(\rho')|$$

$$\leq \sum_{\xi \in \{\rho, \rho'\}} |D_l(g^{(i)} \circ \overset{t}{u})(\xi)| \leq 2 \cdot \max\{|D_l R_1|_0, |D_l R_2|_0\}$$

$$\leq 2 \max\{|D_l R_1|_0, |D_l R_2|_0\} \cdot (K_\beta \setminus \delta_2)^\alpha \cdot |\rho - \rho'|^\alpha,$$

wobei $|D_l R_1|_0, |D_l R_2|_0 < \infty$ wegen (8.23), (8.36).

Sei $\rho, \rho' \in \Delta$ mit $|\rho - \rho'| < \delta_2 \setminus K_\Omega$. Es kann nicht eintreten, daß $\rho \notin (\overset{t}{u})^{-1}(\Lambda_t \cap \Lambda_i)$ und $\rho' \notin (\overset{t}{u})^{-1}(\Lambda_t \setminus \overline{\Lambda_i^{1/2}})$. Denn sonst wäre $\overset{t}{u}(\rho) \notin \Lambda_i$, aber $\overset{t}{u}(\rho') \in \Lambda_t \cap \overline{\Lambda_i^{1/2}} \subset \overline{\Lambda_i^{1/2}}$. Das würde bedeuten: $|\overset{t}{u}(\rho) - \overset{t}{u}(\rho')| \geq \delta_2$, also: $|\rho - \rho'| \geq \delta_2 \setminus K_\beta$ (siehe (2.21)). Widerspruch! Ebenso erhält man einen Widerspruch, wenn man annimmt, daß $\rho' \notin (\overset{t}{u})^{-1}(\Lambda_t \cap \Lambda_i)$ und $\rho \notin (\overset{t}{u})^{-1}(\Lambda_t \setminus \overline{\Lambda_i^{1/2}})$. Jetzt kann man folgern: $\rho, \rho' \in (\overset{t}{u})^{-1}(\Lambda_t \cap \Lambda_i)$ oder $\rho, \rho' \in (\overset{t}{u})^{-1}(\Lambda_t \setminus \overline{\Lambda_i^{1/2}})$. Daraus und aus der Definition von R_1, R_2 in (8.17) folgt:

$$(8.38)\quad |D_l(g^{(i)} \circ \overset{t}{u})(\rho) - D_l(g^{(i)} \circ \overset{t}{u})(\rho')|$$

$$\leq \max\{|D_l R_1|_\alpha, |D_l R_2|_\alpha\} \cdot |\rho - \rho'|^\alpha,$$

wobei $|D_l R_1|_\alpha, |D_l R_2|_\alpha < \infty$ gemäß (8.23), (8.36).

Mit (8.37), (8.38) folgt: $D_l(g^{(i)} \circ \overset{t}{u}) \in C_\alpha(\Delta)$. Hierbei war $l \in \{1,2\}$ und $\alpha \in (0,1)$ beliebig. Wegen [FJK], S. 330/331 bedeutet dies:

$$D_l(g^{(i)} \circ \overset{t}{u}) \in W^{1-1/r,r}(\Delta) \text{ für } r \in [1,\infty),\ l \in \{1,2\}.$$

Aus der ersten Abschätzung in (8.15), aus (2.18) und Lemma 4.1 folgt, daß $g^{(i)} \circ \overset{t}{u}$ beschränkt ist. Somit haben wir:

$$g^{(i)} \circ \overset{t}{u} \in W^{2-1/r,r}(\partial\Omega) \text{ für } r \in [1,\infty).$$

Weil t beliebig aus $\{1,\ldots,k_\Omega\}$ war, bedeutet dies:

$$g^{(i)} \in W^{2-1/r,r}(\partial\Omega) \text{ für } r \in [1,\infty).$$

□

Korollar 8.1: Sei $\vec{\Psi} \in C^0(\partial\Omega)^3$ mit $0 = \vec{\Psi} + \vec{T}^*(\vec{\Psi})$. Sei $L \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ wie in Lemma 8.3 gegeben, und sei $j \in \{1,2,3\}$. Setze

$$\vec{g}: \partial\Omega \ni x \to \Big(\int_{\partial\Omega} L(x-y) \cdot \Psi_j(y)\, d\Omega(y)\Big)_{1 \leq j \leq 3} \in \mathbb{C}^3.$$

Dann ist $\vec{g} \in W^{2-1/r,r}(\partial\Omega)^3$ für alle $r \in [1,\infty)$.

Aufgrund von Lemma 1.7 und Definition 4.1 bedeutet dies:

$$\vec{V}(.,\vec{\Psi})|\partial\Omega \in W^{2-1/r,r}(\partial\Omega)^3, \text{ für } r \in [1,\infty).$$ ||

Beweis: Nach Lemma 8.1 ist $\vec{\Psi}$ Lipschitz-stetig. Damit folgt die Behauptung aus Lemma 8.3.

□

Lemma 8.4: Sei $\vec{\Psi} \in C^0(\partial\Omega)^3$ mit $0 = \vec{\Psi}+\vec{T}^*(\vec{\Psi})$. Sei $r \in (3/2,\infty)$. Dann ist $Q(.,\vec{\Psi})|U \in W^{1,r}(U)$.

(Die Menge U wurde in Definition 7.1 eingeführt. Zu $Q(.,\vec{\Psi})$ siehe Definition 4.1.)

Beweis: Wir erinnern, daß $U \equiv K_S(0)\setminus\bar{\Omega}$, mit S aus Definition 7.1. Sei

$$L:\mathbb{R}^3\setminus\{0\} \ni z \to |z|^{-1} \in \mathbb{R}.$$

Sei $\gamma \in \{1,2,3\}$. Setze

$$M_\gamma:\mathbb{R}^3 \ni x \to \int_{\partial\Omega} L(x-y)\cdot\Psi_\gamma(y)\, d\Omega(y) \in \mathbb{C}$$

Nach Korollar 8.1 ist $M_\gamma|\partial\Omega \in W^{2-1/r,r}(\partial\Omega)$. Weiter ist $M_\gamma|\mathbb{R}^3\setminus\partial\Omega \in C^\infty(\mathbb{R}^3\setminus\partial\Omega)$. Wegen $\partial K_S(0) \subset \mathbb{R}^3\setminus\partial\Omega$ folgt:

$$M_\gamma|\partial K_S(0) \in W^{2-1/r,r}(\partial K_S(0)) \quad \text{(siehe Lemma 7.14).}$$

Jetzt hat man (siehe (7.30)):

$$M_\gamma|\partial U \in W^{2-1/r,r}(\partial U).$$

Es ist $M_\gamma \in C^0(\mathbb{R}^3)$ nach Lemma 6.1; also: $M_\gamma|\bar{U} \in C^0(\bar{U})$. Schließlich gilt für $x \in U$:

$$\Delta_x M_\gamma(x) = \int_{\partial\Omega} \Delta_x(L(x-y))\cdot\Psi_\gamma(y)\, d\Omega(y) = 0.$$

Aus Lemma 7.12 folgt nun: $M_\gamma|U \in W^{2,r}(U)$. Dies gilt für $\gamma \in \{1,2,3\}$, so daß $\sum_{\gamma=1}^{3} D_\gamma M_\gamma|U \in W^{1,r}(U)$. Für $x \in U$ ist aber

$$\sum_{\gamma=1}^{3} D_\gamma M_\gamma(x) = \int_{\partial\Omega} \sum_{\gamma=1}^{3} \partial/\partial x_\gamma L(x-\eta)\cdot\Psi_\gamma(\eta)\, d\Omega(\eta) = Q(x,\vec{\Psi}), \quad -4\pi$$

so daß die Behauptung folgt. □

Lemma 8.5: Sei $r \in (3/2,\infty)$, $\vec{f} \in L_1(\mathbb{R}^3)^3 \cap L_r(\mathbb{R}^3)^3$. Sei $\vec{u}(\vec{f})$ die in Satz 1.4 definierte Funktion.

Dann gibt es $\vec{v}(\vec{f}) \in [\vec{u}(\vec{f})]$ mit $\vec{v}(\vec{f}) \in C^0(\mathbb{R}^3)^3$. Es ist $\vec{v}(\vec{f})|\partial\Omega$ aus $C^\rho(\partial\Omega)^3$ für ein $\rho \in (0,1)$; ferner gilt: $\vec{v}(\vec{f})|\partial\Omega \in W^{2-1/r,r}(\partial\Omega)^3$.

Zu $r \in (3/2,\infty)$, $t \in (3,\infty)$, mit $t \geq r$ gibt es $M_1(r,t) > 0$, so daß für $\vec{f} \in L_1(\mathbb{R}^3)^3 \cap L_r(\mathbb{R}^3)^3$ gilt:

$$\|\vec{v}(\vec{f})|\partial\Omega\|_{2-1/r,r} \cancel{\leq \|\vec{v}(\vec{f})|\partial U\|_{2-1/r,r}}$$

$$\leq M_1(r,t)\cdot No(t,r)(\vec{f}),$$

wobei wir zur Abkürzung folgende Schreibweise verwenden:

$$No(t,r)(\vec{f}) := \|\vec{f}\|_{(1/t+2/3)^{-1}} + \|\vec{f}\|_{(1/r+1/3)^{-1}} + \|f\|_r.$$

Beweis: Sei $r \in (3/2,\infty)$, $t \in (3,\infty)$ mit $t \geq r$, $\vec{f} \in L_1(\mathbb{R}^3)^3 \cap L_r(\mathbb{R}^3)^3$.

Wir betrachten für $k \in \mathbb{N}_0$ die Funktion $\vec{u}(\vec{f})|K_{S+k}(0)$, wobei S in Definition 7.1 eingeführt wurde. Wir stellen für $k \in \mathbb{N}_0$ fest:

$$\|\vec{u}(\vec{f})|K_{S+k}(0)\|_r$$

$$\leq Vol(K_{S+k}(0))^{1/r-1/t}\cdot\|\vec{u}(\vec{f})|K_{S+k}(0)\|_t$$

$$\leq M_{1,1}(r,t,k)\cdot\|\vec{f}\|_{(1/t+2/3)^{-1}}$$

(mit $M_{1,1}(r,t,k) := (\mathrm{Vol}(K_{S+k}))^{1/r-1/t}\cdot 9\cdot P_6(t)$;
siehe (1.29)).

Weil außerdem nach (1.30), (1.31) gilt:

$$\|D_l\vec{u}(\vec{f})|K_{S+k}(0)\|_r \leq 9\cdot P_7(r)\cdot\|\vec{f}\|_{(1/r+1/3)^{-1}},$$

$$\|D_mD_l\vec{u}(\vec{f})|K_{S+k}(0)\|_r \leq 9\cdot P_{10}(r)\cdot\|\vec{f}\|_r$$

für $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq l,m \leq 3$, folgt für $k \in \mathbb{N}$:

(8.39) $\|\vec{u}(\vec{f})|K_{S+k}(0)\|_{2,r} \leq M_{1,2}(r,t,k)\cdot No(t,r)(\vec{f})$

(mit $M_{1,2}(r,t,k) := M_{1,1}(r,t,k) + 9\cdot P_7(r) + 9\cdot P_{10}(r)$).

Wegen $r > 3/2$ gibt es nach [A], 5.4 (9), (10) eine Zahl $\rho \in (0,1)$, und zu $k \in \mathbb{N}$ eine Funktion $\vec{v}_k \in C^\rho(\overline{K_{S+k}(0)})^3$ mit $\vec{v}_k|K_{S+k}(0) = \vec{u}(\vec{f})|K_{S+k}(0)$ f.ü. Das bedeutet zunächst einmal:

$$\vec{v}_l|\overline{K_{S+k}(0)} = \vec{v}_k \text{ f.ü. für } l,k \in \mathbb{N},\ l > k.$$

Weil $\vec{v}_l$ und $\vec{v}_k$ stetig sind, gilt die vorangehende Gleichung auch ohne den Zusatz "f.ü.". Damit gibt es eine stetige Funktion $\vec{v}(\vec{f}) \in C^0(\mathbb{R}^3)^3$ mit $\vec{v}(\vec{f})|\overline{K_{S+k}(0)} = v_k$ für $k \in \mathbb{N}$. Das heißt:

$$\vec{v}(\vec{f}) = u(\vec{f}) \text{ f.ü.},\ \vec{v}(\vec{f})|\overline{K_{S+k}(0)} \in C^\rho(\overline{K_{S+k}(0)})^3 \text{ für } k \in \mathbb{N}.$$

Insbesondere ist $\vec{v}(\vec{f})|\partial\Omega \in C^\rho(\partial\Omega)^3$. Schließlich folgt aus (8.39), wegen $U \equiv K_S(0)\setminus\overline{\Omega}$: $\vec{v}(\vec{f})|U \in W^{2,r}(U)$, und

(8.40) $\|\vec{v}(\vec{f})|U\|_{2,r} \leq M_{1,2}(r,t,0)\cdot No(t,r)(\vec{f})$.

Nach Satz 2.1 ist $[v_j(\vec{f})|\partial U] = R_U([v_j(\vec{f})|U])$, und nach Satz 2.2 gilt: $R_U([v_j(\vec{f})|U]) \in W^{2-1/r,r}(\partial\Omega)$,

$$\|R_U([v_j(\vec{f})|U])\|_{2-1/r,r} \leq R_{\mathcal{B}_U}(U,2,r)\cdot\|[v_j(\vec{f})|U]\|_{2,r} \quad (1 \leq j \leq 3),$$

mit $\mathcal{B}_U$ aus Definition 7.2.

Hieraus und aus (8.40) folgt: $\vec{v}(\vec{f})|\partial U \in W^{2-1/r,r}(\partial U)^3$;

$$\|\vec{v}(\vec{f})|\partial U\|_{2-1/r,r} \leq M_1(r,t)\cdot No(t,r)(\vec{f})$$

(mit $M_1(r,t) := 3\cdot M_{1,2}(r,t,0)\cdot R_{\mathcal{B}_U}(U,2,r)$).

Die Abschätzung

$$\|\vec{v}(\vec{f})|\partial\Omega\|_{2-1/r,r} \leq \|\vec{v}(\vec{f})|\partial U\|_{2-1/r,r}$$

gilt nach Auswahl der Beschreibungen von $\partial\Omega$ und ∂U in Definition 7.2 (siehe (7.30)). Lin ß2 von □

Lemma 8.6: Zu $r \in (3/2,\infty)$, $\vec{b} \in W^{2-1/r,r}(\partial\Omega)^3 \cap C^0(\partial\Omega)^3$ gibt es $\vec{\Psi} \in W^{2-1/r,r}(\partial\Omega)^3 \cap C^0(\partial\Omega)^3$ mit

(8.41) $\vec{b} - \sum_{m=1}^{6} c_m(\vec{b})\cdot\vec{V}(\cdot,\vec{\Psi}_{(m)}) = (-1/2)\cdot(\vec{\Psi}+\vec{T}^*(\vec{\Psi}))$. L

(Die Funktion $c: C^0(\partial\Omega)^3 \to \mathbb{C}^6$ wurde in Lemma 6.12 definiert. $\vec{\Psi}_{(1)},\ldots,\vec{\Psi}_{(6)}$ wurden vor Lemma 6.12 ausgewählt.)

Zu $r \in (3/2,\infty)$ gibt es $M_2(r) > 0$, so daß für $\vec{b} \in W^{2-1/r,r}(\partial\Omega)^3 \cap C^0(\partial\Omega)^3$ und für $\vec{\Psi}$ wie in (8.41) gilt:

$$\|D_\alpha(\vec u(\vec\Psi,\vec B)|\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega)\|_r + \|D_\beta\pi(\vec\Psi,\vec B)\|_r$$

$$\le M_2(r)\cdot(\|\vec\Psi\|_r + \|\vec B\|_{2-1/r,r})$$

$(\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^3$ mit $1\le|\alpha|_*\le 2,\ |\beta|_*\le 1)$;

$$|\vec u(\vec\Psi,\vec B)|_0 \le M_2(r)\cdot(\|\vec\Psi\|_r+\|\vec B\|_{2-1/r,r}).$$

(Die Funktionen $\vec u(\vec\Psi,\vec B)$, $\pi(\vec\Psi,\vec B)$ wurden in Satz 6.4 eingeführt.)

Weiterhin gilt: $D_l(u_j(\vec\Psi,\vec B)|\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega)$, $\pi(\vec\Psi,\vec B)\in L_2(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega)$ $(1\le j,l\le 3)$.

Schließlich gibt es zu $s\in(3,\infty)$ eine Zahl $M_3(r,s)>0$, so daß für $\vec B,\vec\Psi$ wie eben gilt:

$$\|\vec u(\vec\Psi,\vec B)|\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega\|_s \le M_3(r,s)\cdot(\|\vec\Psi\|_r+\|\vec B\|_{2-1/r,r}).$$

Beweis: Sei $r,\vec B$ gegeben wie im Lemma. Nach Auswahl von $\vec\Psi_{(k)}$ gilt: $\vec\Psi_{(k)}+\vec T^*(\vec\Psi_{(k)})=0$ $(1\le k\le 6)$; siehe dazu Lemma 6.10 und Definition 5.2. Aus Korollar 8.1 folgt:

$$\vec V(.,\vec\Psi_{(k)})|\partial\Omega\in W^{2-1/r,r}(\partial\Omega)^3 \quad (1\le k\le 6).$$

Aufgrund von Lemma 6.1 weiß man:

$$\vec V(.,\vec\Psi_{(k)})|\partial\Omega\in C^\sigma(\partial\Omega)^3 \text{ für } 1\le k\le 6,\ \sigma\in(0,1).$$

Nach Lemma 2.5 gibt es $\alpha\in(0,1)$ mit $\vec B\in C^\alpha(\partial\Omega)^3$. (Beachte, daß bereits vorausgesetzt ist: $\vec B\in C^0(\partial\Omega)^3$.) Jetzt folgt für $\gamma_1,\dots,\gamma_6\in\mathbb{C}$:

$$\vec B-\sum_{m=1}^{6}\gamma_m\cdot\vec V(.,\vec\Psi_{(m)})\in W^{2-1/r,r}(\partial\Omega)^3\cap C^\alpha(\partial\Omega)^3.$$

Zu $m\in\{1,\dots,6\}$ kürzen wir ab: $c_m:=c_m(\vec B)$.

Nach Satz 6.4 gibt es $\vec\Psi\in C^0(\partial\Omega)^3$, so daß (8.41) erfüllt ist. Weil die linke Seite in (8.41) zu $C^\alpha(\partial\Omega)^3$ gehört, wie eben begründet, folgt aus Lemma 5.4: $\vec\Psi\in C^\alpha(\partial\Omega)^3$. Nun erhält man aus Lemma 7.8: $\vec\Psi\in W^{2-1/r,r}(\partial\Omega)^3$, sowie:

$$\|\vec\Psi\|_{2-1/r,r}\le R_5(r)\cdot(\|\vec B-\sum_{m=1}^{6}c_m\cdot\vec V(.,\Psi_{(m)})|\partial\Omega\|_{2-1/r,r}+\|\Psi\|_r). \quad L\vec\Psi$$

Daraus folgt mit (6.36):

$$(8.42)\quad \|\vec\Psi\|_{2-1/r,r}\le M_{2,1}(r)\cdot(\|\vec B\|_{2-1/r,r}+\|\vec\Psi\|_r)$$

$$\left(\text{mit } M_{2,1}(r):=R_5(r)\cdot\left(1+\sum_{m=1}^{6}L_6(r)\cdot\|\vec V(.,\vec\Psi_{(m)})|\partial\Omega\|_{2-1/r,r}\right)\right).$$

Nach Lemma 7.15 gilt:

$$\|\Pi(.,\vec\Psi)|U\|_{1,r}\le R_{11}(r)\cdot\|\vec\Psi\|_{2-1/r,r}.$$

Nach Lemma 8.4 ist $\|Q(.,\vec\Psi_{(m)})|U\|_{1,r}<\infty$ für $1\le m\le 6$. Beachtet man noch (6.36), so folgt:

$$\|\pi(\vec\Psi,\vec B)|U\|_{1,r}\le M_{2,2}(r)\cdot(\|\vec B\|_r+\|\Psi\|_{2-1/r,r})$$

$$\left(\text{mit } M_{2,2}(r):=R_{11}(r)+\sum_{m=1}^{6}L_6(r)\cdot\|Q(.,\vec\Psi_{(m)})|U\|_{1,r}\right).$$

Setzt man $M_{2,3}(r):=M_{2,2}(r)\cdot(1+M_{2,1}(r))$, so erhält man mit (8.42):

$$(8.43)\quad \|\pi(\vec\Psi,\vec B)|U\|_{1,r}\le M_{2,3}(r)\cdot(\|\vec B\|_{2-1/r,r}+\|\vec\Psi\|_r) < \infty.$$

Weil $\vec{u}(\vec{\Psi},\vec{B})\,|\,\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega} \in C^\infty(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})^3$, gilt nach Lemma 7.14:

$$\vec{u}(\vec{\Psi},\vec{B})\,|\,\partial K_S(0) \in W^{2-1/r,r}(\partial K_S(0))^3.$$

Gemäß Satz 6.4 ist

(8.44) $\vec{u}(\vec{\Psi},\vec{B})\,|\,\partial\Omega = \vec{B} \in W^{2-1/r,r}(\partial\Omega)^3$.

