Université du Littoral
Licence 1 ère année

Année universitaire 2011-2012
Mathématiques et Informatique

TD d'Algèbre

1 – Applications

Exercice 1. Les applications suivantes sont-elles égales ?

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array} \qquad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{pour } x \neq 1 \\ 2 & \text{pour } x = 1 \end{cases} \end{array} \qquad h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{pour } x \neq 1 \\ 0 & \text{pour } x = 1 \end{cases} \end{array}$$

Exercice 2. Considérons les applications suivantes

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{Q} & \to & \mathbb{Q} \\ x & \mapsto & E(x) \end{array} \qquad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{Q} & \to & \mathbb{Q} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array} \qquad h : \begin{array}{rcl} \mathbb{Q} & \to & \mathbb{Q} \\ x & \mapsto & x+\frac{1}{2} \end{array}$$

A-t-on $f \circ g = g \circ f$? Et $f \circ h = h \circ f$?

Exercice 3. Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives ou bijectives (justifier) ? Lorsque c'est possible, donner l'application réciproque de f.

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x + 3$.

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$.

3. $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ définie par $f(x) = \cos(x)$.

4. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + y, 2x + 3y)$.

5. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = n + 1$.

6. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ définie par $f(n) = n + 1$.

Exercice 4. Trouver deux sous-ensembles E de $\mathbb{R}$ et F de $\mathbb{C}$ tels que la fonction $f : E \to F$ définie par $f(t) = e^{it}$ soit une bijection.

Exercice 5. Considérons l'application

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{N} \\ k & \mapsto & \begin{cases} 2k & \text{pour } k \geqslant 0 \\ -2k-1 & \text{pour } k < 0 \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que f est bien définie.

2. Montrer que f est une bijection.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. On suppose que pour tous nombres réel x, y tels que $x < y$, on a $f(x) < f(y)$. Montrer que l'application f est injective.

Exercice 7. Soient E, F, G des ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ des applications.

1. Montrer que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.

2. Montrer que si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.

3. Montrer que si $g \circ f$ est injective alors f est injective.

4. Monter que si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.

Exercice 8. Montrer la proposition suivante :

Proposition. Soit $f : E \to F$ une application.

$i)$ Pour toutes parties A, B de E, on a
– $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
– $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$,
$\star$ $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

$ii)$ Pour toutes parties A, B de F, on a
– $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,
– $A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$,
– $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Donner un exemple où l'inclusion $\star$ est stricte. Montrer que si f est injective, alors l'inclusion $\star$ devient une égalité.

Exercice 9. Soient A et B deux sous-ensembles non vides d'un ensemble fini E. Déterminer le cardinal de $A\Delta B = A \cup B \setminus A \cap B$.

Exercice 10. Soient A et B deux sous ensembles d'un ensemble E, soient C et D deux sous ensembles d'un ensemble F.

1. Montrer que $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$.

2. $A = [0, 1]$, $B = [\frac{1}{2}, 2]$, $C = [2, 3]$, et $D = [\frac{5}{2}, 4]$.Représenter les ensembles $A \times C$, $B \times D$ et $(A \cup B) \times (C \cup D)$ sur un même dessin. Que peut-on en conclure ?

Exercice 11. Soient E et F des ensembles finis non vides. Montrer que le nombre d'applications de E dans F est $(\mathrm{Card}\, F)^{\mathrm{Card}\, E}$.

Exercice 12. DM
Soient $n \geqslant 0$ un entier positif et E et F des ensembles à n éléments. Montrer qu'il y a $n!$ bijections de E sur F.

Exercice 13. Soit E un ensemble fini non vide.

1. Montrer que l'ensemble $P(E)$ des parties de E est en bijection avec l'ensemble des applications de E dans $\{0, 1\}$.

2. En déduire $\mathrm{Card}\, P(E) = 2^{\mathrm{Card}\, E}$.

Exercice 14. Soient E A et B deux sous-ensembles non vides d'un ensemble E. Considérons

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{P}(E) & \mapsto & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ & X & \mapsto & (A \cap X,\ B \cap X) \end{array}$$

1. Montrer que : f est injective $\Leftrightarrow A \cup B = E$.

2. Montrer que : f est surjective $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.

3. Supposons que $A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset$. Déterminer l'application réciproque de f.

Exercice 15. On dit qu'un ensemble E est dénombrable s'il existe une injection de E dans $\mathbb{N}$.

1. Montrer que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable.
(indice : considérer l'application $f(p, q) = 2^p 3^q$)

2. Montrer que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ est dénombrable.

3. Montrer que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

4. Montrer que $\mathbb{N}^m$ est dénombrable pour tout entier naturel m.

5. Montrer que $\mathbb{Z}^m$ est dénombrable pour tout entier naturel m.

6. Montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

7. Montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.

8. Montrer que $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable.