Université du Littoral Côte d'Opale — Année universitaire 2019–2020

Master MEEF — 1ère année

DS 1 - Préparation à l'écrit d'Algèbre

Durée : 5 h

le 3 octobre 2019 à 8h30

Documents non autorisés

Calculatrices personnelles autorisées

Problème n° 1

Les parties **D** et **E** de ce problème sont indépendantes des parties **B** et **C**.

Notations.
$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
pour m et n deux entiers naturels, $[\![m, n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers k tels que $m \leqslant k \leqslant n$.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{C}^n(I)$ l'ensemble des fonctions à valeurs réelles définies sur I, n fois dérivables et dont la dérivée n-ième est continue.
Pour n et p deux entiers naturels non nuls, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes, à coefficients réels. $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
$\mathbb{R}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.
Pour tout entier naturel n, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

Partie A : interpolation de Lagrange

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels deux à deux distincts. Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, on considère le polynôme

$$L_k(X) = \prod_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n, \\ i \neq k}} \frac{X - a_i}{a_k - a_i}.$$

I. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Montrer que L_k est l'unique polynôme P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$P(a_i) = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq k, \\ 1 \text{ si } i = k. \end{cases}$$

II. On considère l'application

$$F : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_{n-1}[X] & \to & \mathbb{R}^n \\ P & \mapsto & (P(a_1), \ldots, P(a_n)). \end{array} \right.$$

1. Montrer que F est une application linéaire.

2. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, montrer qu'il existe un polynôme P dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $F(P) = e_k$.

3. Montrer que F est surjective, puis justifier que F est bijective.

III. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $P(a_k) = f(a_k)$. Ce polynôme P est appelé *polynôme d'interpolation de f en les points d'abscisses $a_1, \ldots, a_n$*.

2. Exprimer le polynôme d'interpolation de f en les points d'abscisses $a_1, \ldots, a_n$ à l'aide des polynômes $L_1, \ldots, L_n$ et des valeurs de f en $a_1, \ldots, a_n$.

Partie B : déterminant de Vandermonde

On considère la matrice de Vandermonde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $a_1, \dots, a_n$ sont des nombres réels.
On cherche à déterminer par deux méthodes différentes une condition nécessaire et suffisante portant sur les a_k pour que A soit inversible.

I. Calculer le déterminant de A lorsque $n = 2$ et $n = 3$.

II. Première méthode.

1. Montrer que A est la matrice de l'application linéaire F définie dans la question A.II. dans des bases bien choisies.

2. En déduire que si les a_k sont deux à deux distincts A est inversible.

3. Qu'en est-il si deux des a_k sont égaux ?

4. Conclure.

III. Seconde méthode. On considère le polynôme

$$P(X) = (X - a_1) \dots (X - a_{n-1}).$$

1. Montrer qu'il existe des nombres réels $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-2}$ tels que

$$P(X) = X^{n-1} + \lambda_{n-2} X^{n-2} + \dots + \lambda_1 X + \lambda_0.$$

2. On note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de A. Montrer que

$$C_n + \lambda_{n-2} C_{n-1} + \dots + \lambda_0 C_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ P(a_n) \end{pmatrix}.$$

3. En déduire que

$$\det(A) = P(a_n) \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-2} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \dots & a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}.$$

4. Montrer que

$$\det(A) = \prod_{1 \leqslant k < l \leqslant n} (a_l - a_k).$$

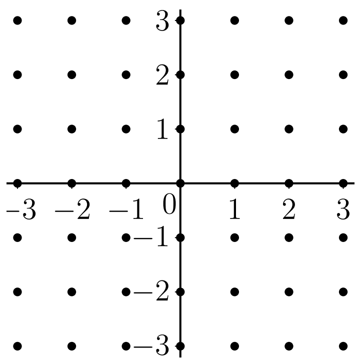
5. Conclure.

Problème n°2

Notations.
$\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
Le plan $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure usuelle de plan euclidien. La distance euclidienne sur $\mathbb{R}^2$ est notée d.
Les éléments de $\mathbb{R}^2$ sont représentés par des vecteurs colonnes à 2 lignes. On note

$$O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On appelle réseau l'ensemble $\mathbb{Z}^2$, inclus dans le plan $\mathbb{R}^2$. On le note $\mathcal{R}$. Le schéma ci-dessous représente une partie du réseau $\mathcal{R}$.



Partie A : $\mathbb{Z}$-bases du réseau

Soient $\mathcal{B} = (e'_1, e'_2)$ une famille de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. On dit que $\mathcal{B}$ est une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{R}$ si :

- $e'_1, e'_2 \in \mathcal{R}$.
- Tout élément X de $\mathcal{R}$ s'écrit de façon unique $X = ae'_1 + be'_2$, avec $a, b \in \mathbb{Z}$.

I. Soit $\mathcal{C} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $\mathcal{C}$ est une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{R}$.

