Algèbre : Correction Devoir 1

Exercice 1.
1. L'application n'est pas surjective car $f(\{1,2\}) = 3 = f(\{3\})$. N'étant pas injective elle ne peut pas être bijective. L'application est surjective car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f(\{n\}) = n$.
2. On trouve $f^{-1}(\{2\}) = \{\{2\}\}$, $f^{-1}(\{4\}) = \{\{1,3\},\{4\}\}$ et donc $f^{-1}(\{2,4\}) = \{\{2\},\{1,3\},\{4\}\}$.
3. Posons $A = \{a_1, ..., a_n\}$ avec $a_1 < ... < a_n$. On a alors

$$f(A) = a_1 + ... + a_n \geqslant a_n = \max(A) \quad \text{car } a_i > 0 \text{ pour } i = 1, ..., n-1.$$

De plus comme a_1 doit être au moins 1, on a $1 \leqslant a_1 < .. < a_n$ et donc $i \leqslant a_i$ pour tout $i = 1, ..., n$. On obtient alors

$$f(A) = a_1 + ... + a_n \geqslant 1 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{\mathrm{card}(A)(\mathrm{card}(A)+1)}{2}.$$

Exercice 2.
1. Soient x, y deux éléments de $Z(G)$ et g un élément de G. On a alors

$$\begin{aligned}
(x \cdot_G y) \cdot_G g &= x \cdot_G (y \cdot_G g) && \text{par associativité de } \cdot_G \\
&= x \cdot_G (g \cdot_G y) && \text{car } y \in Z(G) \\
&= (x \cdot_G g) \cdot_G y && \text{par associativité de } \cdot_G \\
&= (g \cdot_G x) \cdot_G y) && \text{car } x \in Z(G) \\
&= g \cdot_G (x \cdot_G y) && \text{par associativité de } \cdot_G
\end{aligned}$$

ce qui établit $x \cdot_G y \in Z(G)$. De plus, pour $x, g \in G$ on a

$$\begin{aligned}
x \cdot_G g = g \cdot_G x &\Leftrightarrow (x \cdot_G g) \cdot_G x^{-1} = (g \cdot_G x) \cdot_G x^{-1} \\
&\Leftrightarrow x \cdot_G (g \cdot_G x^{-1}) = g \cdot_G (x \cdot_G x^{-1}) && \text{par associativité de } \cdot_G \\
&\Leftrightarrow x \cdot_G (g \cdot_G x^{-1}) = g \\
&\Leftrightarrow x^{-1} \cdot_G (x \cdot_G (g \cdot_G x^{-1})) = x^{-1} \cdot_G g \\
&\Leftrightarrow (x^{-1} \cdot_G x) \cdot_G (g \cdot_G x^{-1})) = x^{-1} \cdot_G g && \text{par associativité de } \cdot_G \\
&\Leftrightarrow g \cdot_G x^{-1} = x^{-1} \cdot_G g
\end{aligned}$$

On a donc montrer $x \in Z(G) \Leftrightarrow x^{-1} \in Z(G)$. L'ensemble $Z(G)$ est donc bien un sous-groupe de $(G, \cdot_G)$.
2. Le groupe $Z(G)$ est abélien: Soient x et y des éléments de $Z(G)$. Comme x appartient à $Z(G)$ et que y est en particulier un élément de G, on a $x \cdot_G y = y \cdot_G x$, par définition de $Z(G)$.
3. Si G est abélien, on a $x \cdot_G g = g \cdot_G x$ pour tout $x, y \in G$. On a donc, dans ce cas, $Z(G) = G$.

