Algèbre - Examen

Durée : 3h
Date : jeudi 12 mai 2011
Documents et calculatrices non autorisés

Exercice 1.

1) Rappeler la définition d'un anneau commutatif.

2) Montrer que les éléments inversibles d'un anneau $(A, +, \times)$ forment un groupe.

3) Calculer l'inverse de la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 2. Pour tout entier $n \geqslant 2$ et x élément de $\mathbb{Z}$, on note $[x]_n$ la classe de x modulo n. On note G le groupe des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$.

1) Quels sont les éléments de G ?

2) L'anneau $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ est-il un corps ? Justifer.

3) Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathbb{Z}/15\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \\ [x]_{15} & \mapsto & ([x]_5 \ , \ [x]_3) \end{array}$$

est un isomorphisme d'anneau bien défini.

4) Montrer que (x, y) de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est inversible si et seulement si x appartient à $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^*$ et y appartient à $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^*$.

5) En déduire que G est isomorphe $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^*$, puis à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 3. On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ des vecteurs colonne de taille 3.

1) Donner, dans $\mathbb{R}^3$, un exemple de famille libre qui n'est pas génératrice.

2) Donner, dans $\mathbb{R}^3$, un exemple de famille génératrice qui n'est pas libre.

3) Montrer que les vecteurs

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

forment une base de $\mathbb{R}^3$. Notons $\mathcal{B}$ cette base.

4) Exprimer le vecteur $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ comme combinaison linéaire en les éléments de $\mathcal{B}$.

Exercice 4. On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$u_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad u_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

1) Montrer que le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par u_1 et u_2 est le même que celui engendré par u_3 et u_4.

2) Montrer que les vecteurs u_1 et u_2 sont linéairement indépendants. Compléter ces vecteurs pour former une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 5. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel finiment engendré et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1) Soit $\mathcal{B}$ une base de $F \cap G$. Montrer qu'il existe deux familles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ de vecteurs de E telles que la famille $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ soit une base de F et $\mathcal{B} \cup \mathcal{D}$ soit une base de G avec $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \mathcal{B} \cap \mathcal{D} = \emptyset$.

2) En déduire $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$.

Exercice 6. On note E l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour f et g deux éléments de E et λ un réel on définit les opération $+$ et $\cdot$ par

$$f+g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)+g(x) \end{array} \qquad \lambda \cdot f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda \cdot f(x) \end{array}$$

Nous admettons que, munis de ces deux opérations, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1) On note P l'ensemble des fonctions continues paires, c'est-à-dire vérifiant $f(x) = f(-x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$. Montrer que P est un sous-espace vectoriel de E.

2) Soit ϕ l'application de E dans E qui à f associe $\phi(f)$ définie par

$$\phi(f) : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{f(x)+f(-x)}{2} \end{array}$$

Montrer que ϕ est une application linéaire de E. On pourra montrer $\phi(\lambda \cdot f + g)(x) = \lambda \cdot \phi(f)(x) + \phi(g)(x)$ pour tout $f, g \in E$ et $\lambda, x \in \mathbb{R}$.

3) Montrer que P est l'image de ϕ.

4) Quel est le noyau de ϕ ?