FICHE DE RÉVISION ALGÈBRE LINÉAIRE

1. Calcul matriciel

Exercice 1. Résoudre le système

$$\begin{bmatrix} -5 & 2 & 8 \\ 4 & -3 & -8 \\ -4 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

par la méthode du pivot de Gauß.

Exercice 2. Soient a, b, c et m des nombres réels. On considère le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} x - y + 2z & = a \\ mx + (1-m)y + 2(m-1)z & = b \\ 2x + my - (3m+1)z & = c \end{cases}$$

a. On suppose $m = -1$. Montrer qu'il existe des nombres réels x, y, z vérifiant le système si et seulement si $c = 3a + b$.

b. On suppose $m = -1$ et $c = 3a + b$. Trouver une solution du système et montrer que ce système à une infinité de solution.

Exercice 3. Soit A la matrice définie par

$$A = \begin{bmatrix} 2-i & i & 1 \\ i & 1 & 1+i \\ 3-i & i & 2 \end{bmatrix}$$

a. Montrer que la matrice A est inversible.

b. Calculer l'inverse de la matrice A.

Exercice 4. Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et A une matrice de $M_n(\mathbb{K})$.

a. Exprimer $\det(-A)$ en fonction de $\det(A)$.

b. On suppose que n est impair et que l'on a ${}^tA = -A$. Montrer que $\det(A) = 0$.

Exercice 5. Montrer qu'il n'existe de matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_3$.

2. Espaces vectoriels

Exercice 6. Donner les définitions d'espaces vectoriel, sous-espace vectoriel et d'application linéaire.

Exercice 7. Considérons le sous-ensemble $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$.

a. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

b. Le complémentaire de E dans $\mathbb{R}^3$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 8. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{F} = (u_1, ..., u_n)$ une famille de E. On pose

$$\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(\mathcal{F}) = \{\lambda_1 u_1 + ... + \lambda_n u_n \mid (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\}.$$

Montrer que $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(\mathcal{F})$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 9. Soient E un $\mathbb{K}$-esapce vectoriel et $\mathcal{F} = (u_1, ..., u_n)$ une famille de E. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes:

(1) $\forall (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \lambda_1 u_1 + ... + \lambda_n u_n = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_n = 0;$

(2) $\forall(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(\mu_1, ..., \mu_n) \in \mathbb{K}^n$, $\quad \lambda_1 u_1 + ... + \lambda_n u_n = \mu_1 u_1 + ... + \mu_n u_n \Rightarrow \lambda_1 = \mu_1, ..., \lambda_n = \mu_n$;

(3) $\forall i \in \{1, ..., n\}, \quad u_i \notin \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(\mathcal{F} \setminus \{u_i\})$.

Exercice 10. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Rappeler les définitions de famille libre, génératrice, base et dimension. Donner des exemples d'espace vectoriel de dimension infinie.

Exercice 11. Pour chacune des familles de $\mathbb{R}^2$ suivantes, dire si elle est génératrice, libre ou si elle constitue une base de $\mathbb{R}^2$:

a. $A = \{(2,1); (4,1)\}$.

b. $B = \{(-1,2); (4,3); (6,-1)\}$.

c. $C = \{(2,-3); (1,5); (0,0)\}$.

Exercice 12. Les familles suivantes sont-elles libres, génératrices dans $\mathbb{R}_4[X]$?

a. $X^3,\ X^2+1,\ X-1,\ X^4+X+1$.

b. $1,\ X+2,\ -X^2+X+4,\ X^4+X^3,\ X^4+X^3+2X^2$.

c. $X+1,\ X-1,\ X^2+X-1,\ X^3,\ X^4+X,\ X^4+X^2+X$.

Exercice 13. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F.

a. Rappeler les défintions de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

b. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E et que $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-esapce vectoriel de F.

c. Montrer que l'application linéaire f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0_E\}$.

d. Donner un exemple d'application lineaire bijective, injective et non surjective, non injective et surjective, ni injective ni surjective.

Exercice 14.

a. Rappeler le théorème du rang.

Soient E et F deux espaces vectoriel de même dimension finie n et f une application linéaire de E dans F.

b. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) f est injective;
(2) f est surjective;
(3) f est bijective.

Exercice 15. Soit f une application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x,y,z) = (x-y+2z, x+y-z, 2x-2y+5z).$$

a. Montrer que f est linéaire.

b. Déterminer $\ker f$.

c. f est elle bijective ?

Exercice 16. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{B} = (u_1, ..., u_n)$ une base de E.

a. Montrer que pour tout vecteur u de E, il existe des uniques éléments $\lambda_1, ..., \lambda_k$ de $\mathbb{K}$ vérifiant $u = \lambda_1 u_1 + ... + \lambda_n u_n$.

On pose alors $\mathrm{coord}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$.

b. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} \varphi : E & \to & \mathbb{K}^n \\ u & \mapsto & \mathrm{coord}_{\mathcal{B}}(u) \end{array}$$

est un morphisme d'espaces vectoriels.

c. Montrer que φ est bijective.

d. Quelle est la dimension de E? Conclure.