Exercice 3.
- $\sigma_1 = (1\ 4)(2\ 6)(3\ 5)$ qui est à la fois une décomposition en cycles à supports disjoints et en produit de transpositions. Sa signature est $\varepsilon(\sigma_1) = (-1)^{6-3} = (-1)^3 = -1$.
- $\sigma_2 = (1\ 5\ 4\ 6)(2\ 3)$ qui est une décomposition en cycles à supports disjoints. Une écriture de σ_2 en produit de transpositions est : $\sigma_2 = (1\ 5)(5\ 4)(4\ 6)(2\ 3)$. Sa signature est $\varepsilon(\sigma_2) = (-1)^{6-4} = (-1)^2 = 1$.
- $\sigma_3 = (1\ 3\ 6\ 2\ 5)(4)$ qui est une décomposition en cycles à supports disjoints. Une écriture de σ_2 en produit de transpositions est : $\sigma_3 = (1\ 3)(3\ 6)(6\ 2)(2\ 5)$. Sa signature est $\varepsilon(\sigma_3) = (-1)^{6-4} = (-1)^2 = 1$.

Exercice 4. Le système (S) est équivalent à $AX = B$ avec

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

La matrice augmentée M est

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

En appliquant le pivot de Gauß sur M, on trouve

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 7 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 5 & -2 \\ -1 & -1 & -2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 7 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 7 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 9 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow -L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 9 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow -L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 - L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_4 \leftarrow \frac{-L_4}{2}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + 5L_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_4}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Le système S est donc régulier et à $x = 5$, $y = -5$, $z = 1$ et $t = -1$ comme unique solution.

Exercice 5 (5 points)**.**
1. L'ordre de $\mathfrak{S}_3$ est $3! = 6$.
2. Si $\mathfrak{S}_3$ contient un élément x d'ordre 6. Alors $\{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\}$ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_3$. Comme l'ordre de $\mathfrak{S}_3$ est 6 on doit avoir nécessairement $\mathfrak{S}_3 = \{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\}$. Or on a $x^i \cdot x^j = x^{i+j} = x^j \cdot x^i$, ce qui impliquerait que $\mathfrak{S}_3$ est abélien. Or on a

$$(12)(23) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \neq (23)(12) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Posons $\sigma = (1\ 2\ 3)$. On a $\sigma^2 = (1\ 3\ 2)$ et $\sigma^3 = 1$. Le groupe $H = \{1, \sigma, \sigma^2\}$ est donc un sous-groupe d'ordre 3 de $\mathfrak{S}_3$. Soit H' un sous-groupe d'ordre 3 de $\mathfrak{S}_3$. On a nécessairement $\{1\} \subseteq H \cap H'$. S'il existe $1 \neq x \in H \cap H'$ alors x est soit σ soit σ^2 on a alors $x^2 = \sigma^2$ ou $x^2 = \sigma$. Il en suit $x \neq x^2 \in H$ et donc $H = H'$. Pour que les groupes H et H' soient distincts il est donc nécessaires d'avoir $H \cap H' = \{1\}$. En particulier, on aurait $H' \subseteq \{1, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3)\}$ avec $\mathrm{card}(H') = 3$. Cependant, il n'existe pas de tel groupe :

- si $H' = \{1, (1\ 2), (2\ 3)\}$, $(1\ 2)(2\ 3) = (1\ 2\ 3) \notin H'$ et H' n'est pas un groupe;
- si $H' = \{1, (1\ 2), (1\ 3)\}$, $(1\ 3)(1\ 2) = (1\ 2\ 3) \notin H'$ et H' n'est pas un groupe;
- si $H' = \{1, (2\ 3), (1\ 3)\}$, $(2\ 3)(1\ 3) = (1\ 2\ 3) \notin H'$ et H' n'est pas un groupe.

4. Les sous-groupes d'ordre 2 de $\mathfrak{S}_3$ sont $\{1, (1\ 2)\}$, $\{1, (2\ 3)\}$ et $\{1, (1\ 3)\}$.
5. Les sous-groupe de $\mathfrak{S}_3$ sont $\{1\}$, $\{1, (1\ 2)\}$, $\{1, (2\ 3)\}$, $\{1, (1\ 3)\}$, $\{1, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$ et $\mathfrak{S}_3$.