Jetzt folgt aus (7.30): $\vec{u}(\vec{\Psi},\vec{B})\,|\,\partial U \in W^{2-1/r,r}(\partial U)^3$. Wegen (8.43), (8.44) und der Differentialgleichung, die von $\vec{u}(\vec{\Psi},\vec{B})$ erfüllt wird (siehe Satz 6.4), kann man nun Lemma 7.12 anwenden und erhält:

(8.45) $\|\vec{u}(\vec{\Psi},\vec{B})\,|\,U\|_{2,r} \le R_9(U,r)\cdot(\|\nabla\pi(\vec{\Psi},\vec{B})\,|\,U\|_{1,r} + \|\vec{u}(\vec{\Psi},\vec{B})\,|\,\partial U\|_{2-1/r,r})$.

Es ist aber

$$\|\vec{u}(\vec{\Psi},\vec{B})\,|\,\partial K_S(0)\|_{2-1/r,r}$$

$$\le R_{10}(r)\cdot 3\cdot \max_{1\le j\le 3} \sum_{\substack{a\in\mathbb{N}_0^3\\ |a|_*\le 2}} |D_a\big(u_j(\vec{\Psi},\vec{B})\,|\,\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}\big)\,|\,\partial K_S(0)|_0$$

(siehe Lemma 7.14)

$$\le R_{10}(r)\cdot 3\cdot \sum_{\substack{a\in\mathbb{N}_0^3\\ |a|_*\le 2}} S^{-|a|_*-1}\cdot L_8(r)\cdot(\|\vec{\Psi}\|_r+\|\vec{B}\|_r)$$

(gemäß Satz 6.4; beachte: $S > L_7$; siehe Definition 7.1)

$$\le M_{2,4}(r)\cdot(\|\vec{\Psi}\|_r+\|\vec{B}\|_r)$$

(mit $M_{2,4}(r) := 3\cdot R_{10}(r)\cdot L_8(r)\cdot \sum_{\substack{a\in\mathbb{N}_0^3\\ |a|_*\le 2}} S^{-|a|_*-1}$).

Mit (8.44) und (7.30) erhält man jetzt:

(8.46) $\|u(\vec{\Psi},\vec{B})\,|\,\partial U\|_{2-1/r,r} \le M_{2,5}(r)\cdot(\|\vec{B}\|_{2-1/r,r}+\|\vec{\Psi}\|_r)$

(mit $M_{2,5}(r) := 1 + M_{2,4}(r)$).

(8.43) und (8.46) setzt man in (8.45) ein. Es ergibt sich:

(8.47) $\|\vec{u}(\vec{\Psi},\vec{B})\,|\,U\|_{2,r} \le M_{2,6}(r)\cdot(\|\vec{B}\|_{2-1/r,r}+\|\vec{\Psi}\|_r)$

(mit $M_{2,6}(r) := R_9(U,r)\cdot(M_{2,3}(r)+M_{2,5}(r))$.

Weil es nach [A], 5.4(8) eine Zahl $M_{2,7}(r) > 0$ gibt mit

$$|\varphi|_0 \le M_{2,7}(r)\cdot\|\varphi\|_{2,r} \text{ für } \varphi \in W^{2,r}(U)\cap C^0(U),$$

folgt insbesondere

(8.48) $|u(\vec{\Psi},\vec{B})\,|\,U|_0 \le M_{2,8}(r)\cdot(\|\vec{B}\|_{2-1/r,r}+\|\vec{\Psi}\|_r)$

(mit $M_{2,8}(r) := M_{2,7}(r)\cdot M_{2,6}(r)$).

Für $\beta\in\mathbb{N}_0^3$ mit $|\beta|_*\le 2$, $t\in\mathbb{R}$ mit $t > 3/(|\beta|_*+1)$, $j\in\{1,2,3\}$ ist

(8.49) $\|D_\beta(u_j(\vec{\Psi},\vec{B})\,|\,\mathbb{R}^3\setminus\overline{K_S(0)})\|_t$

$\le L_8(r)\cdot(\|\vec{\Psi}\|_r+\|\vec{B}\|_r)\cdot\left(\int_{\mathbb{R}^3\setminus K_S(0)}|y|^{-t\cdot(|\beta|_*+1)}\,dy\right)^{1/t}$

(siehe Satz 6.4)

$\le M_{2,9}(r,t,|\beta|_*)\cdot(\|\vec{\Psi}\|_r+\|\vec{B}\|_r)$

(mit $M_{2,9}(r,t,\nu):=L_8(r)\cdot\left(4\cdot\pi\cdot(t\cdot(\nu+1)-3)^{-1}\cdot S^{-t\cdot(\nu+1)+3}\right)^{1/t}$,

für $\nu\in\{0,1,2\}$).

Ebenso findet man zu $\beta\in\mathbb{N}_0^3$ mit $|\beta|_*\le 1$, $t\in\mathbb{R}$ mit $t>3/(|\beta|_*+2)$ eine Zahl $M_{2,10}(r,t,|\beta|_*)>0$ mit

(8.50) $\|D_\beta(\pi(\vec{\Psi},\vec{B})\,|\,\mathbb{R}^3\setminus\overline{K_S(0)})\|_t\le M_{2,10}(r,t,|\beta|_*)\cdot(\|\vec{\Psi}\|_r+\|\vec{B}\|_r)$.

Jetzt folgt für $j,k\in\{1,2,3\}$:

$\|D_k(u_j(\vec{\Psi},\vec{B})\,|\,\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega})\|_r+\|\pi(\vec{\Psi},\vec{B})\|_r$

$\le\|D_k(u_j(\vec{\Psi},\vec{B})\,|\,U)\|_r+\|D_k(u_j(\vec{\Psi},\vec{B})\,|\,\mathbb{R}^3\setminus\overline{K_S(0)})\|_r$

$+\ \|\pi(\vec{\Psi},\vec{B})\,|\,U\|_r+\|\pi(\vec{\Psi},\vec{B})\,|\,\mathbb{R}^3\setminus K_S(0)\|_r$

$\le M_{2,11}(r)\cdot(\|\vec{\Psi}\|_r+\|\vec{B}\|_{2-1/r,r})$

(mit $M_{2,11}(r):=M_{2,6}(r)+M_{2,9}(r,r,1)+M_{2,3}(r)+M_{2,10}(r,r,0)$;

mit (8.43), (8.47), (8.49), (8.50)).

Entsprechend findet man für $j,k,l\in\{1,2,3\}$:

$\|D_lD_k(u_j(\vec{\Psi},\vec{B})\,|\,\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}\|_r+\|D_k\pi(\vec{\Psi},\vec{B})\|_r$

$\le M_{2,12}(r)\cdot(\|\vec{\Psi}\|_r+\|\vec{B}\|_{2-1/r,r})$

(mit $M_{2,12}(r):=M_{2,6}(r)+M_{2,9}(r,r,2)+M_{2,3}(r)+M_{2,10}(r,r,1)$;

wegen (8.43), (8.47), (8.49), (8.50)).

Für $s\in(3,\infty)$, $j\in\{1,2,3\}$ ist

$\|u_j(\vec{\Psi},\vec{B})\,|\,\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}\|_s\le M_3(r,s)\cdot(\|\vec{\Psi}\|_r+\|\vec{B}\|_{2-1/r,r})$

(mit $M_3(r,s):=M_{2,8}(r)\cdot\mathrm{Vol}(U)^{1/t}+M_{2,9}(r,s,0)$;

wegen (8.48) und (8.49)).

Schließlich haben wir für $j\in\{1,2,3\}$:

$|u_j(\vec{\Psi},\vec{B})|_0$

$\le M_{2,8}(r)\cdot(\|\vec{B}\|_{2-1/r,r}+\|\vec{\Psi}\|_r)+L_8(r)\cdot(\|\vec{\Psi}\|_r+\|\vec{B}\|_r)\cdot S^{-1}$

(wegen (8.48) und Satz 6.4)

$\le M_{2,13}(r)\cdot(\|\vec{\Psi}\|_r+\|\vec{B}\|_{2-1/r,r})$

(mit $M_{2,13}(r):=M_{2,8}(r)+L_8(r)\cdot S^{-1}$).

Die im Lemma behaupteten Abschätzungen folgen nun mit

$M_2(r):=3\cdot(M_{2,11}(r)+M_{2,12}(r)+M_{2,13}(r))$, und mit M_3 wie oben.

Sei $j,l \in \{1,2,3\}$. Wir zeigen noch, daß $D_l(u_j(\vec{\Psi},\vec{B})\,|\,\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})$ und $\pi(\vec{\Psi},\vec{B})$ zu $L_2(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})$ gehören:

Abschätzung (8.49) gilt mit $t=2$, $\beta=e_l$. Ebenso gilt (8.50) mit $t=2$, $\beta=0$. Also haben wir

$$D_l(u_j(\vec{\Psi},\vec{B})\,|\,\mathbb{R}^3\setminus K_S(0)),\ \pi(\vec{\Psi},\vec{B})\,|\,\mathbb{R}^3\setminus K_S(0) \in L_2(\mathbb{R}^3\setminus K_S(0)).$$

Von (8.43) und (8.47) weiß man:

$$D_l(u_j(\vec{\Psi},\vec{B})\,|\,U),\ \pi(\vec{\Psi},\vec{B})\,|\,U \in W^{1,r}(U).$$

Nun gilt aber im Fall $r\le 2$ wegen [A], 5.4(4): $W^{1,r}(U)\subset L_2(U)$. Im Fall $r\ge 2$ ist klar, da U beschränkt ist: $W^{1,r}(U)\subset W^{1,2}(U)$. In jedem Fall gilt also:

$$D_l(u_j(\vec{\Psi},\vec{B})\,|\,U),\ \pi(\vec{\Psi},\vec{B})\,|\,U \in L_2(U).$$

□

Definition 8.1: Zu $r\in(3/2,\infty)$, $\vec{f}\in L_r(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})^3 \cap L_1(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})^3$, $\vec{a}\in W^{2-1/r,r}(\partial\Omega)^3$ sei

$$L^r_{\Omega,au}(\vec{f},\vec{a}) := \Big\{(\vec{u},\pi)\in C^0(\mathbb{R}^3\setminus\Omega)\times W^{1,r}(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})\ \Big|$$

Die schwachen Ableitungen $D_k(u_j\,|\,\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})$, $D_lD_k(u_j\,|\,\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})$ existieren für $1\le j,k,l\le 3$, und es gilt:

$-\nu\cdot\Delta(\vec{u}\,|\,\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}) + \nabla\pi = \vec{f}$ f.ü.;

$\operatorname{div}(\vec{u}\,|\,\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}) = 0$ f.ü.,

$\vec{u}\,|\,\partial\Omega = \vec{a}$ f.ü.;

$D_k(u_j\,|\,\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})$, $D_lD_k(u_j\,|\,\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})$, π, $D_k\pi \in L_r(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})$,

$D_k(u_j\,|\,\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})$, $\pi \in L_2(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})$,

für $1\le j,k,l\le 3$;

$\vec{u}\in L_t(\mathbb{R}^3\setminus\Omega)^3$ für $t\in(3,\infty)$.$\Big\}$.

Die Elemente von $L^r_{\Omega,au}(\vec{f},\vec{a})$ sind also Lösungen des Stokes-Problems im Außenraum, mit rechter Seite $\vec{f}$ und Randwerten $\vec{a}$. Der nächste Satz zeigt, daß $L^r_{\Omega,au}(\vec{f},\vec{a})$ nicht leer ist.

Satz 8.1: Sei $r\in(3/2,\infty)$, $\vec{f}\in L_r(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})^3\cap L_1(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})^3$, $\vec{a}\in W^{2-1/r,r}(\partial\Omega)^3$. Sei $\vec{g}$ die triviale Fortsetzung von $\vec{f}$ auf $\mathbb{R}^3$. Sei $\tilde{\vec{a}}\in C^0(\partial\Omega)^3$ mit $\tilde{\vec{a}}=\vec{a}$ f.ü. (siehe Lemma 2.5).

Es gibt $\vec{\Psi}\in W^{2-1/r,r}(\partial\Omega)^3\cap C^0(\partial\Omega)^3$ mit

$$(8.51)\quad -\vec{V}(\vec{g})\,|\,\partial\Omega + \tilde{\vec{a}} - \sum_{m=1}^{6} c_m(-\vec{V}(\vec{g})\,|\,\partial\Omega+\tilde{\vec{a}})\cdot\vec{V}(.,\vec{\Psi}_{(m)})\,|\,\partial\Omega$$
$$= (-1/2)\cdot(\vec{\Psi}+T^*(\vec{\Psi})).$$

Für solche Funktionen $\vec{\Psi}$ ist

$$\Big(\vec{V}(\vec{g})+\vec{u}(\vec{\Psi},-\vec{V}(\vec{g})\,|\,\partial\Omega+\tilde{\vec{a}}),\ \pi(\vec{g})+\pi(\vec{\Psi},-\vec{V}(\vec{g})\,|\,\partial\Omega+\tilde{\vec{a}})\Big)\in L^r_{\Omega,au}(\vec{f},\vec{a}).$$

($\vec{V}(\vec{g})$ wurde in Lemma 8.5 eingeführt; $\pi(\vec{g})$ in Satz 1.4; $c: C^0(\partial\Omega)^3\to\mathbb{C}^6$ in Lemma 6.12; $\vec{u}(\vec{\Psi},-\vec{V}(\vec{g})\,|\,\partial\Omega+\tilde{\vec{a}})$, $\pi(\vec{\Psi},-\vec{V}(\vec{g})\,|\,\partial\Omega+\tilde{\vec{a}})$ in Satz 6.4. Die Funktionen $\vec{\Psi}_{(1)},\dots,\vec{\Psi}_{(6)}$ wurden vor Lemma 6.12 fixiert.)

Es gilt folgende Eindeutigkeitaussage:

Sind $(\vec{w}_1, p_1), (\vec{w}_2, p_2) \in L^r_{\Omega,a\mathrm{u}}(\vec{f},\vec{a})$, so ist $\vec{w}_1 = \vec{w}_2$, $p_1 = p_2$ f.ü.

Schließlich hat man folgende Abschätzungen:

Zu $r \in (3/2,\infty)$, $s,t \in (3,\infty)$ mit $t \geq r$ gibt es Zahlen $M_4(r,t) > 0$, $M_5(r,s,t) > 0$, so daß für $\vec{f} \in L_r(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega})^3 \cap L_1(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega})$, $\vec{a} \in W^{2-1/r,r}(\partial\Omega)^3$, sowie für $(\vec{w},p) \in L^r_{\Omega,a\mathrm{u}}(\vec{f},\vec{a})$, $j,k,l \in \{1,2,3\}$ gilt:

$$(8.51') \quad \|D_k(w_j|\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega})\|_r + \|D_l D_k(w_j|\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega})\|_r + \|p\|_r + \|D_k p\|_r$$

$$\leq M_4(r,t) \cdot (No(t,r)(\vec{f}) + \|\vec{a}\|_{2-1/r,r});$$

$$\|w_j|\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}\|_s$$

$$\leq M_5(r,s,t) \cdot (No(t,r)(\vec{f}) + \|\vec{a}\|_{2-1/r,r} + \|\vec{f}\|_{(1/s+2/3)^{-1}}).$$

(Die Abkürzung $No(t,r)(f)$ wurde in Lemma 8.5 eingeführt.)

Beweis: Seien $\vec{f},\vec{a},\vec{g},\vec{\tilde{a}}$ wie im Satz gegeben. Nach Lemma 8.5 gibt es $\rho_1 \in (0,1)$ mit $-\vec{v}(\vec{g})|\partial\Omega \in C^{\rho_1}(\partial\Omega)^3$. Gemäß Lemma 2.5 gibt es $\rho_2 \in (0,1)$, so daß $\vec{\tilde{a}} \in C^{\rho_2}(\partial\Omega)^3$. Schließlich weiß man von Lemma 6.1:

$$\sum_{m=1}^{6} c_m(-\vec{v}(\vec{g})|\partial\Omega + \vec{\tilde{a}}) \cdot \vec{V}(\cdot,\vec{\Psi}_{(m)})|\partial\Omega \in C^{\rho}(\partial\Omega)^3$$

für alle $\rho \in (0,1)$. Zusammen folgt: Es gibt $\rho \in (0,1)$, so daß

$$-\vec{v}(\vec{g})|\partial\Omega + \vec{\tilde{a}} - \sum_{m=1}^{6} c_m(-\vec{v}(\vec{g})|\partial\Omega + \vec{\tilde{a}}) \cdot \vec{V}(\cdot,\vec{\Psi}_{(m)})|\partial\Omega \in C^{\rho}(\partial\Omega)^3.$$

Da diese Funktion außerdem aus $W^{2-1/r,r}(\partial\Omega)^3$ ist (Lemma 8.5, Korollar 8.1), existiert somit nach (6.35) und Satz 7.2 eine Funktion $\vec{\Psi}_0 \in C^{\rho}(\partial\Omega)^3 \cap W^{2-1/r,r}(\partial\Omega)^3$, welche sowohl (8.51) als auch folgende Abschätzung erfüllt:

$$(8.52) \quad \|\vec{\Psi}_0\|_{2-1/r,r} \leq R'_7(r) \cdot \|-\vec{v}(\vec{g})|\partial\Omega + \vec{\tilde{a}}\|_{2-1/r,r}.$$

Im Folgenden sei $\vec{\Psi}$ eine beliebige Funktion aus $W^{2-1/r,r}(\partial\Omega)^3 \cap C^0(\partial\Omega)^3$, für welche (8.51) zutrifft. Die Gültigkeit von (8.52) setzen wir nicht voraus.

Wir setzen zur Abkürzung

$$\vec{u} := \vec{v}(\vec{g})|\mathbb{R}^3 \setminus \Omega + \vec{u}(\vec{\Psi}, -\vec{v}(\vec{g})|\partial\Omega + \vec{\tilde{a}}),$$
$$\pi := \pi(\vec{g})|\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega} + \pi(\vec{\Psi}, -\vec{v}(\vec{g})|\partial\Omega + \vec{\tilde{a}}).$$

Dann folgt aus Satz 6.4, 1.4 I), sowie aus Lemma 8.5, 8.6:

$$\vec{u} \in C^0(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega)^3; \; \vec{u} \in \bigcap_{t \in (3,\infty)} L_r(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega)^3;$$

die schwachen Ableitungen $D_l(u_j|\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega})$, $D_m D_l(u_j|\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega})$, $D_l\pi$ existieren, und es gilt:

$$D_l(u_j|\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}), \pi \in L_r(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}) \cap L_2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega});$$

$$D_m D_l(u_j|\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}), D_l\pi \in L_r(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}) \qquad (1 \leq j,l,m \leq 3).$$

Insbesondere ist also $\pi \in W^{1,r}(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega})$.