II. Soient $e'_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ et $e'_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. On note :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}.$$

1. Soit $X \in \mathbb{R}^2$ et $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $X = xe'_1 + ye'_2$ si, et seulement si,

$$X = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

2. On suppose dans cette question que (e'_1, e'_2) est une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{R}$.

a. Montrer que $(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{Z}^4$.

b. Montrer qu'il existe $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{Z}^4$ tels que

$$x_1 e'_1 + y_1 e'_2 = e_1 \qquad\qquad x_2 e'_1 + y_2 e'_2 = e_2.$$

c. Soit $B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$. Montrer que $AB = I_2$.

d. En déduire que $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

3. On suppose dans cette question que $(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{Z}^4$ et que $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

a. Montrer que A est une matrice inversible et que les coefficients de A^{-1} sont tous des entiers relatifs.

b. Montrer que (e'_1, e'_2) est une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{R}$.

4. Conclure.

III. Soit $e'_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathcal{R}$.

1. Montrer que si e'_1 est le premier vecteur d'une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{R}$, alors a_1 et b_1 sont premiers entre eux.

2. Réciproquement, montrer que si a_1 et b_1 sont premiers entre eux, alors il existe un vecteur e'_2 de $\mathcal{R}$ tel que (e'_1, e'_2) soit une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{R}$.

3. Donner une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{R}$ dont le premier vecteur est $\begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Partie B : transformations linéaires du réseau

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application linéaire. Sa matrice dans la base $\mathcal{C} = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$ est notée A.

I. Montrer que $f(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{R}$ si, et seulement si, les coefficients de A sont tous des entiers relatifs.

II. On suppose dans cette question que $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$.

1. Montrer que $\mathrm{Im} f$ contient deux vecteurs linéairement indépendants.

2. En déduire que f est surjective, puis bijective.

3. Montrer que $f^{-1}(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{R}$.

4. Justifier que A est inversible et que les coefficients de A^{-1} sont tous des entiers relatifs.

5. Montrer que $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

III. On suppose dans cette question que les coefficients de A sont des entiers relatifs et que $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

1. En utilisant les résultats de la partie **A.**, montrer que $(f(e_1), f(e_2))$ est une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{R}$.

2. En déduire que $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$.

IV. Conclure.

Problème n°3

Notations.
$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.
Pour m et n deux entiers naturels, $[\![m, n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers k tels que $m \leqslant k \leqslant n$.
Pour n un entier naturel non nul, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et n colonnes, à coefficients réels.
On note I_n la matrice identité d'ordre n.
Le module d'un nombre complexe z est noté $|z|$.

Définitions.
Soit $(X^{(k)})_{k\geqslant 0}$ une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $X = (x_1, \ldots, x_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Pour tout entier naturel k, on pose $X^{(k)} = (x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$. On dit que la suite $(X^{(k)})_{k\geqslant 0}$ converge vers X si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la suite $(x_i^{(k)})_{k\geqslant 0}$ converge vers x_i.
Soit $(A^{(k)})_{k\geqslant 0}$ une suite de matrices de $M_n(\mathbb{R})$ et $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. Pour tout entier naturel k, on pose $A^{(k)} = (a_{i,j}^{(k)})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. On dit que la suite $(A^{(k)})_{k\geqslant 0}$ converge vers A si pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, la suite $(a_{i,j}^{(k)})_{k\geqslant 0}$ converge vers $a_{i,j}$.
Soit G un graphe orienté fini et soient i et j deux sommets de ce graphe. On dit que j est un sommet voisin de i s'il existe une arête orientée de G reliant i à j.

Partie A : marche aléatoire sur un graphe

On considère un graphe orienté fini dont les sommets sont numérotés de 1 à n. Un point se déplace aléatoirement d'un sommet à un autre de ce graphe au cours d'étapes, le nombre d'étapes pouvant tendre vers l'infini. À chaque étape, le point se déplace du sommet où il se trouve vers l'un des sommets voisins de façon équiprobable. Ceci entraîne notamment que la probabilité de passer du sommet i au sommet j ne dépend pas du rang de l'étape.
Pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$, on note $a_{i,j}$, la probabilité que le point passe du sommet i au sommet j ; en particulier, s'il n'y a pas d'arête reliant i à j, $a_{i,j} = 0$. La matrice dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est égal à $a_{i,j}$ est notée A. Cette matrice s'appelle la *matrice de transition* du graphe.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $P^{(k)}$ le vecteur ligne $\left(p_1^{(k)}, p_2^{(k)} \ldots, p_{n-1}^{(k)}, p_n^{(k)}\right)$, où pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $p_i^{(k)}$ est la probabilité que le point soit sur le sommet i à l'étape de rang k.

