Université du Littoral Côte d'Opale
Licence 1ère année

Année universitaire 2011–2012
Mathématiques et Informatique

# Algèbre - Examen

Durée : 3 h le jeudi 24 mai
Documents et calculatrices non autorisés

**Exercice 1.** Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? (Justifier) Si oui, donner leur inverse.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

**Exercice 2.** Montrer que l'ensemble $E$ des fonction de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ muni des opérations

$$\begin{array}{rccc} (f+g) : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)+g(x) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} (\lambda f) : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda f(x) \end{array}$$

est un espace vectoriel.

**Exercice 3.** On considère, dans $\mathbb{R}^4$, les vecteurs :

$$v_1 = (1,2,3,4), v_2 = (1,1,1,3), v_3 = (2,1,1,1), v_4 = (-1,0,-1,2), v_5 = (2,3,0,1)$$

1. Soit $F$ l'espace vectoriel engendré par $(v_1, v_2, v_3)$ et $G$ celui engendré par $(v_4, v_5)$.
   (a) Montrer que les familles $(v_1, v_2, v_3)$ et $(v_4, v_5)$ sont libres.
   (b) En déduire la dimension de $F$ et celle de $G$.
   (c) Le vecteur $w = (1,4,6,10)$ appartient-il à $F$ ? et à $G$ ?
2. Donner une base de $F + G$.
3. Calculer les dimensions $F \cap G$ et $F + G$.

**Exercice 4.** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $F, G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$.

1. (a) Montrer que l'espace vectoriel $F + G$ contient $F \cup G$.
   (b) Soit $H$ un sous-espace vectoriel de $E$ qui contienne $F \cup G$, montrer que $H$ contient $F + G$.
   (c) En déduire que $F+G$ est le plus petit (pour l'inclusion) sous-espace vectoriel de $E$ qui contient $F \cup G$.
2. Montrer que si $F \cup G$ est un espace vectoriel alors ou bien $F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$. On pourra faire un raisonnement par l'absurde.

**Exercice 5.** On note $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes et pour $n \geqslant 2$, on note $E_n$ le sous-espace vectoriel de $E$ constitué des polynômes de degré $\leqslant n$.

1. (a) L'ensemble des polynômes $P$ tels que $\deg(P) = n$ est-il aussi un sous-espace vectoriel de $E$ ?
   (b) Donner sans justification une base et la dimension de $E_n$.

2. On considère l'application suivante :

$$\begin{array}{rccl} \phi : & E & \to & \mathbb{R}^3 \\ & P & \mapsto & (P(-1), P(0), P(1)) \end{array}$$

   (a) Montrer que $\phi$ est linéaire.

   (b) Montrer que $\ker(\phi)$ est l'ensemble des polynômes divisibles par $X^3 - X$.

3. On se place dans $E_2$, espaces des polynômes sur $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égale à 2. On considère les polynômes $Q_1(X) = X, Q_2(X) = X^2 - 1, Q_3(X) = X + 1$ et $Q_4(X) = (X + 1)^2$.

   (a) La famille $\{Q_2, Q_3, Q_4\}$ est-elle une base de $E_2$ ?

   (b) On note $F$ l'ensembles des $P \in E_2$ tels que $P(-1) + P(1) = 0$. Montrer que $F$ est un sous-espace de $E_2$.

   (c) Montrer que $\{Q_1, Q_2\}$ est une base de $F$, et donner $\dim(F)$.

**Exercice 6.** Soient $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n$ et $u$ un endomorphisme de $E$ vérifiant la relation $u^2 = id$.

1. (a) Montrer que le noyau de $u$ est $\{0_E\}$.

   (b) En déduire que $u$ est bijective.

2. Soit $x$ un vecteur de $E$.

   (a) Montrer que les vecteurs $x_1 = u(x) + x$ et $x_2 = x - u(x)$ vérifient $u(x_1) = x_1$ et $u(x_2) = -x_2$.

   (b) En déduire $x_1 \in \ker(u - id)$ et $x_2 \in \ker(u + id)$.

3. Montrer que $E = \ker(u - id) \oplus \ker(u + id)$.

4. En déduire l'existence d'un entier $s \in [0, n]$ et d'une base de $E$ dans laquelle la matrice de $u$ s'écrit

$$\begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & -I_{n-s} \end{bmatrix}$$