Ferner ergibt sich aus (8.51) und Satz 6.4: $\vec{u}|\partial\Omega = \vec{\tilde{a}}$. Weiterhin weiß man von Satz 1.4 I), 6.4 und Lemma 6.5:

$$- \nu \cdot \Delta(\vec{u}|\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega) + \nabla\pi = \vec{g}|\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega = \vec{f} \text{ f.ü.},$$
$$\operatorname{div}(u|\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega) = 0 \text{ f.ü.}$$

Zusammen haben wir also: $(\vec{u},\pi) \in L^r_{\Omega,au}(\vec{f},\vec{a})$.

Als nächstes zeigen wir die im Satz behauptete Eindeutigkeitsaussage. Sei also $(\vec{v}_1,p_1),(\vec{v}_2,p_2) \in L^r_{\Omega,au}(\vec{f},\vec{a})$. Setze $\vec{v} := \vec{v}_1-\vec{v}_2$, $\pi := p_1-p_2$. Dann ist $\vec{v} \in C^0(\mathbb{R}^3\setminus\Omega)$ mit $\vec{v}|\partial\Omega = 0$; ferner gilt:

$$\vec{v}|\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega \in L_t(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega) \text{ für } t \in (3,\infty),$$
$$D_k(v_j|\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega), D_lD_k(v_j|\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega), \pi, D_k\pi \in L_r(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega),$$
$$D_k(v_j|\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega), \pi \in L_2(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega), \text{ für } 1 \le j,k,l \le 3;$$

(8.53) $- \nu\cdot\Delta(\vec{v}|\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega) + \nabla\pi = 0$ f.ü., $\operatorname{div}(\vec{v}|\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega) = 0$ f.ü.

Sei $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Dann gibt es $R > 0$ mit $(\mathrm{Tr}\ \varphi)\cup\bar\Omega \subset K_R(0)$. Die Menge $\Omega' := K_R(0)\setminus\bar\Omega$ ist ein beschränktes Gebiet mit C^2-Berandung; es ist $\partial\Omega' = \partial\Omega \cup \partial K_R(0)$. Weiter gilt für $j \in \{1,2,3\}$:

$$(v_j\cdot\zeta)|\overline{\Omega'} \in C^0(\overline{\Omega'}),\quad (v_j\cdot\zeta)|\Omega' \in W^{2,r}(\Omega'),\quad (v_j\cdot\zeta)|\partial\Omega' = 0.$$

Schließlich ist $D_k(v_j|\Omega')$ und $\pi|\Omega'$ aus $W^{1,r}(\Omega')$ $(1 \le j,k \le 3)$. Jetzt kann man Lemma 7.13 anwenden und erhält für $1 \le j,k \le 3$:

$$\int_{\Omega'} D_kD_k(v_j|\Omega')\cdot v_j\cdot\zeta\, dx = - \int_{\Omega'} D_k(v_j|\Omega')\cdot D_k(v_j\cdot\zeta|\Omega')\, dx,$$

$$\int_{\Omega'} D_k(\pi|\Omega')\cdot v_j\cdot\zeta\, dx = - \int_{\Omega'} \pi\cdot D_k(v_j\cdot\zeta|\Omega')\, dx.$$

Wegen $\mathrm{Tr}\ \zeta \cap \mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega \subset \Omega'$ bedeutet dies, für $1 \le j,k \le 3$:

$$\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega} D_kD_k(v_j|\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega)\ v_j\cdot\zeta\, dx =$$
$$= - \int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega} \left\{(D_k(v_j|\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega))^2\cdot\zeta + D_k(v_j|\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega)\cdot v_j\cdot D_k\zeta\right\} dx,$$

$$\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega} D_k\pi\cdot v_j\cdot\zeta\, dx =$$
$$= - \int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega} \left\{\pi\cdot D_k(v_j|\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega)\cdot\zeta + \pi\cdot v_j\cdot D_k\zeta\right\} dx.$$

Wir bemerken nun, daß $D_k(v_j|\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega)$, $\pi \in L_2(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega)$, $v_j|\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega \in L_t(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega)$ für $t \in (3,\infty)$, sowie $v_j \in C^0(\mathbb{R}^3\setminus\Omega)$. Insbesondere gilt:

$$v_j\cdot D_kD_k(v_j|\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega), v_j\cdot D_k\pi \in L_{1,loc}(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega) \quad (1 \le j,k \le 3).$$

Beachtet man noch (8.53), so kann man Lemma 1.11 anwenden und erhält: $\vec{v} = 0$ f.ü., $\pi = 0$ f.ü. Somit gilt: $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$ f.ü., $p_1 = p_2$ f.ü. Wegen der Stetigkeit von $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ heißt das: $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$.

Zu zeigen bleiben die im Lemma behaupteten Abschätzungen. Seien also $(\vec{u},\pi) \in L^r_{\Omega,au}(\vec{f},\vec{a})$. Ferner sei $\vec{\Psi}_0$ die zu Beginn des Beweises ausgewählte Funktion aus $W^{2-1/r,r}(\partial\Omega)^3 \cap C^\rho(\partial\Omega)^3$. $\vec{\Psi}_0$ erfüllt also (8.51) und (8.52). Damit gilt nach dem ersten Teil des Beweises:

$$\left(\vec{v}(\vec{g})+\vec{u}(\vec{\Psi}_0,-\vec{v}(\vec{g})|\partial\Omega+\vec{\vec{a}}),\ \pi(\vec{g})+\pi(\vec{\Psi}_0,-\vec{v}(\vec{g})|\partial\Omega+\vec{\vec{a}})\right) \in L^r_{\Omega,au}(\vec{f},\vec{a}).$$

Aufgrund der eben bewiesenen Eindeutigkeitsaussage ist damit

$$\vec{u} = \vec{v}(\vec{g}) + \vec{u}(\vec{\Psi}_o, -\vec{v}(\vec{g})\,|\,\partial\Omega + \vec{a}),$$

$$\pi = \pi(\vec{g}) + \pi(\vec{\Psi}_o, -\vec{v}(\vec{g})\,|\,\partial\Omega + \vec{a}) \quad \text{f.ü.}$$

Nun kann man $\vec{u}, \pi$ mit (8.52), Lemma 8.5, 8.6 und Satz 1.4 I) abschätzen. Man stellt zunächst fest:

$$(8.54)\quad \| u_j \,|\, \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega} \|_s \leq 3 \cdot P_6(s) \cdot \|\vec{g}\|_{(1/s+2/3)^{-1}}$$

$$+ M_3(r,s) \cdot (\|\vec{\Psi}_o\|_r + \| -\vec{v}(\vec{g})\,|\,\partial\Omega + \vec{a}\|_{2-1/r,r})$$

für $s \in (3,\infty)$, $1 \leq j \leq 3$; siehe (1.29) und Lemma 8.6.

Weiter folgert man aus (1.30), (1.31) und Lemma 8.6:

$$(8.55)\quad \| D_l(u_j \,|\, \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}) \|_r + \|\pi\|_r$$

$$\leq 3 \cdot P_7(r) \cdot \|\vec{g}\|_{(1/r+1/3)^{-1}} + M_2(r) \cdot (\|\vec{\Psi}_o\|_r + \| -\vec{v}(\vec{g})\,|\,\partial\Omega + \vec{a}\|_{2-1/r,r})$$

für $1 \leq l, j \leq 3$;

$$(8.56)\quad \| D_m D_l(u_j \,|\, \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}) \|_r + \| D_l \pi \|_r$$

$$\leq P_{10}(r) \cdot \|\vec{g}\|_r + M_2(r) \cdot (\|\vec{\Psi}_o\|_r + \| -\vec{v}(\vec{g})\,|\,\partial\Omega + \vec{a}\|_{2-1/r,r})$$

für $1 \leq j, l, m \leq 3$.

Nach Lemma 8.5 ist aber für $t \in (3,\infty)$, $t \geq r$:

$$(8.57)\quad \| -\vec{v}(\vec{g})\,|\,\partial\Omega \|_{2-1/r,r} \leq M_1(r,t) \cdot No(t,r)(\vec{f}).$$

Mit (8.52) folgt für $t \in (3,\infty)$, $t \geq r$:

$$(8.58)\quad \|\vec{\Psi}_o\|_r \leq M_{4,1}(r,t) \cdot (No(t,r)(\vec{f}) + \|\vec{a}\|_{2-1/r,r})$$

(mit $M_{4,1}(r,t) := R_7^{!}(r) \cdot (M_1(r,t)+1)$).

(8.58) und (8.59) setzt man nun in (8.54)-(8.56) ein. Es folgt für $s,t \in (3,\infty)$ mit $t \geq r$, $1 \leq j,l,m \leq 3$:

$$\| D_l(u_j \,|\, \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}) \|_r + \| D_m D_l(u_j \,|\, \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}) \|_r + \|\pi\|_r + \| D_l \pi \|_r$$

$$\leq M_4(r,t) \cdot (No(t,r)(\vec{f}) + \| a \|_{2-1/r,r})$$

(mit $M_4(r,t) := 3 \cdot P_7(r) + P_{10}(r) + 2 \cdot M_2(r) \cdot (M_1(r,t) + M_{4,1}(r,t))$),

sowie:

$$\| u_j \,|\, \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega} \|_s \leq M_5(r,s,t) \cdot (No(t,r)(\vec{f}) + \|\vec{a}\|_{2-1/r,r} + \|\vec{f}\|_{(1/s+2/3)^{-1}})$$

(mit $M_5(r,s,t) := 3 \cdot P_6(s) + M_3(r,s) \cdot (M_1(r,t) + M_4(r,t))$). □

Wie man aus Satz 8.1 ersieht, unterscheiden sich die L_p-Abschätzungen im Außenraumfall wesentlich von den entsprechenden Abschätzungen, die sich im Innenraumfall ergaben (Satz 7.4).

Ist nämlich $r \in (3/2,\infty)$, $\vec{f} \in L_1(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega})^3 \cap L^r(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega})^3$, $\vec{a} \in W^{2-1/r,r}(\partial\Omega)^3$, sowie $(\vec{u},\pi) \in L^r_{\Omega,au}(\vec{f},\vec{a})$, so fallen vor allem zwei Eigenschaften auf: Erstens gibt Satz 8.1 nur dann eine Abschätzung von $\|\vec{u}\|_r$, wenn $r > 3$ ist. Zum zweiten tritt auf der rechten Seite von (8.51') nicht nur die L_r-Norm von $\vec{f}$ auf, sondern es erscheint auch die L_s-Norm von $\vec{f}$ mit Zahlen s, die <u>kleiner</u> sind als r. Wir haben diese Besonderheiten in der Einleitung bereits angesprochen, und geben nun die dort angekündigten Gegenbeispiele.

Zur ersten Eigenschaft läßt sich leicht ein Beispiel angeben, welches zeigt, daß im allgemeinen $\|\vec{u}\|_r = \infty$ gilt für $r \in [1,3]$. Man betrachte nämlich den Fall

$$\Omega = K_1((2,0,0)), \quad \vec{g} = (\chi_{K_1(0)},0,0).$$

Dann ist $\vec{g} \in L_1(\mathbb{R}^3)^3 \cap L_3(\mathbb{R}^3)^3$. Wegen Lemma 8.5 hat man:

$$\vec{v}(\vec{g})\,|\,\partial\Omega \in W^{2-1/s,s}(\partial\Omega)^3 \quad \text{für } s \in [1,3].$$

Wir setzen nun

$$\vec{f} := \vec{g}\,|\,\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}, \quad \vec{a} := \vec{v}(\vec{f})\,|\,\partial\Omega.$$

Dann liefert Satz 1.4, Lemma 8.5 und die Eindeutigkeitsaussage in Satz 8.1:

$$(\vec{v}(\vec{f})\,|\,\mathbb{R}^3 \setminus \Omega,\ \pi(\vec{f})\,|\,\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}) \in L^s_{\Omega,au}(\vec{f},\vec{a}) \quad \text{für } s \in (3/2,3].$$

Andererseits gilt für fast alle $x \in \mathbb{R}^3 \setminus K_4(0) \subset \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$:

$$\begin{aligned} v_1(\vec{f})(x) &= \int_{K_1(0)} (8\cdot\pi\cdot\nu)^{-1}\cdot(|x-y|^{-1} + (x_1-y_1)^2\cdot|x-y|^{-3})\,dy \\ &\geq \int_{K_1(0)} (8\cdot\pi\cdot\nu)^{-1}\cdot|x-y|^{-1}\,dy \\ &\geq (4\cdot\pi\cdot\nu)^{-1} \int_{K_1(0)} |x|^{-1}\,dy \\ &= \tilde{c}\cdot|x|^{-1} \quad (\text{mit } \tilde{c} := (4\cdot\pi\cdot\nu)^{-1}\cdot \mathrm{Vol}(K_1(0))). \end{aligned}$$

Das bedeutet für $s \in [1,3]$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}} |v_1(\vec{f})(x)|^s\,dx &\geq \int_{\mathbb{R}^3 \setminus K_4(0)} |v_1(\vec{f})(x)|^s\,dx \\ &\geq \tilde{c}^s \cdot \int_{\mathbb{R}^3 \setminus K_4(0)} |x|^{-s}\,dx = \infty. \end{aligned}$$

Was die zweite Besonderheit angeht, auf die wir oben hingewiesen haben, nämlich die niedrigeren L_p-Normen von $\vec{f}$ auf der rechten Seite von (8.52'), so wollen wir zeigen, daß diese niedrigeren Normen nicht beseitigt werden können:

<u>Lemma 8.7:</u> <u>Es gibt keine Zahl</u> $c \in (0,\infty)$ <u>mit folgender Eigenschaft:</u>

(8.59) <u>Für alle</u> $\vec{f} \in L_1(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega})^3 \cap L_2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega})^3$ <u>und für</u> $(\vec{u},\pi) \in L^2_{\Omega,au}(\vec{f},0)$, $1 \leq k,j \leq 3$ <u>ist</u>

$$\|D_k u_j\,|\,\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}\|_2 \leq c\cdot\|\vec{f}\|_2.$$

<u>Beweis:</u> Sei $R_o \in (1 \vee L_7, \infty)$ mit L_7 aus Satz 6.4, so groß gewählt, daß

(8.60) $R^{0,6} - L_7^{0,6} \geq R^{0,6}/2$ für $R \geq R_o$.

Sei $R \in (R_o, \infty)$. Wir definieren eine Funktion $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, indem wir für $y \in \mathbb{R}^3$ ansetzen:

$\varphi(y) := |y|^{-2,4}$, falls $L_7 \leq |y| \leq R$; $\varphi(y) := 0$ sonst.

Zu $j \in \{1,2,3\}$, $x \in \mathbb{R}^3$ sei

$$\vec{f}^{(j)}(x) = (\varphi(x) \cdot \delta_{ij})_{1 \leq i \leq 3}.$$

Dann ist $\vec{f}^{(j)} \in L_1(\mathbb{R}^3)^3 \cap L_2(\mathbb{R}^3)^3$, und $\vec{f}^{(j)}$ ist die triviale Fortsetzung von $\vec{f}^{(j)} | \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$ auf den $\mathbb{R}^3$ (beachte: $\bar{\Omega} \subset K_{L_7}(0)$).

Wie im Beweis zu Satz 8.1 erläutert, gibt es eine Funktion $\vec{\psi}_o^{(j)} \in W^{3/2,2}(\partial\Omega)^3 \cap C^0(\partial\Omega)^3$, die sowohl (8.51) als auch die Abschätzung

(8.61) $\|\vec{\psi}_o^{(j)}\|_{3/2,2} \leq R_7'(2) \cdot \|\vec{v}(\vec{f}^{(j)}) | \partial\Omega\|_{3/2,2}$

erfüllt $(1 \leq j \leq 3)$. R_7' wurde in Satz 7.2 eingeführt.

Sei nun

$$(\vec{u}^{(j)}, \pi^{(j)}) \in L^2_{\Omega,au}(\vec{f}^{(j)} | \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}, 0) \quad (1 \leq j \leq 3).$$

Dann folgt nach Satz 8.1, für $1 \leq j \leq 3$:

(8.62) $\vec{u}^{(j)} = \vec{v}(\vec{f}^{(j)}) + \vec{u}\left(\vec{\psi}_o^{(j)}, -\vec{v}(\vec{f}^{(j)}) | \partial\Omega\right)$.

Für fast alle $x \in \mathbb{R}^3$ ist nach Satz 1.4, Lemma 8.5:

$$\sum_{j=1}^{3} v_j(\vec{f}^{(j)})(x) = \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} E_{jj}(x-y)\varphi(y)\,dy$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3} (8 \cdot \pi \cdot \nu)^{-1} \cdot (|x-y|^{-1} + (x_j - y_j)^2 \cdot |x-y|^{-3}) \cdot \varphi(y)\,dy$$

$$= (2 \cdot \pi \cdot \nu)^{-1} \cdot \int_{K_R(0) \setminus K_{L_7}(0)} |x-y|^{-1} \cdot |y|^{-2,4}\,dy.$$

Für $x \in \mathbb{R}^3$ mit $|x| \geq 4 \cdot R$ hat man also:

(8.63) $D_3\left(\sum_{j=1}^{3} v_j(\vec{f}^{(j)})\right)(x) =$

$$= (-2 \cdot \pi \cdot \nu)^{-1} \cdot \int_{K_R(0) \setminus K_{L_7}(0)} (x_3 - y_3) \cdot |x-y|^{-3} \cdot |y|^{-2,4}\,dy.$$

Wir verwenden im folgenden die Abkürzung

(8.64) $Ke := \{x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} : x_3 \cdot |x|^{-1} \geq 1/2;\ |x| \geq 4 \cdot R\}$.

Für $x \in Ke$, $y \in \mathbb{R}^3$ mit $|y| \leq R$ ist

(8.65) $x_3 - y_3 = (x_3 \cdot |x|^{-1}) \cdot |x| - y_3 \geq |x|/2 - |y|$

$$\geq R \geq |x-y|/5 > 0;$$

(8.66) $|x-y| \leq |x| + R \leq 2 \cdot |x|$.

