Université du Littoral — **Année universitaire 2011-2012**
Licence 1 ère année — **Mathématiques et Informatique**

TD d'Algèbre

2 – Relations

Exercice 1. Les relations suivantes sont-elles des relations d'ordre ? Lesquelles sont des ordres totaux ?

1. R est définie sur $\mathbb{R}$ par $xRy \iff x \leqslant y$.

2. R est définie sur $\mathbb{R}$ par $xRy \iff x < y$.

3. R est définie sur $\mathbb{N}^*$ par $xRy \iff x$ divise y.

4. R est définie sur $\mathbb{Z}^*$ par $xRy \iff x$ divise y.

5. R est définie sur $\mathbb{Q}^{+*}$ par $xRy \iff x$ divise y.

6. Soit E un ensemble. R est définie sur $\mathcal{P}(E)$ par $XRY \iff X \subset Y$.

7. R est définie sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ par $ARB \iff A = B \ ou \ \Big(\forall x \in A,\ \forall y \in B,\ x \leqslant y\Big)$.

8. R est définie sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ par $ARB \iff \exists x \in A,\ \exists y \in B,\ x \leqslant y$.

9. $\prec$ est définie sur $[-2,2]^2$ par $(x,y) \prec (x',y') \iff (x < x') \ ou \ (x = x' \ et \ y \leqslant y'$. (Représenter l'ensemble de des couples (x,y) tels que$(x,y) \prec (1,1)$.

Exercice 2. Les relations suivantes sont-elles des relations d'équivalence ?

1. R est définie sur $\mathbb{R}$ par $xRy \iff 2x = 3y - 1$. Tracer le graphe de cette relation.

2. R est définie sur $\mathbb{R}$ par $xRy \iff x^2 = y^2$. Tracer le graphe de cette relation.

3. R est définie sur $\mathbb{R}$ par $xRy \iff xe^y = ye^x$.

4. R est définie sur $\mathbb{C}$ par $xRy \iff |x| = |y|$. Déterminer et représenter les classes d'équivalence de R.

5. Soient E un ensemble, R une relation sur E transitive et réflexive. Soit S la relation définie par : $xSy \Leftrightarrow (xRy) \wedge (yRx)$.

Exercice 3. Soit R une relation sur un ensemble E. Montrer que si R est à la fois une relation d'ordre et une relation d'équivalence, alors R est la relation d'égalité.

Exercice 4. Soit $f : E \mapsto F$ une application surjective. Soit R la relation sur E définie par

$$xRy \Leftrightarrow f(x) = f(y).$$

1. Montrer que R est une relation d'équivalence.

Notons $E_R = \{[x]/x \in E\}$ et $\phi : E_R \mapsto F$ définie par $\phi([x]) = f(x)$.

2. Montrer que ϕ est bien définie.

3. Montrer que ϕ est une bijection.

Exercice 5. Sur $\mathbb{R}^2$, on considére la relation suivante : $(x,y)R(x',y') \iff x + 2y = x' + 2y'$.

1. Montrer que R est une relation d'équivalence.

2. Déterminer la classe d'équivalence du couple $(0,0)$.

3. Peut-on exprimer la classe de n'importe quel couple (x,y) à l'aide de $\Big[(0,0)\Big]$?

Exercice 6. *Preuve par neuf.*
On considère l'ensemble $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$. On définit une addition et une multiplication sur $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ par :

$$[x] + [y] = [x + y] \quad \text{et} \quad [x] \cdot [y] = [x \cdot y].$$

1. Vérifier que l'addition et la multiplication sont bien définies.

2. Soient $a,\ b,\ c$ et d quatres entiers naturels. Notons $x = 10a + b$ et $y = 10c + d$. Calculer les classes $[x]$, $[y]$, $[x \cdot y]$ et $[x] \cdot [y]$ dans $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$.