I. Résultats généraux

1. Justifier que, pour tout entier naturel k, $p_1^{(k)} + \ldots + p_n^{(k)} = 1$.

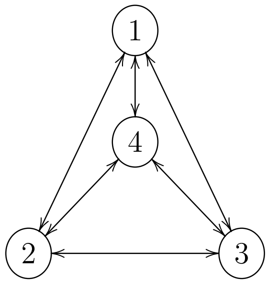
2. Montrer que, pour tout tout entier naturel k, $P^{(k+1)} = P^{(k)}A$.

3. En déduire, pour tout entier naturel k, une expression de $P^{(k)}$ en fonction de A, k et $P^{(0)}$.

4. On suppose que la suite de vecteurs $(P^{(k)})_{k\geqslant 0}$ converge vers un vecteur $P = (p_1, \ldots, p_n)$. Montrer que $PA = P$ et que $p_1 + \ldots + p_n = 1$.

II. Marche aléatoire sur un tétraèdre

Dans cette question, on suppose que G est le graphe ci-dessous :



On remarque que, lorsque le point est sur l'un des sommets du graphe, il a la même probabilité de se rendre sur chacun des trois autres sommets du graphe. On suppose qu'au départ, le point est sur le sommet 1, de sorte que :

$$P^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On pose :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Exprimer la matrice de transition A en fonction de U.

2. Calculer U^2 et U^3.

3. Montrer qu'il existe deux suites $(\alpha_k)_{k\geqslant 0}$ et $(\beta_k)_{k\geqslant 0}$ telles que pour tout entier naturel k :

$$U^k = \begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k & \beta_k & \beta_k \\ \beta_k & \alpha_k & \beta_k & \beta_k \\ \beta_k & \beta_k & \alpha_k & \beta_k \\ \beta_k & \beta_k & \beta_k & \alpha_k \end{pmatrix}.$$

Montrer de plus que, pour tout entier naturel k,

$$\begin{cases} \alpha_{k+1} = 3\beta_k \\ \beta_{k+1} = \alpha_k + 2\beta_k \end{cases}$$

4. En déduire que, pour tout entier naturel k, $\beta_{k+2} = 2\beta_{k+1} + 3\beta_k$.

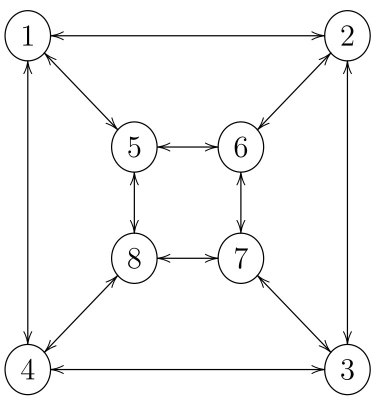
5. En déduire que, pour tout entier naturel k, $\beta_k = \dfrac{3^k - (-1)^k}{4}$ et $\alpha_k = \dfrac{3^k + 3(-1)^k}{4}$.

6. En déduire pour tout entier naturel k une expression de $P^{(k)}$.

7. Montrer que la suite de vecteurs $(P^{(k)})_{k\geqslant 0}$ converge et déterminer la limite de $P^{(k)}$ lorsque k tend vers $+\infty$.

III. Marche aléatoire sur une pyramide tronquée à base carrée

Dans cette question, on suppose que G est le graphe ci-dessous :



On rappelle que, lorsque le point est sur l'un des sommets du graphe, il a la même probabilité de se rendre sur chacun des sommets à qui il est relié. On suppose qu'au départ, le point est sur le sommet 1, de sorte que :

$$P^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note $X = \{1, 3, 6, 8\}$ et $Y = \{2, 4, 5, 7\}$.

1. Donner la matrice de transition A de ce graphe et calculer

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} A.$$

2. Montrer que si le point se trouve sur un sommet de la partie X à une étape donnée, il se trouvera sur un sommet de Y à l'étape suivante, et que s'il se trouve sur un sommet de Y à une étape donnée, il se trouvera sur un sommet de X à l'étape suivante.

3. **a.** Démontrer que les coefficients de $P^{(k)}$ dont les indices sont des éléments de X sont nuls si k est impair, et que les coefficients de $P^{(k)}$ dont les indices sont des éléments de Y sont nuls si k est pair.

b. La suite de vecteurs $(P^{(k)})_{k \geqslant 0}$ converge t-elle ?

IV. On revient au cas général d'un graphe G à n sommets. Parmi les trois liens logiques condition nécessaire, condition suffisante et condition nécessaire et suffisante, quel est celui qui relie les deux propositions suivantes ?

(i) la suite de vecteurs $(P^{(k)})_{k \geqslant 0}$ converge ;
(ii) il existe un vecteur $P = (p_1, \ldots, p_n)$ de $\mathbb{R}^n$, avec $p_1, \ldots, p_n$ positifs ou nuls et $p_1 + \ldots + p_n = 1$, tel que $PA = P$.

La réponse, qui devra être soigneusement justifiée, sera présentée sous deux formes : une phrase rédigée en français et une proposition mathématique comportant une implication ou une équivalence.