Jetzt folgt für $x \in Ke$:

(8.67) $$- D_3\Big(\sum_{j=1}^{3} v_j(\vec{f}^{(j)})\Big)(x)$$

$$\geq (10\cdot\pi\cdot\nu)^{-1}\cdot\int_{K_R(0)\setminus K_{L_7}(0)} |x-y|^{-2}\cdot|y|^{-2,4}\,dy$$

(wegen (8.63), (8.65))

$$\geq (40\cdot\pi\cdot\nu)^{-1}\cdot|x|^{-2}\cdot\int_{K_R(0)\setminus K_{L_7}(0)} |y|^{-2,4}\,dy \quad \text{(wegen (8.66))}$$

$$\geq c_1\cdot(R^{0,6}-L_7^{0,6})\cdot|x|^{-2}$$

(mit $c_1 := (40\cdot\pi\cdot\nu)^{-1}\cdot 4\cdot\pi\cdot 0,6^{-1}$)

$$\geq c_1\cdot(R^{0,6}/2)\cdot|x|^{-2} \quad \text{(siehe (8.60))}.$$

Damit ergibt sich folgende Abschätzung:

(8.68) $$\Big(\int_{Ke} \Big|D_3\Big(\sum_{j=1}^{3} v_j(\vec{f}^{(j)})\Big)(x)\Big|^2\,dx\Big)^{1/2}$$

$$\geq (c_1/2)\cdot R^{0,6}\cdot\Big(\int_{\mathbb{R}^3\setminus K_{4\cdot R}(0)} \chi_{(1/2,\infty)}(x_3\cdot|x|^{-1})\cdot|x|^{-4}\,dx\Big)^{1/2}$$

(mit (8.67), (8.64))

$$= (c_1/2)\cdot R^{0,6}\cdot\Big(2\cdot\pi\cdot\int_{4\cdot R}^{\infty}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \chi_{(1/2,\infty)}(\sin\theta)\cdot r^{-2}\cdot\cos\theta\,d\theta\,dr\Big)^{1/2}$$

(Übergang zu Polarkoordinaten; siehe [RT3], 80.8, 80.10)

$$= (c_1/2)\cdot R^{0,6}(c_2\cdot R^{-1})^{1/2}$$

(mit $c_2 := (\pi/2)\cdot\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \chi_{(1/2,\infty)}(\sin\theta)\cdot\cos\theta\,d\theta$;

beachte: $c_2 > 0$)

$$= c_3\cdot R^{0,1} \quad (\text{mit } c_3 := (c_1/2)\cdot c_2^{1/2}).$$

Wir stellen weiter fest:

(8.69) $$\Big(\int_{Ke} \Big|\sum_{j=1}^{3} u_j\Big(\vec{\psi}_0^{(j)}, -\vec{v}(\vec{f}^{(j)})|\partial\Omega\Big)(x)\Big|^2\,dx\Big)^{1/2}$$

$$\leq L_8(2)\cdot\sum_{j=1}^{3}\big(\|\vec{\psi}_0^{(j)}\|_2 + \|\vec{v}(\vec{f}^{(j)})|\partial\Omega\|_2\big)$$

$$\cdot\Big(\int_{\mathbb{R}^3\setminus K_{4\cdot R}(0)} |x|^{-4}\,dx\Big)^{1/2}$$

(siehe (6.38); beachte: $R \geq R_0 \geq L_7$)

$$\leq L_8(2)\cdot(R_7'(2)+1)\cdot\sum_{j=1}^{3}\|\vec{v}(\vec{f}^{(j)})|\partial\Omega\|_2\cdot(\pi\cdot R^{-1})^{1/2}$$

(wegen (8.61)

$$\leq c_4\cdot R^{-1/2}\cdot\sum_{j=1}^{3}\|\vec{v}(\vec{f}^{(j)})|\Omega\|_{1,2}$$

(mit $c_4 := L_8(2)\cdot(R_7'(2)+1)\cdot\pi^{1/2}\cdot R_\beta(\Omega,1,2)$;

nach Satz 2.1, 2.2)

$$\leq c_4 \cdot R^{-1/2} \cdot \sum_{j=1}^{3} \Big(\mathrm{Vol}(\Omega)^{1/4} \cdot \| \vec{v}(\vec{f}^{(j)}) \,|\, \Omega \|_4 + \sum_{k=1}^{3} \| D_k \vec{v}(\vec{f}^{(j)}) \|_2 \Big)$$

$$\leq c_5 \cdot R^{-1/2} \cdot \sum_{j=1}^{3} \big(\| \vec{f}^{(j)} \|_{12/11} + \| \vec{f}^{(j)} \|_{6/5} \big)$$

(mit $c_5 := c_4 \cdot \sqrt{3} \cdot 3 \cdot (P_6(4) \cdot \mathrm{Vol}(\Omega)^{1/4} + 3 \cdot P_7(2))$;

mit (1.29), (1.30))

$$= 3 \cdot c_5 \cdot R^{-1/2} \cdot \big(\| \varphi \|_{12/11} + \| \varphi \|_{6/5} \big)$$

$$\leq 3 \cdot c_5 \cdot R^{-1/2} \cdot \Big(\big(4 \cdot \pi \cdot \int_{L_7}^{R} r^{-2{,}4 \cdot 12/11 + 2} \, dr\big)^{11/12} + \big(4 \cdot \pi \cdot \int_{L_7}^{R} r^{-2{,}4 \cdot 6/5 + 2} \, dr\big)^{5/6} \Big)$$

$$\leq c_6 \cdot R^{-1/2} \cdot \big(R^{0{,}35} + R^{0{,}1} \big)$$

(mit $c_6 := 3 \cdot c_5 \cdot \Big(\big(4 \cdot \pi \cdot (-2{,}4 \cdot 12/11 + 3)^{-1}\big)^{11/12} + \big(4 \cdot \pi \cdot (-2{,}4 \cdot 6/5 + 3)^{-1}\big)^{5/6} \Big)$

$$\leq c_7 \cdot R^{-0{,}15} \quad (\text{mit } c_7 := 2 \cdot c_6; \text{ beachte: } R \geq 1).$$

Sei nun angenommen, daß es eine Zahl c mit Eigenschaft (8.59) gibt. Zusammen mit den bisherigen Ergebnissen erhalten wir dann:

$$(8.70) \quad c_3 \cdot R^{0{,}1} \leq \Big(\int_{Ke} \Big| D_3 \Big(\sum_{j=1}^{3} v_j(\vec{f}^{(j)}) \Big)(x) \Big|^2 \, dx \Big)^{1/2}$$

(siehe (8.68))

$$= \Big(\int_{Ke} \Big| D_3 \Big(\sum_{j=1}^{3} \big(u_j^{(j)} + u_j(\vec{\Psi}_0^{(j)}, -\vec{v}(\vec{f}^{(j)}) \,|\, \partial\Omega)\big) \Big)(x) \Big|^2 \, dx \Big)^{1/2}$$

(wegen (8.62))

$$\leq c \cdot \sum_{j=1}^{3} \| \vec{f}^{(j)} \|_2 + c_7 \cdot R^{-0{,}15} \quad (\text{siehe } (8.59),\ (8.69))$$

$$= 3 \cdot c \cdot \| \varphi \|_2 + c_7 \cdot R^{-0{,}15}$$

$$= 3 \cdot c \cdot \Big(\int_{K_R(0) \setminus K_{L_7}(0)} |y|^{-4{,}8} \, dy \Big)^{1/2} + c_7 \cdot R^{-0{,}15}$$

$$\leq 3 \cdot c \cdot \big(4 \cdot \pi \cdot (1{,}8)^{-1}\big)^{1/2} \cdot L_7^{-0{,}9} + c_7 \cdot R^{-0{,}15}.$$

Hierbei sind die Konstanten c, c_7 von R unabhängig. Weil Abschätzung (8.70) aber für alle $R \in (R_0, \infty)$ gilt, hat sich ein Widerspruch ergeben. □

§ 9. Der Stokes-Operator im Außenraum ist selbstadjungiert

Zunächst zitieren wir einige Ergebnisse über homogene Sobolevräume und einen Satz zur Helmholtz-Zerlegung von L_2-Räumen. Dabei berufen wir uns auf [SiSo1] und [SiSo2].

Definition 9.1: Sei

$$\mathcal{H}^{1,2}(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega) := \Big\{u \in L_{2,loc}(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega):\ \text{Die schwachen Ableitungen } D_i u \text{ existieren und gehören zu } L_2(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega),\ \text{für } 1 \le i \le n.\Big\}.$$

Ferner sei

$$\mathcal{H}_0^{1,2}(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega) := \Big\{u \in \mathcal{H}^{1,2}(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega):\ \text{Es gibt eine Folge } (\phi_k) \text{ in } C_0^\infty(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega),\ \text{so daß } \|D_i u - D_i\phi_k\|_2 \to 0\ (k\to\infty),\ \text{für } 1\le i\le 3, \text{ und } \|(u-\phi_k)\,|K_R(0)\setminus\bar\Omega\|_2 \to 0\ (k\to\infty),\ \text{für } R>0.\Big\}.$$

Schließlich setzen wir

$$\tilde H_0^{1,2}(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega) := \{[f]:\ f \in \mathcal{H}_0^{1,2}(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega)\}.$$

(Das Symbol [ ] bezeichnet Äquivalenzklassen in $F_{\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega}$ bezüglich der Relation "fast überall"; siehe § 2.)

Nach [SiSo1] wird der Raum $H_0^{1,2}(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega)$ zu einem Hilbertraum, wenn

man als Skalarprodukt von zwei Elementen F,G aus $\tilde H_0^{1,2}(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega)$ den Ausdruck

$$\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega} \sum_{i=1}^{3} D_i f\cdot D_i g\,dx, \quad \text{mit } f\in F,\ g\in G$$

ansetzt. Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der Repräsentanten $f\in F$, $g\in G$.

Satz 9.1 (Poincaré-Ungleichung): Zu $R>0$ mit $\bar\Omega \subset K_R(0)$ gibt es eine Konstante $C(\Omega,R)>0$, so daß für $u \in W^{1,2}(K_R(0)\setminus\bar\Omega)$ mit

$$\int_{K_R(0)\setminus\bar\Omega} u\,dx = 0$$

gilt:

$$\|u\|_2 \le C(\Omega,R)\cdot\sum_{i=1}^{3}\|D_i u\|_2.$$

Beweis: Für $R\in(0,\infty)$ mit $\bar\Omega\subset K_R(0)$ ist $K_R(0)\setminus\bar\Omega$ ein C^1-berandetes, beschränktes Gebiet. Damit folgt der Satz aus [FJK], 5.11.3. □

Definition 9.2: Sei $R>0$ mit $\bar\Omega\subset K_R(0)$. Dann setzt man

$$\mathcal{H}^{1,2}(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega,R) := \Big\{u\in\mathcal{H}^{1,2}(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega):\ \int_{K_R(0)\setminus\bar\Omega} u\,dx = 0\Big\};$$

$$\tilde H^{1,2}(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega,R) := \Big\{[u]:\ u\in\mathcal{H}^{1,2}(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega,R)\Big\}.$$

Nach Satz 9.1 und [SiSo1] wird $\mathcal{H}^{1,2}(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega,R)$ zu einem Banachraum, L$\tilde{H}$ wenn man als Norm eines Elements $F\in\tilde H^{1,2}(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega,R)$ den Ausdruck

$(\sum_{i=1}^{3} \|D_i f\|_2^2)^{1/2}$, mit $f \in F$, wählt.

Man zeigt leicht, daß dieser Raum sogar ein Hilbertraum ist, wenn man als Skalarprodukt von zwei Elementen F,G aus $\tilde{H}^{1,2}(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega},\mathbb{R})$ den Ausdruck

$$\sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}} D_i f\cdot D_i g\, dx, \text{ mit } f \in F,\ g \in G,$$

ansetzt.

Wir werden später das folgende technische Lemma aus [SiSo1] benötigen:

Lemma 9.1: Sei $u \in \tilde{H}^{1,2}(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})$. Dann gibt es eine Folge (u_k) in $C^1(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})$, so daß $u_k(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}^3$ mit $|x| \geq 2k$ und

$$\sum_{i=1}^{3} \|D_i p - D_i p_k\|_2^2 \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Definition 9.3: Sei

$$H_2(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}) := \Big\{\vec{u} \in L_2(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})^3:\ \text{Es gibt eine Folge } (\vec{\phi}_k) \text{ in } C_0^\infty(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})^3, \text{ so daß } \operatorname{div}\vec{\phi}_k = 0 \text{ für } k \in \mathbb{N} \text{ und } \|\vec{\phi}_k - \vec{u}\|_2 \to 0 \quad (k \to \infty)\Big\};$$

$$H_2(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}) := \Big\{[\vec{u}]:\ \vec{u} \in H_2(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})\Big\}.$$

Nun können wir das angekündigte Ergebnis über die Helmholtz-Zerlegung von $L_2(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})^3$ formulieren:

Satz 9.2 (Helmholtz-Zerlegung): Der Raum $L_2(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})^3$ ist orthogonale Summe der Unterräume $H_2(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})$ und $\{[\nabla u]:\ u \in \tilde{H}^{1,2}(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})\}$.

Beweis: Siehe [SiSo2]. □

Wir kommen nun zum Beweis der Selbstadjungiertheit des Stokes-Operators im Außenraum. Wir beginnen mit einigen technischen Vorbereitungen.

Lemma 9.2: Sei $r \in (3/2,\infty)$, $\vec{g} \in L_1(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})^3 \cap L_r(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})^3$. Für $(\vec{u},\pi) \in L^r_{\Omega,au}(\vec{g},0)$ (siehe Definition 8.1) gilt dann:

$$\nu\cdot\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}} \sum_{i,j=1}^{3} |D_j(u_j|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})|^2\, dx = \int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}} \sum_{j=1}^{3} g_j\cdot u_j\, dx.$$

Beweis: Sei $i,j \in \{1,2,3\}$; sei $\rho \in \{\pi, D_i(u_j|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})\}$. Nach Definition von $L^r_{\Omega,au}(\vec{g},0)$ ist $\rho \in L_2(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})$.

Sei $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Sei $R > 0$ so groß, daß $\operatorname{Tr}\zeta \subset K_R(0)$. Dann ist

$$(u_j\cdot\zeta)|\overline{K_R(0)}\setminus\Omega \in C^0(\overline{K_R(0)}\setminus\Omega);$$

$$(u_j\cdot\zeta)|K_R(0)\setminus\bar{\Omega} \in W^{2,r}(K_R(0)\setminus\bar{\Omega});$$

$(\rho\cdot\zeta)|K_R(0)\setminus\bar{\Omega} \in W^{1,r}(K_R(0)\setminus\bar{\Omega})$;

$(u_j\cdot\zeta)|\partial(K_R(0)\setminus\bar{\Omega}) = 0.$

Jetzt folgt aus Lemma 7.13, für $1 \le l \le 3$:

$$\int_{K_R(0)\setminus\bar{\Omega}} D_l\rho\cdot\zeta\cdot u_j\,dx = -\int_{K_R(0)} \rho\cdot\left(D_l\varphi\cdot u_j + \varphi\cdot D_l(u_j|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})\right) dx.$$

Weil Tr $\varphi \subset K_R(0)$, heißt das für $1 \le l \le 3$:

$$(9.1)\quad \int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}} D_l\rho\cdot\varphi\cdot u_j\,dx = -\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}} \rho\cdot\left(D_l\varphi\cdot u_j + \varphi\cdot D_l(u_j|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})\right) dx.$$

Insbesondere gilt (9.1) für $\zeta = \zeta_k$, für $k \in \mathbb{N}$, wobei ζ_k in Lemma 1.6 definiert wurde.

Sei $\varepsilon \in (0,3)$, $s := 2\cdot(3+\varepsilon)/(1+\varepsilon)$. Dann ist $1/s + 1/(3+\varepsilon) + 1/2 = 1$ und $-s+3 < 0$.

Weiterhin ist

$u_j \in L_{3+\varepsilon}(\mathbb{R}^3\setminus\Omega)$,

$\pi, D_i(u_j|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}) \in L_2(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})$,

so daß für $n \in \mathbb{N}$, $1 \le l \le 3$ gilt:

$$\left|\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}} \rho\cdot D_l\zeta\cdot u_j\,dx\right| \le \|u_j\|_{3+\varepsilon}\cdot\|\rho\|_2\cdot\|\zeta_n\|_s$$

$$\le \|u_j\|_{3+\varepsilon}\cdot\|\rho\|_2\cdot P_4(s)^{1/s}\cdot n^{(-s+3)/s},$$

wobei die letzte Ungleichung aus Lemma 1.6 folgt. Wegen $-s+3 < 0$ bedeutet dies:

$$(9.2)\quad \int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}} \rho\cdot D_l\varphi_n\cdot u_j\,dx \to 0 \quad (n\to\infty).$$

Man findet nun für $n \in \mathbb{N}$:

$$(9.3)\quad \int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}} \sum_{j=1}^{3} g_j\cdot u_j\cdot\varphi_n\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}} \sum_{j=1}^{3} \left(-\nu\cdot\Delta(u_j|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})\cdot u_j\cdot\varphi_n + D_j\pi\cdot u_j\cdot\varphi_n\right) dx$$

$$= \nu\cdot\sum_{i,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}} \Big\{(D_i(u_j|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}))^2\cdot\zeta_n + D_i(u_j|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})\cdot u_j\cdot D_i\zeta_n\Big\}\,dx$$

$$-\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}} \Big\{\pi\cdot D_j(u_j|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})\cdot\zeta_n + \pi\cdot u_j\cdot D_j\zeta_n\Big\}\,dx$$

(wegen (9.1))

$$= \nu\cdot\sum_{i,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}} (D_i(u_j|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}))^2\cdot\zeta_n\,dx$$

$$+ \nu\cdot\sum_{i,j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}} D_i(u_j|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})\cdot u_j\cdot D_i\zeta_n\,dx$$

$$-\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}} \pi\cdot u_j\cdot\zeta_n\,dx$$

(beachte: $\operatorname{div}(u|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}) = 0$).

Es gilt: $D_i(u_j|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})$ $(1 \le i,j \le 3)$, $\zeta_n(x) \to 1$ $(n \to \infty)$ für $x \in \mathbb{R}^3$. Jetzt erhält man mit dem Konvergenzsatz von Lebesgue:

$$(9.4) \quad \int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}} (D_i(u_j|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}))^2 \cdot \zeta_n \, dx \to \int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}} (D_i(u_j|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}))^2 \, dx$$

$$(n \to \infty).$$

Ferner ist $\vec{u}|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega} \in \mathcal{L}_6(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})$ (wegen $\vec{u} \in \mathcal{L}^r_{\Omega,au}(\vec{g},0)$), so daß

$$\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}} \sum_{j=1}^{3} |g_j \cdot u_j| \, dx \le \sum_{j=1}^{3} \|u_j\|_6 \cdot \|g_j\|_{6/5} < \infty.$$

Hier wurde ausgenutzt, daß $\|g_j\|_{6/5} < \infty$ $(1 \le j \le 3)$, wie aus $\vec{g} \in \mathcal{L}_r(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})^3 \cap \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})^3$, $r > 3/2$ folgt. Somit liefert der Konvergenzsatz von Lebesgue:

$$(9.5) \quad \int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}} \sum_{j=1}^{3} g_j \cdot u_j \cdot \zeta_n \, dx \to \int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}} \sum_{j=1}^{3} g_j \cdot u_j \, dx \quad (n \to \infty).$$

Wegen (9.2), (9.4) und (9.5) folgt die Behauptung aus (9.3) durch Grenzübergang $n \to \infty$. $\square$

<u>Lemma 9.3:</u> <u>Es gibt</u> $K_1 > 0$, <u>so daß</u>

$$\|u\|_6 \le K_1 \cdot \|\nabla u\|_2 \quad \underline{\text{für}} \ u \in \tilde{\mathcal{H}}^{1,2}_0(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}).$$

<u>Zu</u> $u \in \tilde{\mathcal{H}}^{1,2}_0(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})$ <u>gibt es eine Folge</u> (φ_n) <u>in</u> $C_0^\infty(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})$, <u>so daß</u>

$$\|u-\varphi_n\|_6 + \|\nabla u - \nabla\varphi_n\|_2 \to 0 \quad (n \to \infty).$$

<u>Beweis:</u> Sei $u \in \tilde{\mathcal{H}}^{1,2}_0(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})$. Das bedeutet nach Definition 9.1: Es gibt eine Folge (φ_n) in $C_0^\infty(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})$, so daß

$$(9.6) \quad \|\nabla\varphi_n - \nabla u\|_2 \to 0 \quad (n \to \infty),$$

$$\|(\varphi_n - u)|K_R(0)\setminus\bar{\Omega}\|_2 \to 0 \ (n \to \infty) \ \text{für alle } R > 0.$$

Nach [Fr], Theorem I.9.3, mit $n=3$, $j=0$, $p=6$, $q=2$, $m=1$, $a=1$, $r=2$ gibt es $K_1 > 0$, so daß

$$(9.7) \quad \|\varphi\|_6 \le K_1 \cdot \|\nabla\varphi\|_2 \ \text{für} \ \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3).$$

Somit hat man:

$$\|\varphi_n - \varphi_m\|_6 \le K_1 \cdot \|\nabla(\varphi_n - \varphi_m)\|_2 \quad (m,n \in \mathbb{N}).$$

Daher konvergiert (φ_n) in $\mathcal{L}_6(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})^3$. Sei $v \in \mathcal{L}_6(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})$ der zugehörige Grenzwert. Sei $R > 0$ so groß, daß $\bar{\Omega} \subset K_R(0)$. Dann gilt (beachte (9.6)):

$$\|(v-\varphi_n)|K_R(0)\setminus\bar{\Omega}\|_2 \to 0,$$

$$\|(v-\varphi_n)|K_R(0)\setminus\bar{\Omega}\|_6 \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Somit gibt es eine streng monoton wachsende Abbildung $\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so daß

$$\varphi_{\sigma(n)}(x) \to u(x), \ \varphi_{\sigma(n)}(x) \to v(x) \quad (n \to \infty)$$

für fast alle $x \in K_R(0)\setminus\bar{\Omega}$.

