Université du Littoral Côte d'Opale
Licence 1ère année

Année universitaire 2011–2012
Mathématiques et Informatique

Algèbre - Devoir

Durée : 2 h le vendredi 13 avril
Documents et calculatrices non autorisés

Exercice 1 (4 points). On considère les deux applications f et g de $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définies par $f(n) = 2n$ et

$$g(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ n & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

1. L'application f est-elle injective ? Est-elle surjective ? Est-elle bijective ?
2. Mêmes questions pour l'application g.
3. Expliciter $(g \circ f)(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que $f \circ g \neq id_{\mathbb{N}}$.
5. Expliciter $(f \circ g)(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 (2 points). Soient E un ensemble fini et A, B, C des parties de E. Montrer qu'on a

$$\text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(B \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C)$$

Exercice 3 (3 points). Soit E un ensemble non vide et A une partie de E. On définit la relation binaire $\mathcal{R}$ sur E par : $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $\{x, y\} \subseteq A$ ou $\{x, y\} \subseteq E \setminus A$.
1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Dessiner le graphe de $\mathcal{R}$ pour $E = [0, 10]$ et $A = [2, 5]$.

Exercice 4 (6 points). Soit $n \geqslant 2$ un entier. Une matrice $M = (a_{i,j})$ de $M_n(\mathbb{Q})$ est dite en damier si et seulement si $a_{i,j} = 0$ pour $j - i$ pair. On note par $+$ l'addition matricielle et par $\times$ la multiplication matricielle.
1. Parmi les matrices suivantes, les quelles sont en damier ?

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \ A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \ A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ A_4 = A_2 \times A_2$$

On note $D_n(\mathbb{Q})$ l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{Q})$ qui sont en damier.
2. Montrer que $D_n(\mathbb{Q})$ est un sous-groupe de $(M_n(\mathbb{Q}), +)$.
3. L'ensemble $D_n(\mathbb{Q})$ est-il stable par multiplication ?
4. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} \text{tr} : M_n(\mathbb{Q}) & \to & \mathbb{Q} \\ A = (a_{i,j}) & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,i} \end{array}$$

est un morphisme de groupes.
5. L'application tr est-elle un morphisme d'anneaux ?
6. Que vaut $\text{tr}(A)$ pour A dans $D_n(\mathbb{Q})$?
7. A-t-on $\text{tr}(A \times B) = \text{tr}(A) \times \text{tr}(B)$ pour toutes matrices A et B de $D_n(\mathbb{Q})$?

Exercice 5 (5 points). On considère le système suivant:

$$(S) \quad \begin{cases} x - z + t & = 0 \\ 2x + y + t & = 4 \\ 3y + z + t & = 1 \\ 2x + y + z & = 6 \end{cases}$$

1. Mettre ce système sous forme matricielle $AX = B$.
2. Résoudre (S) à l'aide du pivot de Gauß (uniquement).