Université du Littoral Côte d'Opale — Année universitaire 2010–2011
Licence 1ère année — Mathématiques et Informatique

Algèbre - Devoir

Durée : 2 h le lundi 4 avril 2011
Documents non autorisés

Exercice 1 (4 points)**.** Soit X l'ensemble des parties finies et non vide de $\mathbb{N}^*$. On note $f : X \to \mathbb{N}^*$ l'application ainsi définie : si $A \in X$, alors $f(A) =$ somme des éléments de A. Par exemple :

$$f(\{1,2,3\}) = 1+2+3 = 6$$

1. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ? (Justifier)
2. Déterminer $f^{-1}(\{2,4\})$.

Pour $A \in X$, on note $\mathrm{card}(A)$ le nombre d'éléments de A et $\max(A)$ le plus grand élément de A.

3. Démontrer les inégalités $\max(A) \leqslant f(A)$ et $\dfrac{1}{2}\,\mathrm{card}(A)(\mathrm{card}(A)+1) \leqslant f(A)$

Exercice 2 (4 points)**.** Soit $(G, \cdot_G)$ un groupe. On définie le centre $Z(G)$ de G par

$$Z(G) = \{x \in G \mid \forall g \in G,\ x \cdot_G g = g \cdot_G x\}$$

1. Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G.
2. Le groupe $Z(G)$ est-il abélien ? (Justifier)
3. Que peut-on dire de $Z(G)$ si G est abélien ?

Exercice 3 (4 points)**.** Pour chacune des permutations suivante, donner leur décomposition en cycles à supports disjoints, une décomposition en produit de transpositions ainsi que leur signatures :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 2 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 (5 points)**.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système suivant à l'aide de la méthode du pivot de Gauß.

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{lcr} 2x - z + 7t & = & 2 \\ 3x + 2y + z + 2t & = & 4 \\ -x - y - 2z & = & -2 \\ x + y + z - t & = & 2 \end{array} \right.$$

Exercice 5 (5 points)**.**

1. Quel est l'ordre de $\mathfrak{S}_3$?
2. Montrer que $\mathfrak{S}_3$ ne contient pas d'élément d'ordre 6.
3. Montrer que $\mathfrak{S}_3$ contient un unique sous groupe d'ordre 3.
4. Déterminer tous les sous-groupes d'ordre 2 de $\mathfrak{S}_3$.
5. Déduire de ce qui précède tous les sous-groupes de $\mathfrak{S}_3$.