Also ist $u|K_R(0)\setminus\overline{\Omega} = v|K_R(0)\setminus\overline{\Omega}$ f.ü. Weil dies für alle $R>0$ mit $\overline{\Omega}\subset K_R(0)$ gilt, folgt: $u=v$ f.ü. Wir haben also: $\|\phi_n-u\|_6 \to 0$ $(n\to\infty)$. Die Behauptung folgt nun aus (9.6) und (9.7). □

Lemma 9.4: Sei $u\in C^0(\mathbb{R}^3\setminus\Omega)$ mit $u|\partial\Omega=0$, $u|\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}\in L_6(\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega})$. Zu $l\in\{1,2,3\}$ soll die schwache Ableitung $D_l(u|\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega})$ existieren und zu $L_2(\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega})$ gehören. Dann ist $u|\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}\in\widetilde{\mathcal{H}}^{1,2}_0(\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega})$.

Sei $v\in C^0(\mathbb{R}^3\setminus\Omega)$ mit $v|\partial\Omega=0$ und $v|\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}\in W^{1,2}(\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega})$. Dann ist $v|\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}\in W^{1,2}_0(\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega})$.

Bemerkung: Die zweite Aussage von Lemma 9.4 folgt nicht direkt aus Satz 2.1, 2.3, denn $\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}$ ist nicht beschränkt.

Beweis: Sei $R>0$ mit $\overline{\Omega}\subset K_R(0)$. Sei $\zeta\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ mit $\zeta|K_{R+1}(0)=1$, $\zeta|\mathbb{R}^3\setminus K_{R+2}(0)=0$, $0\le\zeta\le 1$. Dann ist

$$(u\cdot\zeta)|K_{R+2}(0)\setminus\overline{\Omega}\in L_6(K_{R+2}(0)\setminus\overline{\Omega}),$$

insbesondere:

$$(u\cdot\zeta)|K_{R+2}(0)\setminus\overline{\Omega}\in L_2(K_{R+2}(0)\setminus\overline{\Omega}).$$

Weiter existiert $D_l((u\cdot\zeta)|K_{R+2}(0)\setminus\overline{\Omega})$ und ist gleich

$$D_l(u|K_{R+2}(0)\setminus\overline{\Omega})\cdot\zeta + (u\cdot D_l\zeta)|K_{R+2}(0)\setminus\overline{\Omega} \quad (1\le l\le 3).$$

Daraus erhält man:

$$D_l\Big((u\cdot\zeta)|K_{R+2}(0)\setminus\overline{\Omega}\Big)\in L_2(K_{R+2}(0)\setminus\overline{\Omega}) \quad (1\le l\le 3).$$

Es folgt:

$$(u\cdot\zeta)|K_{R+2}(0)\setminus\overline{\Omega}\in W^{1,2}(K_{R+2}(0)\setminus\overline{\Omega}).$$

Es ist klar:

$$(v\cdot\varphi)|K_{R+2}(0)\setminus\overline{\Omega}\in W^{1,2}(K_{R+2}(0)\setminus\overline{\Omega});$$ Lφ

$$(u\cdot\varphi)|\partial(K_{R+2}(0)\setminus\overline{\Omega}) = (v\cdot\varphi)|\partial(K_{R+2}(0)\setminus\overline{\Omega}) = 0.$$ Lφ

Jetzt erhält man aus Satz 2.1, 2.3: Es gibt Folgen $(\widetilde{\varphi}_n^{(u)})$, $(\widetilde{\varphi}_n^{(v)})$ in $C_0^\infty(K_{R+2}(0)\setminus\overline{\Omega})$ mit

$$\|(w\cdot\zeta)|K_{R+2}(0)\setminus\overline{\Omega} - \widetilde{\varphi}_n^{(w)}\|_{1,2}\to 0 \quad (n\to\infty), \text{ für } w\in\{u,v\}.$$

Sei $\varphi_n^{(w)}$ die triviale Fortsetzung von $\widetilde{\varphi}_n^{(w)}$ auf $\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}$, für $n\in\mathbb{N}$, $w\in\{u,v\}$. Dann ist $\varphi_n^{(w)}\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega})$, und es gilt:

(9.8) $\|w\cdot\zeta-\varphi_n^{(w)}\|_{1,2}\to 0$ $(n\to\infty)$, für $w\in\{u,v\}$.

Es ist

$$\mathrm{Tr}(w\cdot(1-\zeta))\subset\mathbb{R}^3\setminus K_{R+1}(0) \text{ für } w\in\{u,v\}.$$

Somit gibt es $\varepsilon_0\in(0,\infty)$, so daß mit den Bezeichnungen aus Lemma 1.3 gilt:

$$\mathrm{Tr}\Big((w\cdot(1-\zeta))_\varepsilon\Big)\subset\mathbb{R}^3\setminus K_R(0)\subset\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega} \text{ für } \varepsilon\in(0,\varepsilon_0],\ w\in\{u,v\}.$$

Das bedeutet für $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, $w\in\{u,v\}$:

$$(w\cdot(1-\zeta))_\varepsilon|\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}).$$

Aufgrund der Voraussetzungen an u und v ist klar:

(9.9) $\|u\cdot(1-\zeta)-(u\cdot(1-\zeta))_{\varepsilon}\|_6 \to 0$,

$\|v\cdot(1-\zeta)-(v\cdot(1-\zeta))_{\varepsilon}\|_2 \to 0$ für $\varepsilon\downarrow 0$.

Sei $l\in\{1,2,3\}$, $w\in\{u,v\}$. Die schwache Ableitung $D_l(w|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})$ existiert, also auch die schwache Ableitung $D_l(w\cdot(1-\zeta)|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})$, und diese ist gleich $D_l(w|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})\cdot(1-\zeta)-(w\cdot D_l\zeta)$. Hieraus folgt:

$$D_l\left(w\cdot(1-\zeta)|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}\right)\in L_2(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}).$$

Dies bedeutet:

$$\left\|\left(D_l\left(w\cdot(1-\zeta)|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}\right)\right)_{\varepsilon}-D_l\left(w\cdot(1-\zeta)|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}\right)\right\|_2\to 0 \quad (\varepsilon\downarrow 0).$$

Da $\mathrm{Tr}(1-\zeta)\subset\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}$, gibt es $\varepsilon_1>0$, so daß

$$\left(D_l\left(w\cdot(1-\zeta)|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}\right)\right)_{\varepsilon}=D_l((w\cdot(1-\zeta))_{\varepsilon}) \text{ für } 0<\varepsilon\le\varepsilon_1.$$

Somit gilt:

(9.10) $\left\|D_l\left((w\cdot(1-\zeta))_{\varepsilon}\right)-D_l\left(w\cdot(1-\zeta)|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}\right)\right\|_2\to 0 \quad (\varepsilon\downarrow 0).$

Sei nun $n_0\in\mathbb{N}$ so groß gewählt, daß $1/n_0<\min\{\varepsilon_0,\varepsilon_1\}$. Sei

$$\psi_n^{(w)}:=(w\cdot(1-\zeta))_{1/(n+n_0)}|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega} \text{ für } n\in\mathbb{N},\ w\in\{u,v\}.$$

Dann ist $\psi_n^{(w)}\in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})$, und aus (9.8)-(9.10) folgt:

(9.11) $\|(u-\psi_n^{(u)}-\varphi_n^{(u)})|K_T(0)\setminus\bar{\Omega}\|_2\to 0 \quad (n\to\infty)$ für $T>0$;

$\|D_l(u|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})-D_l(\varphi_n^{(u)}+\psi_n^{(u)})\|_2\to 0 \quad (n\to\infty)$ für $1\le l\le 3$;

$\|v|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}-(\varphi_n^{(v)}+\psi_n^{(v)})\|_{1,2}\to 0 \quad (n\to\infty)$.

Man beachte noch, daß $\varphi_n^{(w)}+\psi_n^{(w)}\in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})$ ($n\in\mathbb{N}$, $w\in\{u,v\}$). Aus den ersten beiden Zeilen von (9.11) erhält man damit (siehe Definition 9.1):

$$u|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}\in\tilde{H}_0^{1,2}(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}).$$

Die dritte Zeile von (9.11) liefert:

$$v|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}\in W_0^{1,2}(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}).$$

□

Sei nun eine Folge (ζ_k) in $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^3)$ mit

$$0\le\zeta_k\le 1,\ \zeta_k|K_{k-1}(0)=1,\ \mathrm{Tr}\ \zeta_k\subset K_k(0) \text{ für } k\in\mathbb{N}$$

fest gewählt.

Satz 9.3: Sei $k\in\mathbb{N}$, $\vec{f}\in L_2(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})^3$.

Für $\vec{u}\in\tilde{H}_0^{1,2}(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})^3$ ist

$$-\zeta_k\cdot\vec{u}+\zeta_k\cdot\vec{f}\in L_2(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})^3\cap L_1(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})^3.$$

Es gibt $\vec{u}_k\in C^0(\mathbb{R}^3\setminus\Omega)^3$, $\pi_k\in W^{1,2}(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})$ mit

$$\vec{u}_k|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}\in\tilde{H}_0^{1,2}(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})^3,$$

$$(\vec{u}_k, \pi_k) \in L^2_{\Omega,au}(-\zeta_k\cdot\vec{u}_k+\zeta_k\cdot\vec{f}_k, 0),$$

und mit

$$(9.12) \quad \nu\cdot\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}} \sum_{i,j=1}^{3} |D_i(u_{kj}|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})|^2\, dx +$$

$$+ (1/2)\cdot\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}} \sum_{j=1}^{3} \zeta_k\cdot u_{kj}^2\, dx \le (3/2)\cdot\|\vec{f}\|_2^2.$$

Beweis: O.E. sei $\vec{f} \neq 0$.

Sei $\vec{u} \in \tilde{H}^{1,2}_o(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})^3$. Dann gilt für $1 \le j \le 3$:

$$(9.13) \quad \|-\zeta_k\cdot u_j + \zeta_k\cdot f_j\|_2$$

$$\le \|-\zeta_k\cdot u_j|K_k(0)\setminus\bar{\Omega}\|_2 + \|f_j\|_2 \quad (\text{da } \mathrm{Tr}\ \zeta_k \subset K_k(0))$$

$$\le \mathrm{Vol}(K_k(0))^{1/3} \cdot \|-\zeta_k\cdot u_j|K_k(0)\setminus\bar{\Omega}\|_6 + \|f_j\|_2$$

$$\le \mathrm{Vol}(K_k(0))^{1/3} \cdot \|u_j\|_6 + \|f_j\|_2$$

$$\le A_1\cdot\|\nabla u_j\|_2 + \|f_j\|_2$$

(mit $A_1 := K_1\cdot\mathrm{Vol}(K_k(0))^{1/3}$; nach Lemma 9.3).

$< \infty$.

Weil die Abbildung $-\zeta_k\cdot\vec{u} + \zeta_k\cdot\vec{f}$ kompakten Träger hat, ist $-\zeta_k\cdot\vec{u} + \zeta_k\cdot\vec{f}$ somit aus $L_2(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})^3 \cap L_1(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})^3$. Also enthält

$L^2_{\Omega,au}(-\zeta_k\cdot\vec{u}+\zeta_k\cdot\vec{f}, 0)$ ein Element $(\vec{v}, \pi)$ (siehe Satz 8.1). Insbesondere bedeutet das: $\vec{v} \in C^0(\mathbb{R}^3\setminus\Omega)^3$, $\pi \in W^{1,2}(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})$. Wir setzen

$Tu := v$, $Su := \pi$.

Es gilt für $1 \le l, m, n \le 3$:

$$(9.14) \quad \|(T\vec{u}|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})_l\|_6 + \|D_m(T\vec{u}|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})_l\|_2 + \|D_n D_m(T\vec{u}|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})_l\|_2$$

$$\le (M_4(2,6)+M_5(2,6,6))\cdot\left(No(6,2)(-\zeta_k\cdot\vec{u}+\zeta_k\cdot\vec{f}) + \|-\zeta_k\cdot\vec{u}+\zeta_k\cdot\vec{f}\|_{6/5}\right)$$

(nach Satz 8.1)

$$\le A_2\cdot\|-\zeta_k\cdot\vec{u}+\zeta_k\cdot\vec{f}\|_2$$

(mit $A_2 := (M_4(2,6)+M_5(2,6,6))\cdot(\mathrm{Vol}(K_k(0))^{1/3}+1)\cdot 2$;

beachte: $\mathrm{Tr}\ \zeta_k \subset K_k(0)$.)

$$= A_2\cdot\left(\sum_{j=1}^{3} \|-\zeta_k\cdot u_j+\zeta_k\cdot f_j\|_2^2\right)^{1/2}$$

$$\le A_3\cdot\left(\sum_{j=1}^{3} (\|\nabla u_j\|_2+\|f_j\|_2)^2\right)^{1/2}$$

(mit $A_3 := A_2\cdot(A_1+1)$; wegen (9.13))

$< \infty$.

Es ist also

$Tu|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega} \in L_6(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})^3$, $D_l(Tu|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}) \in L_2(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})^3$,

für $1 \le l \le 3$.

Außerdem ist $T\vec{u} \in C^{0}(\mathbb{R}^{3}\setminus\Omega)$ und $(T\vec{u})\,|\,\partial\Omega = 0$ (siehe Satz 8.1). Jetzt folgt aus Lemma 9.4:

$$(T\vec{u})\,|\,\mathbb{R}^{3}\setminus\overline{\Omega} \in \tilde{H}_{0}^{1,2}(\mathbb{R}^{3}\setminus\overline{\Omega})^{3}.$$

Sei $(\vec{u}_{m})$ Folge in $\tilde{H}_{0}^{1,2}(\mathbb{R}^{3}\setminus\overline{\Omega})^{3}$; es gebe $K>0$, so daß

$$\Big(\sum_{j=1}^{3} \|\nabla u_{mj}\|_{2}^{2}\Big)^{1/2} \le K \text{ für } m \in \mathbb{N}.$$

Dann findet man für $m \in \mathbb{N}$, $1 \le j \le 3$:

$$\|u_{mj}\|_{6} \le K_{1}\cdot\|\nabla u_{mj}\|_{2} \qquad \text{(nach Lemma 9.3)}$$

$$\le K_{1}\cdot K.$$

Dies bedeutet für $m \in \mathbb{N}$, $1 \le j \le 3$:

$$\|u_{mj}\,|\,K_{k}(0)\setminus\overline{\Omega}\|_{2} \le \mathrm{Vol}(K_{k}(0))^{1/3} \cdot \|u_{mj}\,|\,K_{k}(0)\setminus\overline{\Omega}\|_{6}$$

$$\le \mathrm{Vol}(K_{k}(0))^{1/3}\cdot K_{1}\cdot K.$$

Somit ist für $m \in \mathbb{N}$, $1 \le j \le 3$:

$$\|u_{mj}\,|\,K_{k}(0)\setminus\overline{\Omega}\|_{1/2} \le (1+\mathrm{Vol}(K_{k}(0))^{1/3} \cdot K_{1})^{1/2}\cdot K.$$

Nach dem Auswahlsatz von Rellich (siehe etwa [A], 6.2(3)) gibt es damit eine streng monoton wachsende Abbildung $\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so daß die Folge $(\vec{u}_{\sigma(m)}\,|\,K_{k}(0)\setminus\overline{\Omega})$ in $L_{2}(K_{k}(0)\setminus\overline{\Omega})^{3}$ konvergiert.

Für $l,m \in \mathbb{N}$ ist aber

$$(T\vec{u}_{\sigma(m)} - T\vec{u}_{\sigma(l)}, S\vec{u}_{\sigma(m)} - S\vec{u}_{\sigma(l)}) \in L^{2}_{\Omega,au}(-\zeta_{k}\cdot(\vec{u}_{\sigma(m)}-\vec{u}_{\sigma(l)}),0).$$

Daher gilt für $l,m \in \mathbb{N}$, $1 \le j,l \le 3$:

$$\|D_{l}((T\vec{u}_{\sigma(m)} - T\vec{u}_{\sigma(l)})\,|\,\mathbb{R}^{3}\setminus\overline{\Omega})_{j}\|_{2}$$

$$\le A_{2}\cdot\|-\zeta_{k}\cdot(\vec{u}_{\sigma(m)}-\vec{u}_{\sigma(l)})\|_{2} \qquad \text{(vergleiche (9.14))}$$

$$\le A_{2}\cdot\|(\vec{u}_{\sigma(m)}-\vec{u}_{\sigma(l)})\,|\,K_{k}(0)\setminus\overline{\Omega}\|_{2} \qquad (\text{weil } \mathrm{Tr}\ \zeta_{k} \subset K_{k}(0)).$$

Somit konvergiert $([T\vec{u}_{\sigma(n)}\,|\,\mathbb{R}^{3}\setminus\overline{\Omega}])$ bezüglich der Norm von $\tilde{H}_{0}^{1,2}(\mathbb{R}^{3}\setminus\overline{\Omega})^{3}$ (siehe Definition 9.1).

Sei nun

$$\Gamma:\ \tilde{H}_{0}^{1,2}(\mathbb{R}^{3}\setminus\overline{\Omega})^{3} \to \tilde{H}_{0}^{1,2}(\mathbb{R}^{3}\setminus\overline{\Omega})^{3}$$

definiert durch

$$\Gamma(U) := [T\vec{u}\,|\,\mathbb{R}^{3}\setminus\overline{\Omega}] \text{ für } U \in \tilde{H}_{0}^{1,2}(\mathbb{R}^{3}\setminus\overline{\Omega})^{3},\ \vec{u} \in U.$$

Γ bildet tatsächlich in $\tilde{H}_{0}^{1,2}(\mathbb{R}^{3}\setminus\overline{\Omega})^{3}$ ab, denn wir hatten festgestellt:

$$T\vec{u}\,|\,\mathbb{R}^{3}\setminus\overline{\Omega} \in \tilde{H}_{0}^{1,2}(\mathbb{R}^{3}\setminus\overline{\Omega})^{3} \text{ für } \vec{u} \in \tilde{H}_{0}^{1,2}(\mathbb{R}^{3}\setminus\overline{\Omega})^{3}.$$

Weiterhin haben wir eben gezeigt, daß eine Teilfolge von $(T\vec{u}_{k}\,|\,\mathbb{R}^{3}\setminus\overline{\Omega})$ in $\tilde{H}_{0}^{1,2}(\mathbb{R}^{3}\setminus\overline{\Omega})^{3}$ konvergiert, sofern $(\vec{u}_{k})$ eine beschränkte Folge in $\tilde{H}_o^{1,2}(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})^3$ ist. Dies zeigt, daß mit Γ ein kompakter Operator auf dem Hilbertraum $\tilde{H}_o^{1,2}(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})^3$ definiert wurde.

Sei

$$M := \Big\{[\vec{u}] \;:\; \vec{u}\in\tilde{H}_o^{1,2}(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})^3, \quad \big(\sum_{j=1}^{3}\|\nabla u_j\|_2^2\big)^{1/2} < (3/(2\cdot\nu))^{1/2}\cdot\|\vec{f}\|_2\Big\}.$$

Sei ∂M der Rand von M im Hilbertraum $\tilde{H}_o^{1,2}(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})^3$. Das bedeutet:

$$(9.15)\quad \partial M = \Big\{[\vec{u}] \;:\; \vec{u}\in\tilde{H}_o^{1,2}(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})^3, \quad \big(\sum_{j=1}^{3}\|\nabla u_j\|_2^2\big)^{1/2} = (3/(2\cdot\nu))^{1/2}\cdot\|\vec{f}\|_2\Big\}.$$

Sei $\alpha\in(0,\infty)$, $U\in\partial M$ mit $\Gamma(U)=\alpha\cdot U$. Sei $\vec{v}\in U$. Dann gilt: $T\vec{v}|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega} = \alpha\cdot\vec{v}$ f.ü. Nach Lemma 9.2 ist

$$\nu\cdot\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}}\sum_{i,j=1}^{3}|D_i(T\vec{v}|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})_j|^2\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}}\sum_{j=1}^{3}(-\zeta_k\cdot v_j+\zeta_k\cdot f_j)\cdot(T\vec{v})_j\,dx,$$

woraus nach Auswahl von $\vec{v}$ folgt:

$$\nu\cdot\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}}\alpha^2\cdot\sum_{i,j=1}^{3}|D_iv_j|^2\,dx =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}}\alpha\cdot\sum_{j=1}^{3}\zeta_k\cdot(-v_j^2+f_j\cdot v_j)\,dx.$$

Das bedeutet:

$$\nu\cdot\alpha\cdot\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}}\sum_{i,j=1}^{3}|D_iv_j|^2\,dx + \sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}}\zeta_k\cdot v_j^2\,dx$$

$$= \sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}}\zeta_k\cdot f_j\cdot v_j\,dx$$

$$\le \sum_{j=1}^{3}\Big(\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}}(\zeta_k\cdot f_j)^2\,dx\Big)^{1/2}\cdot\Big(\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}}\zeta_k\cdot v_j^2\,dx\Big)^{1/2}$$

$$\le (1/2)\cdot\Big(\sum_{j=1}^{3}\big(\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}}f_j^2\cdot dx\big)^{1/2}\Big)^2 + (1/2)\cdot\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}}\sum_{j=1}^{3}\zeta_k\cdot v_j^2\,dx$$

$$\le (3/2)\cdot\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}}f_j^2\,dx + (1/2)\cdot\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}}\sum_{j=1}^{3}\zeta_k\cdot v_j^2\,dx$$

(mit 4.1).

