Université du Littoral **Année universitaire 2015-2016**
Master 1 ère année **Métiers de l'Enseignement en Mathématiques**

Préparation écrit algèbre-géométrie

Géométrie affine.

Soit K un corps commutatif.

Définition. Un espace affine est la donnée d'un couple $(E, \overrightarrow{E})$, où E est un ensemble non vide et $\overrightarrow{E}$ est un K-espace vectoriel, et d'une application de $E \times E$ dans $\overrightarrow{E}$ qui à (x, y) associe le vecteur $\overrightarrow{xy}$ vérifiant les conditions suivantes :

– Pour tous x, y et z dans E, on a $\overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} = \overrightarrow{xz}$ (relation dite de Chasles).

– Pour tout x dans E l'application $\varphi_x : E \to \overrightarrow{E}$ définie par $\varphi_x(y) = \overrightarrow{xy}$ est une bijection de E sur $\overrightarrow{E}$.

Exercice 1. Montrer qu'un espace vectoriel E peut toujours être munis d'une structure d'espace affine.

Théorème. *Soit $\{(a_i, \alpha_i) \mid i = 1, \ldots, p\}$ une famille de p points pondérés de $E \times K$ telle que la somme $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \neq 0$. Alors il existe un unique point g de E, tel que $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \overrightarrow{ga_i} = \overrightarrow{0}$. Ce point est appelé* barycentre du système de points pondérés *et noté $g = \mathrm{bary}\{(a_i, \alpha_i) \mid i = 1, \ldots, p\}$.*

Exercice 2. Démontrer le théorème précédent.

Définition. Soit $(E, \overrightarrow{E})$ un espace affine et V une partie non vide de E. On dit que V est une variété linéaire affine de E (abrégé VLA) si V est stable par barycentre. C'est à dire, si pour tout $a_1, \ldots, a_p \in V$ et tout $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in K$ de somme non nul, le point $\mathrm{bary}\{(a_i, \alpha_i) \mid i = 1, \ldots, p\}$ est aussi dans V.

Exercice 3. Donner des exemples d'ensemble qui sont des VLA et d'autres qui n'en sont pas.

Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur de $\overrightarrow{E}$ et x un point de E, on note $x + \overrightarrow{u}$ le point y où y est l'unique point de E vérifiant $\overrightarrow{xy} = \overrightarrow{u}$. Le point y est alors le *translaté* de x par $\overrightarrow{u}$.

Théorème. *Soient $(E, \overrightarrow{E})$ un espace affine, V une partie non vide de E et a_0 un point de V, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

$i)$ Il existe un point a de V et un sev $\overrightarrow{V}$ de $\overrightarrow{E}$ tel que $V = a + \overrightarrow{V}$.
$ii)$ L'ensemble $\{\overrightarrow{xa_0} \mid x \in V\}$ est un sous-ensemble de $\overrightarrow{E}$.
$iii)$ Si b est dans V alors, $\{\overrightarrow{xb} \mid x \in V\}$ est un sev de $\overrightarrow{E}$.
$iv)$ V est une variété linéaire affine de X.

Les sous-espaces vectoriels, définis en $i)$, $ii)$ et $iii)$ sont tous égaux et appelé la direction *de la VLA V.*

Exercice 4. Démonter ce théorème.

Définition. Si $(E, \overrightarrow{E})$ et $(F, \overrightarrow{F})$ sont deux espaces affine sur le même corps de base K, une application de X dans Y est dite linéaire affine si et seulement si l'image des barycentres de points de X est le barycentre des images des points affectés des mêmes coefficients.

Proposition 1. *Si f est une application linéaire affine de X dans Y alors il existe une unique application linéaire $\overrightarrow{f}$ de $\overrightarrow{X}$ dans $\overrightarrow{Y}$ telle que pour tout $x, y \in X$ on ait $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{xy}) = \overrightarrow{f(x)f(y)}$.*

Exercice 5. Démonter cette proposition.

Théorème. *Soient $(E, \overrightarrow{E})$ et $(F, \overrightarrow{F})$ deux espaces affines sur le même corps de base K et f une application de X dans Y. Si a est un point de X, on note f_a l'application de $\overrightarrow{X}$ dans $\overrightarrow{Y}$ définie par $f_a(\overrightarrow{ax}) = \overrightarrow{f(a)f(x)}$ pour tout $x \in E$. Alors les proposition suivantes sont équivalentes :*

$i)$ f est linéaire affine.
$ii)$ Il existe a dans E tel que f_a soit linéaire.
$iii)$ Pour tout a dans E, f_a est linéaire.