Université du Littoral Côte d'Opale
Licence 1ère année

Année universitaire 2010–2011
Mathématiques et Informatique

Algèbre - Examen (Corrigé)

Exercice 1.

1) Un ensemble $A \neq \emptyset$ muni des lois $+_A : A \times A \to A$ et $\times_A : A \times A \to A$ est un anneau commutatifsi :

1. $(A, +_A)$ est un groupe commutatif :
   (a) $\forall x, y, z \in A,\ x +_A (y +_A z) = (x +_A y) +_A z$
   (b) $\exists 0_A \in A$ tel que $\forall x \in A,\ 0_A + x = x + 0_A = x$
   (c) $\forall x \in A,\ \exists y \in A,\ x +_A y = y +_A x = 0_A$
   (d) $\forall x, y \in A,\ x +_A y = y +_A x$
2. $\forall x, y, z \in A,\ x \times_A (y \times_A z) = (x \times_A y) \times_A z$
3. $\exists 1_A \in A$ tel que $\forall x \in A,\ 1_A \times_A x = x \times_A 1_A = x$
4. $\forall x, y, z \in A,\ x \times_A (y +_A z) = x \times_A y +_A x \times_A z$
5. $\forall x, y, z \in A,\ (x +_A y) \times_A z = x \times_A z +_A y \times_A z$
6. $\forall x, y \in A,\ x \times_A y = y \times_A x$

2) Un élément x de $(A, +, \times)$ est inversible si et seulement s'il existe $y \in A$ tel que $x \times y = y \times x = 1_A$. Notons A^* les éléments inversibles de A ; Comme $1_A \times 1_A = 1_A$, on a $1_A \in A^*$ et donc A^* est non vide. Soient x et x' deux éléments de A^*. Il existe alors y et y' dans A tel que $x \times y = y \times x = x' \times y' = y' \times x' = 1_A$. Des relations

$$(x \times_A x') \times_A (y' \times_A y) = x \times_A (x' \times_A y') \times_A y = x \times_A y = 1_A,$$
$$(y' \times_A y) \times_A (x \times_A x') = y' \times_A (y \times_A x) \times_A x' = y' \times_A x' = 1_A,$$

on obient $x \times x' \in A^*$. Tandis que des relations $x \times_y = y \times_x = 1_A$, on obtient $y = x^{-1} \in A^*$. En ajoutant les conditions 2 et 3 de la question précédente, on conclut que A^* est un groupe.

3) En appliqaut le pivot de Gauss à la matrice augmentée

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

On obtient

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$
$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

L'inverse de $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ est donc $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Exercice 2.

1) On trouve

$$G = \{[x]_{15} \text{ pour } x \in [1, 15] \text{ et } \operatorname{pgcd}(x, 15) = 1\} = \{[1]_{15}, [2]_{15}, [4]_{15}, [7]_{15}, [8]_{15}, [11]_{15}, [13]_{15}, [14]_{15}\}$$

2) Ce n'est pas un corps, car $[3]_{15}$ qui est différent de $[0]_{15}$ n'est pas inversible.

3) Soient $[x]_{15}, [y]_{15}$ des élements de $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$. Alors on a

$$\begin{aligned} \phi([x]_{15} + [y]_{15}) &= \phi([x + y]_{15}) = ([x + y]_5, [x + y]_3) = ([x]_5 + [y]_5, [x]_5 + [y]_5) \\ &= ([x]_5, [x]_3) + ([x]_5, [y]_3) = \phi([x]_{15}) + \phi([y]_{15}) \\ \phi([x]_{15} \times [y]_{15}) &= \phi([x \times y]_{15}) = ([x \times y]_5, [x \times y]_3) = ([x]_5 \times [y]_5, [x]_3 \times [y]_3) \\ &= ([x]_5, [x]_3) \times ([x]_5, [y]_3) = \phi([x]_{15}) \times \phi([y]_{15}) \end{aligned}$$

L'application ϕ est donc un morphisme.

4) On a $([x]_5, [y]_3) \times ([x']_5, [y']_3) = ([x]_5 \times [x']_5, [y] \times [y']_3)$ et l'élément neutre de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est $([1]_5, [1]_3)$. L'anneau $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ étant abélien, l'élément $([x]_5, [y]_3)$ de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est inversible si et seulement s'il existe $[x']_5 \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ et $[y']_3 \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ avec $([x]_5, [y]_3) \times ([x']_5, [y']_3) = ([1]_5, [1]_3)$. De $([x]_5, [y]_3) \times ([x']_5, [y']_3) = ([x]_5 \times [x']_5, [y]_3 \times [y']_3)$, on obtient que $([x]_5, [y]_3)$ est inversible si et seulement s'il existe $[x']_5 \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ et $[y']_3 \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ avec $[x]_5 \times [x']_5 = [1]_5$ et $[y]_3 \times [y']_3 = [1]_3$, c'est-à-dire, si et seulement si $[x]_5$ est inversible et $[y]_3$ est inversible car $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sont des anneaux commutatifs.

5) L'image d'un élément inversible par un morphisme d'anneau est inversible. En effet, soit $\psi : A \to B$ un morphisme d'anneau et x un élément de A^*. Alors on a $\psi(x \times_A x^{-1}) = \psi(x) \times_B \psi(x^{-1})$ et $\psi(x^{-1} \times_A x) = \psi(x^{-1}) \times_B \psi(x)$, ce qui implique que $\psi(x)$ est inversible et d'inverse $\psi(x^{-1})$. Comme les éléments de G sont inversibles, les élément de $\phi(G)$ sont des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. On a donc, par le **4)**

$$\phi(G) \subseteq (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^* = (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^*$$