Daraus folgt:

$$(9.16)\quad \alpha\cdot\nu\cdot\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}}\sum_{i,j=1}^{3}|D_iv_j|^2\,dx + (1/2)\cdot\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}}\sum_{j=1}^{3}\zeta_k\cdot v_j^2\,dx$$

$$\le (3/2)\cdot\|\vec{f}\|_2^2.$$

Somit gilt:

$$\sum_{j=1}^{3}\|\nabla v_j\|_2^2 \le 3/(2\cdot\alpha\cdot\nu)\cdot\|\vec{f}\|_2^2.$$

Wegen $[\vec{v}] = U \in \partial M$ ergibt sich jetzt (siehe (9.15)):

$$(9.17)\quad \sum_{j=1}^{3} \|\nabla v_j\|_2^2 \leq (1/\alpha)\cdot \sum_{j=1}^{3} \|\nabla v_j\|_2^2.$$

Wäre $\sum_{j=1}^{3} \|\nabla v_j\|_2^2 = 0$, so ergäbe sich wegen $\vec{f} \neq 0$ ein Widerspruch gegen $[\vec{v}] \in \partial M$. Somit ist $\sum_{j=1}^{3} \|\nabla v_j\|_2^2 \neq 0$. Damit erhält man aus (9.17): $1 \leq 1/\alpha$, also: $\alpha \leq 1$. Nach [D], S. 85, Satz 21.2 folgt: Es gibt $\tilde{U} \in \tilde{H}_0^{1,2}(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})^3$ mit $\Gamma(\tilde{U}) = \tilde{U}$.

Ist dann $\tilde{\vec{w}} \in \tilde{U}$, so hat man: $T\tilde{\vec{w}}|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega} = \tilde{\vec{w}}$ f.ü.

Sei $\vec{w} := T\tilde{\vec{w}}$, $\pi := S\tilde{\vec{w}}$. Dann ist $\vec{w} \in C^0(\mathbb{R}^3\setminus\Omega)^3$, $\pi \in W^{1,2}(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})$, mit $\vec{w}|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega} \in \tilde{H}_0^{1,2}(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})^3$ und $(\vec{w},\pi) \in L^2_{\Omega,au}(-\zeta_k\cdot\vec{w}+\zeta_k\cdot\vec{f},0)$. Diese Eigenschaften folgen aus der Konstruktion der Operatoren S, T, und wegen $T\tilde{\vec{u}}|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega} = \tilde{\vec{u}}$ f.ü.

Mit denselben Argumenten wie im Beweis von (9.16), aber mit $\alpha = 1$, zeigt man:

$$\nu\cdot\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}} \sum_{i,j=1}^{3} |D_i(w_j|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})|^2\,dx + (1/2)\cdot\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}} \sum_{j=1}^{3} \zeta_k\cdot w_j^2\,dx$$

$$\leq (3/2)\cdot\|\vec{f}\|_2^2.$$

Das Tupel $(\tilde{u}_k,\pi_k) := (\vec{w},\pi)$ hat also die im Satz aufgezählten Eigenschaften. □

Das in Satz 9.3 ausgewählte Tupel $(\vec{u}_k,\pi_k)$ löst die Gleichung

$$-\nu\cdot\Delta(\vec{u}_k|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}) + \nabla\pi_k + \zeta_k\cdot\vec{u}_k = \zeta_k\cdot\vec{f},$$

mit Randbedingung

$$\vec{u}_k|\partial\Omega = 0 \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Wir wollen zeigen, daß für $k \to \infty$ eine Teilfolge von $((\vec{u}_k,\pi_k))$ in einem geeigneten Raum konvergiert. Dazu liefert das nächste Lemma ein wichtiges Hilfsmittel: Die zweiten Ableitungen von $\vec{u}_k$ lassen sich nämlich in der L_2-Norm gegen $\|\vec{f}\|_2$ abschätzen.

Im Beweis des nächsten Lemmas verwenden wir folgende Bezeichnung:

Zu einer Menge A sei $1_A: A \to \{1\}$ die konstante Abbildung, die jedem Element aus A den Wert 1 zuordnet.

<u>Lemma 9.5:</u> <u>Es gibt</u> $k_0 \in \mathbb{N}$, $K_2 \in (0,\infty)$ <u>mit folgenden Eigenschaften:</u>

<u>Sei</u> $f \in L_2(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})^3$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$. <u>Zu</u> $\vec{f}, k$ <u>sei</u> $(\vec{u}_k,\pi_k)$ <u>nach Satz</u> 9.3 <u>ausgewählt</u>. <u>Dann gilt für</u> $1 \leq j,l,m \leq 3$:

$$\|D_l D_m(u_{kj}|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})\|_2 \leq K_2\cdot\|\vec{f}\|_2.$$

<u>Beweis:</u> Sei

$$(9.18)\quad K_{2,1} := 2\cdot L_8(2)$$
$$\cdot\Big(R_7'(2)\cdot\mathrm{Vol}(\partial\Omega)^{1/2}\cdot[1+L_6(2)\cdot\sum_{m=1}^{6}\|\vec{V}(.,\vec{\Psi}_{(m)})|\partial\Omega\|_{3/2,2}]$$
$$+\mathrm{Vol}(\partial\Omega)^{1/2}\Big),$$

mit $L_8(2)$ aus Satz 6.4, $L_6(2)$ aus (6.36), $R_7'(2)$ aus Satz 7.2. Die Funktionen $\vec{\Psi}_{(1)},\ldots,\vec{\Psi}_{(6)}$ wurden vor Lemma 6.12 fixiert.

Sei eine Zahl $R' \in (0,\infty)$ so gewählt, daß gilt:

(9.19) $R' \geq \max\{2\cdot K_{2,1},\ 2,\ 2\cdot L_7\}$, mit L_7 aus Satz 6.4;

$\overline{\Omega} \subset K_{R'/2}(0)$.

Sei $R > R'$ mit

(9.20) $|x-y| \geq (1/2)\cdot|y|$ für $x \in K_{R'}(0)$, $y \in \mathbb{R}^3 \setminus K_R(0)$.

Sei $\zeta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ mit $0 \leq \zeta \leq 1$, $\zeta|K_R(0) = 1$, $\zeta|\mathbb{R}^3\setminus K_{R+1}(0) = 0$.

Sei g_k die triviale Fortsetzung von $-\zeta_k\cdot u_k + \zeta_k\cdot\vec{f}$ auf $\mathbb{R}^3$ $(k \in \mathbb{N})$.
Die Funktionen ζ_k wurden vor Satz 9.3 fixiert.

Gemäß (9.12) ist

$$\|\sqrt{\zeta_k}\cdot\vec{u}_k\|_2 \leq \sqrt{3}\cdot\|\vec{f}\|_2 \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Daher gilt:

(9.21) $\|g_k\|_2 \leq (\sqrt{3}+1)\cdot\|\vec{f}\|_2 \qquad (k \in \mathbb{N})$.

Sei

(9.22) $\vec{f}_k^1 := \vec{g}_k\cdot\zeta;\ \vec{f}_k^2 := g_k\cdot(1-\zeta) \qquad (k \in \mathbb{N})$,

mit der eben ausgewählten Funktion ζ.

Weil $f_k^2|K_R(0) = 0$ und $R' < R$, gilt für die in Satz 1.4 I) definierte Funktion $\vec{u}(\vec{f}_k^2)$:

$$\vec{u}(\vec{f}_k^2)|K_{R'}(0) \in C^\infty(K_{R'}(0))^3;$$

$$D_a\left(u_j(\vec{f}_k^2)|K_{R'}(0)\right)(x) = \int_{\mathbb{R}^3}\sum_{m=1}^{3} D_a E_{jm}(x-y)\cdot(\vec{f}_k^2)_m(y)\,dy$$

für $x \in K_{R'}(0)$, $a \in \mathbb{N}_0^3$, $1 \leq j \leq 3$, $k \in \mathbb{N}$.

Man findet nun für $x \in K_{R'}(0)$, $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq l,j \leq 3$:

(9.23) $|\partial/\partial x_l u_j(\vec{f}_k^2)(x)|$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^3}\sum_{m=1}^{3} |D_l E_{jm}(x-y)|\cdot|(\vec{f}_k^2)_m(y)|\,dy$$

$$\leq P_5\cdot\int_{\mathbb{R}^3\setminus K_R(0)} |x-y|^{-2}\cdot\sum_{m=1}^{3}|g_{km}(y)|\,dy$$

(mit Lemma 1.7, und nach Definition von $\vec{f}_k^2$)

$$\leq P_5\cdot\Big(\int_{\mathbb{R}^3\setminus K_R(0)} |x-y|^{-4}\,dy\Big)^{1/2}\cdot\sum_{m=1}^{3}\Big(\int_{\mathbb{R}^3}|g_{km}(y)|^2\,dy\Big)^{1/2}$$

$$\leq 4\cdot P_5\cdot\Big(\int_{\mathbb{R}^3\setminus K_R(0)} |y|^{-4}\,dy\Big)^{1/2}\cdot 3\cdot\Big(\int_{\mathbb{R}^3}\sum_{m=1}^{3}|g_{km}(y)|^2\,dy\Big)^{1/2}$$

(wegen $x \in K_{R'}(0)$; nach Auswahl von R in (9.20))

$$= 24\cdot\pi^{1/2}\cdot P_5\cdot\Big(\int_R^\infty r^{-2}\,dr\Big)^{1/2}\cdot\|\vec{g}_k\|_2$$

$$\leq K_{2,2}\cdot\|\vec{f}\|_2$$

(mit $K_{2,2} := 24\cdot\pi^{1/2}\cdot P_5\cdot R^{-1/2}\cdot(\sqrt{3}+1)$; wegen (9.21)).

Es gilt für $x \in K_{R'}(0)$, $1 \le j \le 3$; $k \in \mathbb{N}$:

(9.24) $u_j(\vec{f}_k^2)(x) = \int_0^1 \sum_{l=1}^{3} D_l u_j(\vec{f}_k^2)(\theta\cdot x)\cdot x_l \, d\theta + u_j(\vec{f}_k^2)(0)$.

Zu $k \in \mathbb{N}$ sei

(9.25) $\vec{h}_k := \vec{u}(\vec{f}_k^2) - \vec{u}(\vec{f}_k^2)(0)$.

Dann ist $h_k|K_{R'}(0) \in C^\infty(K_{R'}(0))$, und aus (9.23), (9.24) erhält man für $1 \le l,j \le 3$, $k \in \mathbb{N}$, $x \in K_{R'}(0)$:

$$|\partial/\partial x_l h_{kj}(x)| \le K_{2,2}\cdot\|\vec{f}\|_2;$$

$$|h_{kj}(x)| \le \sum_{l=1}^{3} K_{2,2}\cdot\|\vec{f}\|_2\cdot|x_l|$$

$$\le K_{2,3}\cdot\|\vec{f}\|_2 \quad (\text{mit } K_{2,3} := 3\cdot K_{2,2}\cdot R').$$

Daraus folgt mit

$$K_{2,4} := (K_{2,3}^2 + 3\cdot K_{2,2}^2)^{1/2}\cdot \mathrm{Vol}(K_{R'}(0))^{1/2}:$$

$$\|h_{kj}|K_{R'}(0)\|_{1,2} \le K_{2,4}\cdot\|\vec{f}\|_2 \quad (1 \le j \le 3,\ k \in \mathbb{N}).$$

Weiterhin gilt für $j,n,l \in \{1,2,3\}$, $k \in \mathbb{N}$:

$$\|D_n D_l(u_j(\vec{f}_k^2)|K_{R'}(0))\|_2 \le \|D_n D_l u_j(\vec{f}_k^2)\|_2$$

$$\le P_{10}(2)\cdot\|\vec{f}_k^2\|_2 \quad (\text{siehe } (1.31))$$

$$\le P_{10}(2)\cdot\|\vec{g}_k\|_2 \le P_{10}(2)\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot\|\vec{f}\|_2 \quad (\text{siehe } (9.21)).$$

Zusammen gilt für $k \in \mathbb{N}$:

(9.26) $\|\vec{h}_k|K_{R'}(0)\|_{2,2} \le K_{2,5}\cdot\|\vec{f}\|_2$

$$(\text{mit } K_{2,5} := (3\cdot(K_{2,4}^2 + 9\cdot P_{10}^2(2)\cdot(\sqrt{3}+1)^2))^{1/2}).$$

Für $k \in \mathbb{N}$ ist $\vec{f}_k^1 \in L_2(\mathbb{R}^3)^3$ und $\mathrm{Tr}(\vec{f}_k^1) \subset K_{R+1}(0)$. Man erhält daher aus Satz 1.4 II):

$$\vec{u}(\vec{f}_k^1)|K_{R'}(0) \in W^{2,2}(K_{R'}(0));$$

$$\|\vec{u}(\vec{f}_k^1)|K_{R'}(0)\|_{2,2} \le P_{11}(2,R+1)\cdot\|\vec{f}_k^1\|_2 \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Mit $K_{2,6} := P_{11}(2,R+1)\cdot(\sqrt{3}+1)$ folgt für $k \in \mathbb{N}$ (siehe (9.21), (9.22)):

(9.27) $\|\vec{v}(\vec{f}_k^1)|K_{R'}(0)\|_{2,2} \le K_{2,6}\cdot\|\vec{f}\|_2$,

wobei $\vec{v}(\vec{f}_k^1)$ in Lemma 8.5 eingeführt wurde. Das bedeutet:

$$\vec{v}(\vec{f}_k^1) \in C^0(\mathbb{R}^3),\ \vec{v}(\vec{f}_k^1) = \vec{u}(\vec{f}_k^1) \text{ f.ü.}$$

Setzt man $K_{2,7} := R_B(\Omega,2,2)\cdot(K_{2,5}+K_{2,6})$, so folgt wegen (9.25) - (9.27), Satz 2.1, 2.2, und wegen $\overline{\Omega} \subset K_{R'}(0)$:

(9.28) $\|(\vec{h}_k + \vec{v}(\vec{f}_k^1))|\partial\Omega\|_{3/2,2} \le K_{2,7}\cdot\|\vec{f}\|_2$, für $k \in \mathbb{N}$.

Zu $k \in \mathbb{N}$ sei

$$c_k := |\vec{u}(\vec{f}_k^2)(0)|,$$

sowie

$$\vec{\gamma}_k := \vec{u}(\vec{f}_k^2)(0)/c_k, \text{ falls } c_k \neq 0;\ \gamma_k := 0 \text{ sonst.}$$

Nach Definition von $\vec{f}_1^k, \vec{f}_2^k$ (siehe (9.22)), $\vec{h}_k$ (siehe (9.25)), $c_k, \vec{\gamma}_k$ ist für $k \in \mathbb{N}$:

(9.29) $\vec{u}(\vec{g}_k) = \vec{u}(\vec{f}_k^1) + \vec{u}(\vec{f}_k^2) = \vec{h}_k + c_k \cdot \vec{\gamma}_k \cdot 1_{\mathbb{R}^3} + \vec{u}(\vec{f}_k^1)$ f.ü.

Weil $(\vec{h}_k + c_k \cdot \vec{\gamma}_k \cdot 1_{\mathbb{R}^3}) | K_{R'}(0)$ stetig ist, ebenso $\vec{v}(\vec{f}_k^1), \vec{v}(\vec{g}_k)$, und weil $\vec{v}(\vec{f}_k^1) = \vec{u}(\vec{f}_k^1)$ f.ü., $\vec{v}(\vec{g}_k) = \vec{u}(\vec{g}_k)$ f.ü. (siehe Lemma 8.5), hat man nun:

(9.30) $\vec{v}(\vec{g}_k) | K_{R'}(0) = (\vec{h}_k + c_k \cdot \vec{\gamma}_k \cdot 1_{\mathbb{R}^3} + \vec{v}(\vec{f}_k^1)) | K_{R'}(0) \quad (k \in \mathbb{N})$.

Es ist

$$(\vec{h}_k + \vec{v}(\vec{f}_k^1)) | \partial\Omega \in C^0(\partial\Omega)^3 \cap W^{3/2,2}(\partial\Omega)^3 \quad \text{(siehe (9.28))}.$$

Nach Lemma 2.5 gibt es somit $\rho \in (0,1)$ mit

$$(\vec{h}_k + \vec{v}(\vec{f}_k^1)) | \partial\Omega \in C^\rho(\partial\Omega)^3.$$

Seien nun $\vec{\Psi}_{(1)}, \ldots, \vec{\Psi}_{(6)}$ die vor Lemma 6.12 ausgewählten Funktionen. Nach Lemma 6.12 und Satz 7.2 gibt es $\vec{\phi}_k \in C^0(\partial\Omega)^3 \cap W^{3/2,2}(\partial\Omega)^3$ mit

$$-(\vec{h}_k + \vec{v}(\vec{f}_k^1)) - \sum_{m=1}^{6} c_m(-(\vec{h}_k + \vec{v}(\vec{f}_k^1)) | \partial\Omega) \cdot \vec{V}(.,\vec{\Psi}_{(m)}) | \partial\Omega$$

$$= (-1/2) \cdot (\vec{\phi}_k + \vec{T}(\vec{\phi}_k));$$

$$\|\vec{\phi}_k\|_{3/2,2} \le R_7'(2) \cdot \| -(\vec{h}_k + \vec{v}(\vec{f}_k^1)) - \sum_{m=1}^{6} c_m(-(\vec{h}_k + \vec{v}(\vec{f}_k^1)) | \partial\Omega) \cdot \vec{V}(.,\vec{\Psi}_{(m)}) | \partial\Omega \|_{3/2,2},$$

für $k \in \mathbb{N}$.

(Die Zahlen $c_1(\vec{b}), \ldots, c_6(\vec{b})$, für $\vec{b} \in C^0(\partial\Omega)^3$, wurden in Lemma 6.12 definiert.)

Das bedeutet für $k \in \mathbb{N}$:

(9.31) $\|\vec{\phi}_k\|_{3/2,2}$

$$\le R_7'(2) \cdot \|\vec{h}_k + \vec{v}(\vec{f}_k^1) | \partial\Omega\|_{3/2,2}$$

$$+ R_7'(2) \cdot \sum_{m=1}^{6} \left| c_m(-(\vec{h}_k + \vec{v}(\vec{f}_k^1)) | \partial\Omega) \right| \cdot \|\vec{V}(.,\vec{\Psi}_{(m)}) | \partial\Omega\|_{3/2,2}$$

$$\le K_{2,8} \cdot \|(\vec{h}_k + \vec{v}(\vec{f}_k^1)) | \partial\Omega\|_{3/2,2}$$

(mit $K_{2,8} := R_7'(2) \cdot (1 + L_6(2) \cdot \sum_{m=1}^{6} \|\vec{V}(.,\vec{\Psi}_{(m)}) | \partial\Omega\|_{3/2,2})$;

(siehe (6.36) und Korollar 8.1)

$$\le K_{2,9} \cdot \|\vec{f}\|_2$$

(mit $K_{2,9} := K_{2,8} \cdot K_{2,7}$; wegen (9.28)).

