Université du Littoral Côte d'Opale — Année universitaire 2010–2011
Licence 1ère année — Mathématiques et Informatique

Algèbre

Durée : 2h
Date : vendredi 24 juin 2011
Documents et calculatrices non autorisés

Exercice 1.
1) Soient E et F deux ensembles. Donner la définition d'une application injective f de E dans F.
2) Donner l'énoncé du théorème de Lagrange.
3) Soient $(A, +_A, \cdot_A)$, $(B, +_B, \cdot_B)$ deux anneaux. A quelles conditions une application ϕ de A vers B est-elle un morphisme d'anneau ?
4) Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{F}$ une famille libre de k vecteurs. Quelle est la relation entre n et k ? A quelle condition sur k, la famille $\mathcal{F}$ est-elle une base ?

Exercice 2. Soient E, F et G des ensembles, f une application de E dans F et g une application de F dans G. On pose $h = g \circ f$.
1) Montrer que si f et g sont bijectives alors h est bijective. Dans ce cas exprimer la fonction réciproque de h en fonction de celles de f et g.
2) Montrer que si h est surjective et g est injective, alors f est surjective.
3) Montrer que si h est injective et f est surjective, alors g est injective.

Exercice 3.
1) Décomposer les permutations suivantes en produit de cycles à supports disjoints:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 7 & 8 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 4 & 7 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2) En déduire l'ordre et la signature de σ_1 et σ_2.
3) Calculer σ_1^{175} et σ_2^{1999}.

Exercice 4. On considère la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1) Calculer l'inverse de A.
2) Vérifier que l'on a $A^2 = A + 2I_3$.
3) En déduire une expression de A^{-1} en fonction de A et I_3.
4) Vérifier que vous retrouvez bien le résultat obtenu en 1.

Exercice 5. On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure d'espace vectoriel usuel. Pour chacun des sous ensembles de $\mathbb{R}^3$ suivant, déterminer s'il est un sous-espace vectoriel. Si oui en donner une base et préciser sa dimension. Les réponses devront être justifiées.
1) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, x + y - z = x + y + z = 0\}$.
2) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, x^2 - z^2 = 0\}$.
3) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, e^x e^y = 0\}$.
4) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, z(x^2 + y^2) = 0\}$.