Exercice 17. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de bases respectives $\mathcal{B} = (u_1, ..., u_n)$ et $\mathcal{C} = (v_1, ..., v_m)$ et f une application linéaire de E dans F. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

a. Rappeler la définition de $\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$, la représentation matricielle de f relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

b. Soient f et g deux éléments de $\mathcal{L}(E, F)$ et λ un élément de $\mathbb{K}$. Rappeler la défintion de $f + g$ et λf.

c. Que peut-on dire de $\mathcal{L}(E, F)$ munis des deux opérations précédentes?

d. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} \eta : \mathcal{L}(E, F) & \to & M_{m,n}(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel.

e. Soit f dans $\mathcal{L}(E, F)$. Montrer que pout tout u dans E, on a $\mathrm{coord}_{\mathcal{C}}(f(u)) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \times \mathrm{coord}_{\mathcal{B}}(u)$.

Exercice 18. Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et de bases respectives $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$. Montrer que pour tout f dans $L(E, F)$ et g dans $L(F, G)$, on a

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = \mathrm{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g) \times \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f).$$

Exercice 19. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{B} = (u_1, ..., u_n)$ et $\mathcal{C} = (v_1, ..., v_n)$ deux bases de E. On pose $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \mathrm{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(Id_E)$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$.

a. Montrer que la matrice $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ est inversible d'inverse $P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$.

b. Montrer que pour toute application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ on a

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(f) = \left(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right)^{-1} \times \mathrm{mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) \times P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}.$$

Exercice 20. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

a. Montrer que f est bijectif et déterminer f^{-1}.

Posons $e_1' = e_1$, $e_2' = e_1 + e_2 - e_3$ et $e_3' = e_1 + e_2 + e_3$.

b. Montrer que $\mathcal{B}' = (e_1', e_2', e_3')$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

c. Déterminer la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}'$.

d. Donner les matrices de passages des $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.

e. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 21. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{B} = (u_1, ..., u_n)$ une base de E.

a. Montrer que pour toute matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ il existe une base $\mathcal{C}$ de E telle que P soit la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$.

Pour A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$, on pose $A \sim B$ s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

b. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $M_n(\mathbb{K})$.

Exercice 22. Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n.

a. Rappeler la définition et les propriétés élémentaires de $\det(u_1, ..., u_n)$ où $u_1, ..., u_n$ sont des vecteurs de $\mathbb{K}^n$.

b. Rappeler la définition et les propriétés élementaires de $\det(A)$ où A est une matrice carrée de $M_n(K)$.

c. Montrer que si deux matrices A et B sont semblables alors $\det(A) = \det(B)$.

Exercice 23. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E. Donner la défintion de valeur porpre et de vecteur porpre de f.

Exercice 24. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E.

a. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes:

(1) λ est une valeur propre de f;
(2) $f - \lambda \mathbf{1}_E$ n'est pas inversible;
(3) λ est racine de $\chi_f(X) = \det(f - XI_n)$

b. Un endomorphisme bijectif peut-il avoir 0 comme valeur prope?

c. Montrer que si λ est valeur propre de f alors λ^k est une valeur propre de f^k quel que soit k.

d. Qu'en est-il de la réciproque ?

Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$.

e. Rappeler la définition de $P(f)$.

f. Soit u un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ. Montrer qu'on a $P(f)(u) = P(\lambda)u$.

g. En déduire que si P est un polynome annulateur de f alors les valeurs propres de f sont des racines de P.

h. Qu'en est-il de la réciproque ?

i. Montrer que les projections ne peuvent avoir que 0 et 1 comme valeur propre.

Exercice 25. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Rappeler la défintion de $E = F \oplus G$.

Exercice 26. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, f un endormorphisme de E et λ une valeur propre de f.

a. Montrer que u est vecteur propre de f associé à la valeur propre λ si et seulement si $u \in E_\lambda = \ker(f - \lambda \mathbf{1}_E)$.

b. Soit λ et μ deux vecteurs propres distinctes de f. Montrer que E_λ et E_μ sont en somme directe.

Exercice 27. Enoncer le théorème d'Hamilton-Cayley.

Exercice 28.

a. Rappeler la définition d'endomorphisme diagonalisable.

b. Donner des conditions suffisantes (ou nécessaires et suffisantes) pour qu'un endomorphisme soit diagonalisble.

Exercice 29. Soit

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

a. Calculer le polynôme caractéristique de A.

b. Trouver les valeurs propres de A.

c. Calculer les espaces propres associés.

d. Quelles sont les multiplicités géométriques des valeurs propres ?

e. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 30. On désigne par E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, par P le sous-ensemble des fonctions paires et par I celui des fonctions inpaires.

a. Montrer que P et I sont des sous-espaces vectoriels de E.

b. Etablir la relation $E = P \oplus I$.