Die Abbildung $\vec{\gamma}_k \cdot 1_{\partial\Omega}$ gehört zu $C^{\rho}(\partial\Omega)^3 \cap W^{3/2,2}(\partial\Omega)^3$, für $\rho \in (0,1)$, $k \in \mathbb{N}$. Somit gibt es nach Satz 7.2 zu $k \in \mathbb{N}$ eine Funktion $\vec{\psi}_k \in C^0(\partial\Omega)^3 \cap W^{3/2,2}(\partial\Omega)^3$ mit

$$-\vec{\gamma}_k \cdot 1_{\partial\Omega} - \sum_{m=1}^{6} c_m(-\vec{\gamma}_k \cdot 1_{\partial\Omega}) \cdot \vec{V}(.,\vec{\psi}_{(m)})|\partial\Omega = (-1/2) \cdot (\vec{\psi}_k + \vec{T}(\vec{\psi}_k));$$

$$\|\vec{\psi}_k\|_{3/2,2} \le R_7'(2) \cdot \|-\vec{\gamma}_k \cdot 1_{\partial\Omega} - \sum_{m=1}^{6} c_m(-\vec{\gamma}_k \cdot 1_{\partial\Omega}) \cdot \vec{V}(.,\vec{\psi}_{(m)})|\partial\Omega\|_{3/2,2}.$$

Setzt man

$$K_{2,10} := R_7'(2) \cdot \mathrm{Vol}(\partial\Omega)^{1/2} \cdot \Big(1 + \sum_{m=1}^{6} L_6(2) \cdot \|\vec{V}(.,\vec{\psi}_{(m)})|\partial\Omega\|_{3/2,2}\Big),$$

so folgt wegen (6.36), und wegen $\vec{\gamma}_k$ konstant, $|\vec{\gamma}_k| \le 1$:

(9.32) $\|\vec{\psi}_k\|_{3/2,2} \le K_{2,10}$ für $k \in \mathbb{N}$.

Es gilt aber für $k \in \mathbb{N}$: $\vec{\phi}_k + c_k \cdot \vec{\psi}_k \in W^{3/2,2}(\partial\Omega)^3$;

$$(-1/2) \cdot (\vec{\phi}_k + c_k \cdot \vec{\psi}_k + \vec{T}(\vec{\phi}_k + c_k \cdot \vec{\psi}_k))$$

$$= (-1/2) \cdot (\vec{\phi}_k + \vec{T}\vec{\phi}_k) + c_k \cdot (-1/2) \cdot (\vec{\psi}_k + \vec{T}(\vec{\psi}_k))$$

$$= -(\vec{h}_k + \vec{v}(\vec{f}_k^1)) - \sum_{m=1}^{6} c_m(-(h_k + \vec{v}(\vec{f}_k^1))|\partial\Omega) \cdot \vec{V}(.,\vec{\psi}_{(m)})|\partial\Omega$$

$$+ c_k \cdot [-\vec{\gamma}_k \cdot 1_{\mathbb{R}^3} - \sum_{m=1}^{6} c_m(-\vec{\gamma}_k \cdot 1_{\partial\Omega}) \cdot \vec{V}(.,\vec{\psi}_{(m)})]|\partial\Omega$$

$$= -(\vec{h}_k + c_k \cdot \vec{\gamma}_k \cdot 1_{\mathbb{R}^3} + \vec{v}(\vec{f}_k^1)) - \sum_{m=1}^{6} c_m\Big(-(\vec{h}_k + c_k \cdot \vec{\gamma}_k \cdot 1_{\mathbb{R}^3} + \vec{v}(\vec{f}_k^1))|\partial\Omega\Big) \cdot \vec{V}(.,\vec{\psi}_{(m)})|\partial\Omega$$

$$= -\vec{v}(\vec{g}_k) - \sum_{m=1}^{6} c_m(-\vec{v}(\vec{g}_k)|\partial\Omega) \cdot \vec{V}(.,\vec{\psi}_{(m)})|\partial\Omega$$

(siehe (9.30)).

Aus Satz 8.1 ergibt sich nun für $k \in \mathbb{N}$: Das Tupel

$$\Big(\vec{v}(\vec{g}_k)|\mathbb{R}^3\setminus\Omega + \vec{u}(\vec{\phi}_k + c_k \cdot \vec{\psi}_k, -\vec{v}(\vec{g}_k)|\partial\Omega),$$
$$\pi(\vec{g}_k)|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega} + \pi(\vec{\phi}_k + c_k \cdot \vec{\psi}_k, -\vec{v}(\vec{g}_k)|\partial\Omega)\Big)$$

(siehe die Definitionen in Lemma 8.5, Satz 6.4, 1.4 I))

ist Element von $L^2_{\Omega,au}(-\zeta_k \cdot \vec{u}_k + \zeta_k \cdot \vec{f}, 0)$. Weil aber auch

$$(\vec{u}_k, \pi_k) \in L^2_{\Omega,au}(-\zeta_k \cdot \vec{u}_k + \zeta_k \cdot \vec{f}, 0),$$

folgt nach Satz 8.1, für $k \in \mathbb{N}$:

$$\pi_k = \pi(\vec{g}_k) + \pi(\vec{\phi}_k + c_k \cdot \vec{\psi}_k, -\vec{v}(\vec{g}_k)|\partial\Omega) \text{ f.ü.};$$

$$\vec{u}_k = \vec{v}(\vec{g}_k) + \vec{u}(\vec{\phi}_k + c_k \cdot \vec{\psi}_k, -\vec{v}(\vec{g}_k)|\partial\Omega).$$

Jetzt können wir $\vec{u}_k$ in folgende Summe aufspalten (siehe Definition 4.1 und die Definitionen in Satz 6.4):

(9.33) $\vec{u}_k | \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega} =$

$$= \vec{v}(\vec{g}_k) | \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega} + \vec{W}(.,\vec{\phi}_k + c_k \cdot \vec{\Psi}_k) + \sum_{m=1}^{6} c_m(-\vec{v}(\vec{g}_k)|\partial\Omega) \cdot \vec{V}(.,\vec{\Psi}_{(m)})$$

$$= \vec{h}_k | \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega} + \vec{v}(\vec{f}_k^1) + \vec{W}(.,\vec{\phi}_k)$$

$$+ \sum_{m=1}^{6} c_m(-(\vec{h}_k + \vec{v}(\vec{f}_k^1))|\partial\Omega) \cdot \vec{V}(.,\vec{\Psi}_{(m)})$$

$$+ c_k \cdot (\vec{\gamma}_k \cdot 1_{\mathbb{R}^3} + \vec{W}(.,\vec{\Psi}_k) + \sum_{m=1}^{6} c_m(-\vec{\gamma}_k \cdot 1_{\partial\Omega}) \cdot \vec{V}(.,\vec{\Psi}_{(m)}))$$

(mit (9.29))

$$= \vec{h}_k | \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega} + \vec{v}(\vec{f}_k^1) + \vec{u}(\vec{\phi}_k, -(\vec{h}_k + \vec{v}(\vec{f}_k^1))|\partial\Omega)$$

$$+ c_k \cdot (\vec{\gamma}_k \cdot 1_{\mathbb{R}^3} + \vec{u}(\vec{\Psi}_k, -\vec{\gamma}_k \cdot 1_{\partial\Omega}))$$

f.ü. ($k \in \mathbb{N}$).

3 Mit Hilfe der Darstellung (9.33) von $\vec{u}_k$ werden wir nun zeigen, daß die Folge (c_k) beschränkt ist.

Für $j \in \{1,2,3\}$, $k \in \mathbb{N}$ ist

(9.34) $\| u_j(\vec{\Psi}_k, -\vec{\gamma}_k \cdot 1_{\partial\Omega}) | K_{R'}(0) \setminus K_{R'\setminus 2}(0) \|_2$

$$\leq L_8(2) \cdot \left(\int_{K_{R'}(0) \setminus K_{R'\setminus 2}(0)} |x|^{-2} \, dx\right)^{1/2} \cdot (\|\vec{\Psi}_k\|_2 + \|\vec{\gamma}_k \cdot 1_{\partial\Omega}\|_2)$$

(nach Satz 6.4; beachte, daß $R' \setminus 2 \geq L_7$ gemäß (9.19))

$$\leq L_8(2) \cdot (R' \setminus 2)^{-1} \cdot \left(\int_{K_{R'}(0) \setminus K_{R'\setminus 2}(0)} dx\right)^{1/2}$$

$$\cdot (\|\vec{\Psi}_k\|_2 + |\vec{\gamma}_k| \cdot \mathrm{Vol}(\partial\Omega)^{1/2})$$

$$\leq 2 \cdot L_8(2) \cdot \mathrm{Vol}(K_{R'}(0) \setminus K_{R'\setminus 2}(0))^{1/2}$$

$$\cdot (K_{2,10} + \mathrm{Vol}(\partial\Omega)^{1/2}) \cdot (R')^{-1}$$

(siehe (9.32))

$$= K_{2,1} \cdot \mathrm{Vol}(K_{R'}(0) \setminus K_{R'\setminus 2}(0))^{1/2} \cdot (R')^{-1}$$

(nach Definition von $K_{2,10}$ in (9.32) und von $K_{2,1}$ in (9.18))

$$\leq (1/2) \cdot \mathrm{Vol}(K_{R'}(0) \setminus K_{R'\setminus 2}(0))^{1/2}$$

(nach Auswahl von R' in (9.19)).

Jetzt findet man für $k \in \mathbb{N}$ mit $c_k \neq 0$ (d.h.: $|\vec{\gamma}_k| = 1$):

(9.35) $\| (\vec{\gamma}_k \cdot 1_{\mathbb{R}^3} + \vec{u}(\vec{\Psi}_k, -\vec{\gamma}_k \cdot 1_{\partial\Omega})) | K_{R'}(0) \setminus K_{R'\setminus 2}(0) \|_2$

$$\geq \| \vec{\gamma}_k \cdot 1_{K_{R'}(0) \setminus K_{R'\setminus 2}(0)} \|_2 -$$

$$- \| \vec{u}(\vec{\Psi}_{(k)}, -\vec{\gamma}_k \cdot 1_{\partial\Omega}) | K_{R'}(0) \setminus K_{R'\setminus 2}(0) \|_2$$

$$= \mathrm{Vol}(K_{R'}(0)\setminus K_{R'\setminus 2}(0))^{1/2} -$$

$$- \|\vec{u}(\vec{\psi}_k, -\vec{\gamma}_k \cdot 1_{\partial\Omega}) | K_{R'}(0)\setminus K_{R'\setminus 2}(0)\|_2$$

$$\geq (1/2)\cdot \mathrm{Vol}(K_{R'}(0)\setminus K_{R'\setminus 2}(0))^{1/2} \text{ (wegen (9.34)).}$$

Gemäß (9.12) ist

$$\|\sqrt{\zeta_k}\cdot u_k | K_{R'}(0)\setminus K_{R'\setminus 2}(0)\|_2 \leq \sqrt{3}\cdot\|\vec{f}\|_2 \text{ für } k \in \mathbb{N}.$$

Sei $k_o \in \mathbb{N}$ mit $\zeta_k | K_{R'}(0) = 1$ für $k \geq k_o$. Das bedeutet:

(9.36) $\|\vec{u}_k | K_{R'}(0)\setminus K_{R'\setminus 2}(0)\|_2 \leq \sqrt{3}\cdot\|\vec{f}\|_2$ für $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_o$.

Weiter ist für $k \in \mathbb{N}$:

(9.37) $\|\vec{u}(\vec{\phi}_k, -(\vec{h}_k+\vec{v}(\vec{f}_k^1))|\partial\Omega) | K_{R'}(0)\setminus K_{R'\setminus 2}(0)\|_2$

$$\leq \mathrm{Vol}(K_{R'}(0))^{1/2}\cdot \left|\vec{u}\left(\vec{\phi}_k, -(\vec{h}_k+\vec{v}(\vec{f}_k^1))|\partial\Omega\right) | \mathbb{R}^3\setminus K_{R'/2}(0)\right|_o$$

$$\leq K_{2,11}\cdot(\|\vec{\phi}_k\|_2 + \|(\vec{h}_k+\vec{v}(\vec{f}_k^1))|\partial\Omega\|_2)$$

(mit $K_{2,11} := \mathrm{Vol}(K_{R'}(0))^{1/2}\cdot L_7^{-1}\cdot L_8(2)$;

nach Satz 6.4; beachte: $R' \geq L_7$)

$$\leq K_{2,12}\cdot\|\vec{f}\|_2$$

(mit $K_{2,12} := K_{2,11}\cdot(K_{2,9}+K_{2,7})$ wegen (9.31) und (9.28)).

Jetzt findet man für $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_o$:

$$|c_k|\cdot(1/2)\cdot\mathrm{Vol}(K_{R'}(0)\setminus K_{R'\setminus 2}(0))^{1/2}$$

$$\leq \|c_k\cdot(\vec{\gamma}_k\cdot 1_{\mathbb{R}^3} + \vec{u}(\vec{\psi}_k, -\vec{\gamma}_k\cdot 1_{\partial\Omega})) | K_{R'}(0)\setminus K_{R'\setminus 2}(0)\|_2$$

(siehe (9.35))

$$\leq \left\|\left[-\vec{u}_k + \vec{h}_k + \vec{v}(\vec{f}_k^1) + \vec{u}(\vec{\phi}_k, -(\vec{h}_k+\vec{v}(\vec{f}_k^1))|\partial\Omega)\right] \middle| K_{R'}(0)\setminus K_{R'\setminus 2}(0)\right\|_2$$

(siehe (9.33))

$$\leq K_{2,13}\cdot\|\vec{f}\|_2$$

(mit $K_{2,13} := \sqrt{3} + K_{2,5} + K_{2,6} + K_{2,12}$;

wegen (9.26), (9.27), (9.36), (9.37)).

Nun folgt die Beschränktheit der Folge (c_k), denn für $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_o$ ergibt sich:

(9.38) $|c_k| \leq K_{2,14}\cdot\|\vec{f}\|_2$

(mit $K_{2,14} := 2\cdot K_{2,13}\cdot\mathrm{Vol}(K_{R'}(0)\setminus K_{R'\setminus 2}(0))^{-1/2}$).

Jetzt haben wir für $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_o$, $1 \leq j,l,m \leq 3$:

$$\|D_l D_m(u_{kj} | \mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})\|_2$$

$$\leq \|D_l D_m((h_{kj}+v_j(\vec{f}_k^1)+c_k\cdot\gamma_{kj}\cdot 1_{\mathbb{R}^3}) | \mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})\|_2 +$$

$$+ \|D_l D_m\Big(u_j(\vec{\phi}_k, -(\vec{h}_k+\vec{v}(\vec{f}_k^1))\,|\,\partial\Omega)\,|\,\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}\Big)\|_2$$

$$+ |c_k|\cdot\|D_l D_m(u_j(\vec{\Psi}_k, -\vec{\gamma}_k\cdot 1_{\partial\Omega})\,|\,\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega})\|_2$$

(wegen (9.33))

$$\leq \|D_l D_m(\vec{u}(\vec{g}_k)\,|\,\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega})\|_2$$

$$+ M_2(2)\cdot(\|\vec{\phi}_k\|_2 + \|(\vec{h}_k+\vec{v}(\vec{f}_k^1))\,|\,\partial\Omega\|_{3/2,2})$$

$$+ |c_k|\cdot M_2(2)\cdot(\|\vec{\Psi}_k\|_2 + \|\vec{\gamma}_k\cdot 1_{\partial\Omega}\|_{3/2,2})$$

(wegen Lemma 8.6, (9.29), und wegen
$\vec{v}(\vec{g}_k) = \vec{u}(\vec{g}_k)$ f.ü., $\vec{v}(\vec{f}_k^1) = \vec{u}(\vec{f}_k^1)$ f.ü., siehe Lemma 8.5)

$$\leq P_{1o}(2)\cdot\|\vec{g}_k\|_2 + K_{2,15}\cdot\|\vec{f}\|_2$$

(mit $K_{2,15} := M_2(2)\cdot(K_{2,9}+K_{2,7}+K_{2,14}\cdot(K_{2,1o}+\mathrm{Vol}(\partial\Omega)^{1/2}))$;
wegen (1.31), (9.28), (9.31), (9.32), (9.38);
beachte außerdem: $\vec{\gamma}_k$ konstant; $|\vec{\gamma}_k| \leq 1$)

$$\leq K_2\cdot\|\vec{f}\|_2$$

(mit $K_2 := P_{1o}(2)\cdot(\sqrt{3}+1) + K_{2,15}$; wegen (9.21)). □

Satz 9.4: Sei $\vec{f} \in L_2(\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega})^3$. Dann gibt es $p \in \widetilde{H}^{1,2}(\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega})$ und

$$\vec{v} \in W^{2,2}(\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega})^3 \cap W_o^{1,2}(\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega})^3 \cap H_2(\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}),$$

so daß gilt:

$$\mathrm{div}\,\vec{v} = 0 \text{ f.ü.}, \quad -\nu\cdot\nabla\vec{v} + \nabla p + \vec{v} = \vec{f} \text{ f.ü.}$$

Beweis: Wir erinnern an die Funktionen ζ_k $(k \in \mathbb{N})$, die vor Satz 9.3 fixiert wurden, ferner an die Funktionen $\vec{u}_k, \pi_k$ $(k \in \mathbb{N})$ aus Satz 9.3.

Nach Satz 9.3 ist für $1 \leq j,l \leq 3$, $k \in \mathbb{N}$:

(9.39) $\|D_l(u_{kj}\,|\,\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega})\|_2 \leq (3/(2\cdot\nu))^{1/2}\cdot\|\vec{f}\|_2.$

Nach Satz 9.3 ist ferner

$$\vec{u}_k\,|\,\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega} \in \widetilde{H}_o^{1,2}(\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega})^3,$$

so daß nach Lemma 9.3 gilt:

(9.40) $\|u_{kj}\,|\,\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}\|_6 \leq K_1\cdot(3/(2\cdot\nu))^{1/2}\cdot\|\vec{f}\|_2$ für $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq 3$.

Nach Lemma 9.5 hat man für $1 \leq j,l,m \leq 3$, $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq k_o$ (k_o aus Lemma 9.5):

(9.41) $\|D_m D_l(u_{kj}\,|\,\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega})\|_2 \leq K_2\cdot\|\vec{f}\|_2.$

Für $k \in \mathbb{N}$ mit $k \ge k_o$, $1 \le j \le 3$ ist

$$(9.42)\quad \|D_j\pi_k\|_2 = \|\nu\cdot\Delta(u_{kj}|\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}) - \zeta_k\cdot u_{kj} + \zeta_k\cdot f_j\|_2$$

(da $(\vec{u}_k,\pi_k)\in L^2_{\Omega,au}(-\zeta_k\cdot\vec{u}_k+\zeta_k\cdot\vec{f})$)

$$\le 3\cdot\nu\cdot K_2\cdot\|\vec{f}\|_2 + \Big(\int_{\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}} \zeta_k^2\cdot u_{kj}^2\,dx\Big)^{1/2} + \Big(\int_{\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}} \zeta_k^2\cdot f_j^2\,dx\Big)^{1/2}$$

(wegen (9.41))

$$\le 3\cdot\nu\cdot K_2\cdot\|\vec{f}\|_2 + \Big(\int_{\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}} \zeta_k\cdot u_{kj}^2\,dx\Big)^{1/2} + \Big(\int_{\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}} f_j^2\,dx\Big)^{1/2}$$

(weil $0\le\zeta_k\le 1$)

$$\le C_1\cdot\|\vec{f}\|_2 \quad (\text{mit } C_1 := 3\cdot\nu\cdot K_2 + \sqrt{3}+1;\ \text{wegen } (9.12)).$$

Sei nun $\gamma>0$ so groß, daß $\overline{\Omega}\subset K_\gamma(0)$.

Weil $(\vec{u}_k,\pi_k)\in L^2_{\Omega,au}(-\zeta_k\cdot u_k+\zeta_k\cdot\vec{f},0)$, ist $\pi_k, D_i\pi_k\in L_2(\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega})$ ($1\le i\le 3$, $k\in\mathbb{N}$). Daher gilt (siehe Definition 9.2):

$$(9.43)\quad p_k := \pi_k - (\mathrm{Vol}(K_\gamma(0)\setminus\overline{\Omega}))^{-1}\cdot\int_{K_\gamma(0)\setminus\overline{\Omega}} \pi_k(x)\,dx \in \tilde{H}^{1,2}(\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega},\gamma)$$

für $k\in\mathbb{N}$. Abschätzung (9.42) liefert nun:

$([p_k])$ ist beschränkte Folge im Hilbertraum $\tilde{H}^{1,2}(\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega},\gamma)$ (siehe Definition 9.2).

Damit gibt es eine streng monoton wachsende Abbildung $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, ferner Funktionen $\vec{v}_o\in L_6(\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega})^3$, $p\in\tilde{H}^{1,2}(\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega},\gamma)$, sowie zu $l,m\in\{1,2,3\}$ Funktionen $\vec{v}_l,\vec{v}_{ml}\in L_2(\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega})^3$, so daß gilt, für $1\le j,l,m\le 3$:

$$(9.44)\quad [u_{\sigma(k)j}|\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}]\to[v_{oj}]\quad (k\to\infty)\ \text{schwach in } L_6(\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega});$$

$$[D_l(u_{\sigma(k)j}|\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega})]\to[v_{lj}]\quad (k\to\infty)\ \text{schwach in } L_2(\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega});$$

$$[D_mD_l(u_{\sigma(k)j}|\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega})]\to[v_{mlj}]\quad (k\to\infty)\ \text{schwach in } L_2(\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega});$$

$$[p_{\sigma(k)}]\to[p]\quad (k\to\infty)\ \text{schwach in } H^{1,2}(\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega},\gamma).$$

Hier wurde die schwache Folgenkompaktheit reflexiver Banachräume ausgenutzt; siehe [Sch], S. 198.

Aus (9.44) folgt, daß die schwachen Ableitungen D_lv_{oj}, $D_mD_lv_{oj}$ existieren und mit den Funktionen v_{lj} bzw. v_{mlj} übereinstimmen ($1\le j,l,m\le 3$).

Wir zeigen, daß für $\mu\in(0,\infty)$ mit $\overline{\Omega}\subset K_\mu(0)$ die Funktion $\vec{v}_o|K_\mu(0)\setminus\overline{\Omega}$ fast überall gleich einer stetigen Funktion ist: Sei $\mu\in(0,\infty)$ mit $\overline{\Omega}\subset K_\mu(0)$. Für $k\in\mathbb{N}$, $1\le j\le 3$ ist

$$\|u_{\sigma(k)j}|K_\mu(0)\setminus\overline{\Omega}\|_2$$

$$\le \mathrm{Vol}(K_\mu(0))^{1/3}\cdot\|u_{\sigma(k)j}|K_\mu(0)\setminus\overline{\Omega}\|_6$$

$$\le C_2\cdot\|\vec{f}\|_2$$

(mit $C_2 := (\mathrm{Vol}(K_\mu(0)))^{1/3}\cdot K_1\cdot(3/(2\cdot\nu))^{1/2}$; siehe (9.40)).

Mit (9.39) und (9.41) folgt für $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq k_o$, $1 \leq j \leq 3$:

$$\|u_{\sigma(k)j}|K_\mu(0)\setminus\bar{\Omega}\|_{2,2} \leq (C_2^2+9/(2\cdot\nu)+9\cdot K_2^2)^{1/2}\cdot\|\vec{f}\|_2.$$

Nach [A], 6.2(7) gibt es somit eine streng monoton wachsende Abbildung $\tau:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ und eine Funktion $\vec{u}^{(\mu)} \in C^0(\overline{K_\mu(0)\setminus\Omega})^3$, so daß

$$(9.45)\quad |\vec{u}_{\sigma\circ\tau(k)}-\vec{u}^{(\mu)}|_0 \to 0 \quad (k\to\infty).$$

Weil $\vec{u}_{\sigma\circ\tau(k)}|\partial\Omega = 0$ für $k \in \mathbb{N}$, und weil $\bar{\Omega}\subset K_\mu(0)$, folgt $\tilde{u}^{(\mu)}|\partial\Omega = 0$.

Wegen (9.44) gilt für $\phi \in C_0^\infty(K_\mu(0)\setminus\bar{\Omega})$, $1\leq j\leq 3$:

$$\int_{K_\mu(0)\setminus\bar{\Omega}} u_{\sigma\circ\tau(k),j}\cdot\phi\,dx \to \int_{K_\mu(0)\setminus\bar{\Omega}} v_{oj}\cdot\phi\,dx \quad (k\to\infty).$$

Andererseits erhält man aus (9.45), für $\phi\in C_0^\infty(K_\mu(0)\setminus\bar{\Omega})$, $1\leq j\leq 3$:

$$\int_{K_\mu(0)\setminus\bar{\Omega}} u_{\sigma\circ\tau(k),j}\cdot\phi\,dx \to \int_{K_\mu(0)\setminus\bar{\Omega}} u_j^{(\mu)}\cdot\phi\,dx \quad (k\to\infty).$$

Somit gilt:

$$\vec{v}_o|K_\mu(0)\setminus\bar{\Omega} = u_j^{(\mu)}|K_\mu(0)\setminus\bar{\Omega} \text{ f.ü.}$$

Weil hierbei $\mu\in(0,\infty)$ mit $\bar{\Omega}\subset K_\mu(0)$ beliebig war, folgt nun: Es gibt $\vec{u}\in C^0(\mathbb{R}^3\setminus\Omega)$ mit $\vec{u}|\partial\Omega=0$ und $\vec{v}_o=\vec{u}|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}$ f.ü. Insbesondere ist $\vec{u}|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}\in L_6(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})^3$. Weiter folgt aus den Eigenschaften von $\vec{v}_o$, daß die schwachen Ableitungen $D_l(\vec{u}|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})$, $D_mD_l(\vec{u}|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})$ existieren und zu $L_2(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})^3$ gehören $(1\leq l,m\leq 3)$. Schließlich ergibt sich aus (9.44):

$$(9.46)\quad [u_{\sigma(k),j}|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}] \to [u_j|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}] \quad (k\to\infty) \text{ in } L_6(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega});$$

$$[D_l(u_{\sigma(k),j}|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})] \to [D_l(u_j|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})] \quad (k\to\infty) \text{ in } L_2(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega});$$

$$[D_mD_l(u_{\sigma(k),j}|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})] \to [D_mD_l(u_j|\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})] \quad (k\to\infty)$$
$$\text{in } L_2(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}),$$

für $1\leq j,l,m\leq 3$, mit Konvergenz jeweils im schwachen Sinn.

Sei $\vec{g}\in L_2(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})^3$. Nach Satz 9.2 gibt es $\vec{h}\in L_2(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})^3$, $\rho\in\tilde{H}^{1,2}(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})$ mit folgenden Eigenschaften: Es ist $\vec{g}=\vec{h}+\nabla\rho$; es gibt eine Folge (Θ_n) in $C_0^\infty(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})^3$ mit $\operatorname{div}\vec{\Theta}_n=0$ für $n\in\mathbb{N}$ und $\|\vec{h}-\vec{\Theta}_n\|_2\to 0$ $(n\to\infty)$.

Weil $\pi_{\sigma(k)}\in W^{1,2}(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})$, hat man für $k\in\mathbb{N}$:

$$\sum_{j=1}^3\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}} D_j\pi_{\sigma(k)}\cdot h_j\,dx$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^3\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}} D_j\pi_{\sigma(k)}\cdot\Theta_{nj}\,dx$$
$$= -\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^3\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}} \pi_{\sigma(k)}\cdot D_j\Theta_{nj}\,dx = 0.$$

Es ist $p\in\tilde{H}^{1,2}(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega},\gamma)$. Insbesondere heißt das: $p\in L_{2,loc}(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})$, $\nabla p\in L_2(\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega})^3$. Damit folgt wie eben:

$$(9.47)\quad \sum_{j=1}^3\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar{\Omega}} D_jp\cdot h_j\,dx = 0.$$

Jetzt ergibt sich:

$$\left(\sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega} D_j\pi_{\sigma(k)}\cdot g_j\,dx\right) = \left(\sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega} D_j\pi_{\sigma(k)}\cdot(h_j+D_j\rho)\,dx\right)$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega} D_j\pi_{\sigma(k)}\cdot D_j\rho\,dx\right)$$

$$\to \left(\sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega} D_j p\cdot D_j\rho\,dx\right) \quad (k\to\infty).$$

Die Konvergenz in der vorangehenden Zeile gilt wegen (9.43), (9.44) (schwache Konvergenz im Hilbertraum $\tilde{H}^{1,2}(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega,\gamma)$), und wegen

$$\rho - (\mathrm{Vol}(K_\gamma(0)\setminus\Omega))^{-1}\cdot\int_{K_\gamma(0)\setminus\bar\Omega} \rho\,dx \in \tilde{H}^{1,2}(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega,\gamma).$$

Weil

$$\sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega} D_j p\cdot D_j\rho\,dx = \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega} D_j p\cdot g_j\,dx,$$

wie sich aus (9.47) und der Gleichung $\vec{g} = \vec{h}+\nabla\rho$ ergibt, kann man folgern:

$$\sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega} D_j\pi_{\sigma(k)}\cdot g_j\,dx \to \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega} D_j p\cdot g_j\,dx \quad (k\to\infty).$$

Hierbei war $\vec{g}$ eine beliebige Funktion aus $L_2(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega)^3$. Wir haben also:

(9.48) $D_j\pi_{\sigma(k)} \to D_j p \quad (k\to\infty)$ schwach in $L_2(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega)$, für $1\le j\le 3$.

Sei nun $\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega)$, $j\in\{1,2,3\}$. Aus (9.46) und (9.48) folgt:

(9.49) $$\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega} (-\nu\cdot\Delta(u_{\sigma(k)j}|\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega) + D_j\pi_{\sigma(k)})\cdot\phi\,dx$$

$$\to \int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega} (-\nu\cdot\Delta(u_j|\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega+D_j p)\cdot\phi\,dx \quad (k\to\infty).$$

Sei $k_1\in\mathbb{N}$ so groß, daß $\mathrm{Tr}\,\phi\subset K_{\sigma(k)-1}(0)$ für $k\in\mathbb{N}$, $k\ge k_1$. Dann ist für $k\in\mathbb{N}$ mit $k\ge k_1$, wegen $\zeta_{\sigma(k)}|K_{\sigma(k)-1}(0) = 1$:

$$\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega} (-\zeta_{\sigma(k)}\cdot u_{\sigma(k)j}+\zeta_k\cdot f_j)\cdot\phi\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega} (-u_{\sigma(k)j}+f_j)\cdot\phi\,dx.$$

Aus der ersten Zeile in (9.46) erhält man:

$$\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega} u_{\sigma(k)j}\cdot\phi\,dx \to \int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega} u_j\cdot\phi\,dx \quad (k\to\infty).$$

Zusammen hat man nun:

(9.50) $$\int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega} (-\zeta_{\sigma(k)}\cdot u_{\sigma(k)j}+\zeta_{\sigma(k)}\cdot f_j)\cdot\phi\,dx \to$$

$$\to \int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega} (-u_j+f_j)\cdot\phi\,dx \quad (k\to\infty).$$

Wegen $(\vec{u}_k,\pi_k)\in L^2_{\Omega,au}(-\zeta_k\cdot\vec{u}_k+\zeta_k\cdot\vec{f},0)$ für $k\in\mathbb{N}$ ist

$$\int_{\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}} (-\nu\cdot\Delta(u_{\sigma(k)j}|\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega})+D_j\pi_{\sigma(k)})\cdot\phi\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}} (-\zeta_{\sigma(k)}\cdot u_{\sigma(k)j}+\zeta_{\sigma(k)}\cdot f_j)\cdot\phi\,dx \quad (k\in\mathbb{N}).$$

Somit folgt aus (9.49) und (9.50):

$$\int_{\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}} (-\nu\cdot\Delta(u_j|\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega})+D_jp)\cdot\phi\,dx = \int_{\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}} (-u_j+f_j)\cdot\phi\,dx.$$

Weil hierbei ϕ beliebig aus $C_o^\infty(\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega})$ und j aus $\{1,2,3\}$ war, heißt das:

$$-\nu\cdot\Delta(\vec{u}|\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega})+\nabla p = -\vec{u}+\vec{f} \quad \text{f.ü.}$$

Berücksichtigt man noch die Regularitätseigenschaften der Ableitungen von $u|\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}$ (siehe vor (9.46)), so ergibt sich aus der vorangehenden Gleichung:

$$\vec{u}|\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega} \in L_2(\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega})^3.$$

Somit ist

$$u|\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega} \in W^{2,2}(\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega})^3.$$

Weil schließlich $\vec{u}$ zu $C^o(\mathbb{R}^3\setminus\Omega)$ gehört, mit $\vec{u}|\partial\Omega=0$, wie oben gezeigt, erhält man aus Lemma 9.4:

$$u|\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega} \in W_o^{1,2}(\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega})^3.$$

Es ist $\operatorname{div}(\vec{u}_k|\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega})=0$ f.ü. für $k\in\mathbb{N}$. Daher folgt aus (9.46):

$$\operatorname{div}(\vec{u}|\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}) = 0 \text{ f.ü.}$$

Sei $\rho\in\tilde{H}^{1,2}(\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega})$. Nach Lemma 9.1 gibt es dann eine Folge (ρ_n) in $C^1(\mathbb{R}^3\setminus\Omega)$ mit $\operatorname{Tr}\rho_n\subset K_{2n}(0)$ für $n\in\mathbb{N}$, und mit

$$\|\nabla(\rho_n|\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega})-\nabla\rho\|_2 \to 0 \quad (n\to\infty).$$

Weil

$$\vec{u}|\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega} \in W_o^{1,2}(\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega})^3,\ \operatorname{div}(\vec{u}|\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega})=0 \text{ f.ü.},\ \vec{u}|\partial\Omega=0,$$

folgt:

$$\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}} u_j\cdot D_j(\rho_n|\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega})\,dx$$

$$= \sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}} D_j(u_j|\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega})\cdot\rho_n\,dx = 0 \quad (n\in\mathbb{N}).$$

Daraus erhält man:

$$\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}} u_j\cdot D_j\rho\,dx = 0.$$

Nach Satz 9.2 bedeutet dies: $\vec{u}|\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega} \in H_2(\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega})$. □

<u>Definition 9.4:</u> <u>Sei</u> $P:L_2(\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega})^3 \to H_2(\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega})$ <u>der Projektionsoperator, der jedem Element</u> $V\in L_2(\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega})^3$ <u>seine Komponente in</u> $H_2(\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega})$ <u>nach Satz</u> 9.2 <u>zuordnet</u>. <u>Das bedeutet:</u>

<u>Für</u> $F\in\tilde{H}^{1,2}(\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega})$ <u>ist</u> $P(\nabla F) = 0$.

Korollar 9.1: Setze

$$D(A) := W^{2,2}(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega)^3 \cap W_o^{1,2}(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega)^3 \cap H_2(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega).$$

Sei der Operator $A: D(A) \to H_2(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega)$ definiert durch

$$AV := -\nu\cdot P(\Delta V) \text{ für } V \in D(A).$$

Ferner bezeichne I die identische Abbildung von $H_2(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega)$ auf sich selbst.

Dann ist A+I surjektiv.

Bemerkung: Der Operator A wird als Stokes-Operator (in L_2, im Außenraum) bezeichnet.

Beweis: Sei $\vec f \in H_2(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega)$. Nach Satz 9.4 gibt es dann

$$\vec v \in \mathcal{W}^{2,2}(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega)^3 \cap \mathcal{W}_o^{1,2}(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega)^3 \cap H_2(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega),$$

$$p \in \tilde{H}^{1,2}(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega),$$

so daß gilt:

$$-\nu\cdot\Delta\vec v + \vec v + \nabla p = \vec f \text{ f.ü.}$$

Weil

$$P([\vec v]) = [\vec v],\ P(\nabla[p]) = 0,\ P([\vec f]) = [\vec f],$$

folgt:

$$-\nu\cdot P(\Delta[\vec v]) + [\vec v] = [\vec f]. \qquad \square$$

Korollar 9.2: Der Operator A aus Korollar 9.1 ist selbstadjungiert im Hilbertraum $H_2(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega)$.

Beweis: Weil

$$\{[\vec\Psi]: \vec\Psi \in C_o^\infty(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega)^3,\ \operatorname{div}\vec\Psi = 0\} \subset D(A),$$

ist $\mathcal{D}(A)$ dicht in $H_2(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega)$.

Bezeichne (,) das Skalarprodukt in $H_2(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega)$; d.h. (,) ist die Einschränkung des Skalarprodukts von $L_2(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega)^3$ auf $H_2(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega)$. Sei $V,W \in H_2(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}(9.51)\quad (AV,W) &= (-\nu\cdot P(\Delta V),W)\\ &= (-\nu)\cdot(\Delta V,P(W)) &&\text{(da P Projektion auf } L_2(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega)^3)\\ &= (-\nu)\cdot(\Delta V,W) &&\text{(da } V\in H_2(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega)).\end{aligned}$$

Sei nun $\vec v$ bzw. $\vec w$ ein Repräsentant von V bzw. W. Dann ist

$$\vec v,\vec w \in \mathcal{W}_o^{1,2}(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega)^3 \cap \mathcal{W}^{2,2}(\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega)^3,$$

womit wir folgende Gleichung erhalten:

$$(\Delta V,W) = \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega} \Delta v_j\cdot w_j\,dx$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3\setminus\bar\Omega} \sum_{k=1}^{3} D_k v_j\cdot D_k w_j\,dx$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}} v_j \cdot \Delta w_j \, dx = (V, \Delta W).$$

Mit (9.51) ergibt sich:

$$(AV,W) = (V,AW).$$

Somit ist A ein symmetrischer Operator. Weil A+I nach Korollar 9.1 surjektiv ist, hat man nun: A ist selbstadjungiert (siehe [W], Theorem 5.19). □

Literaturverzeichnis

[A] Adams, R. A.: Sobolev spaces. Academic Press, New York u.a. (1975).

[D] Deimling, K.: Nichtlineare Gleichungen und Abbildungsgrade. Springer, Berlin u.a. (1974).

[DvWW] Deuring, P., Wahl, W. von, Weidemaier, P.: Das lineare Stokes-System im $\mathbb{R}^3$. I. Vorlesung über das Innenraumproblem. Erscheint in den Bayreuther Mathematischen Schriften.

[Fr] Friedman, A.: Partial differential equations. Holt, Rinehart, and Winston, New York u.a. (1969).

[FJK] Fučik, S., John, O., Kufner, A.: Function spaces. Noordhoff, Leyden (1977).

[GT] Gilbarg, T., Trudinger, N. S.: Elliptic partial differential equations of second order. Springer, New York u.a. (1983).

[Roy] Royden, H. L.: Real Analysis. Macmillan, New York (1968).

[Sch] Schechter, M.: Principles of functional analysis. Academic Press, New York (1973).

[SiSo1] Simader, C. G., Sohr, H.: The weak Dirichlet and Neumann problem in L^q for the Laplacian in bounded and exterior domains. Preprint (1987). Erscheint in Lecture Notes in Mathematics, Springer.

[SiSo2] Simader, C. G., Sohr, H.: The Helmholtz decomposition and related topics. Preprint (1987). Erscheint in der Mathematischen Zeitschrift.

[So] Sohr, H.: L^q-regularity theory for the Stokes operator in exterior domains. Preprint (1987).

[Sol] Solonnikov, V. A.: Estimates for the solution of nonstationary Navier-Stokes equations. J. Soviet Math. 8, 467-529 (1977).

[Spec] Specovius-Neugebauer, M.: Exterior Stokes problems and decay at infinity. Math. Meth. in the Appl. Sci. 8 (1986), 351-367.

[W] Weidmann, J.: Linear operators in Hilbert spaces. Springer, Berlin u.a. (1980).