Algèbre - Devoir Maison 1 - Corrigé

Exercice 1. Pour cet exercice, nous allons utiliser la proposition 1.19 du cours :

Proposition. *Soit E et F deux ensembles finis d'intersection vide. L'ensemble $E \cup F$ est alors fini et on a* $\operatorname{card}(E \cup F) = \operatorname{card}(E) + \operatorname{card}(F)$.

1. Montrons $E \cup F = G \cup F$. On a

$$\begin{aligned} E \cup F &= \{x \text{ tel que } x \in E \text{ ou } x \in F\} \\ &= \{x \text{ tel que } x \in E \setminus F \text{ ou } x \in F\} \\ &= \{x \text{ tel que } x \in G \text{ ou } x \in F\} \\ &= G \cup F \end{aligned}$$

Montrons $G \cap F = \emptyset$. Soit x un élément de G. Par construction de G on a $x \in E$ et $x \notin F$. On a donc montré que si x est un élément de G alors x n'est pas un élément de F. Comme un elément z de $G \cap F$ serait à la fois dans G et F, on a $G \cap F = \emptyset$. La proposition 1.19 du cours permet alors de conclure:

$$\operatorname{card}(E \cup F) = \operatorname{card}(G \cup F) = \operatorname{card}(G) + \operatorname{card}(F).$$

2. Montrons $E = G \cup (E \cap F)$. On a

$$\begin{aligned} G \cup (E \cap F) &= (G \cup E) \cap (G \cup F) \\ &= ((E \setminus F) \cup E) \cap ((E \setminus F) \cup F) && \text{par définition de } G \\ &= ((E \setminus F) \cup E) \cap E \\ &= E \cap E && (E \setminus F) \cup E = E \text{ car } E \setminus F \subseteq E \\ &= E \end{aligned}$$

Montrons $G \cap (E \cap F) = \emptyset$. Supposons par l'absurde qu'il existe $x \in G \cap (E \cap F)$. Comme en particulier x est un élément de $G = E \setminus F$, on a $x \in E$ et $x \notin F$. De même, x étant un élément de $E \cap F$ on a aussi $x \in E$ et $x \in F$. Au final x est un élément de E et de F et n'est pas un élément de F. Les relations $x \in F$ et $x \notin F$ étant incompatibles ont a une contradiction avec $G \cap (E \cap F) \neq \emptyset$. Il en suit que $G \cap (E \cap F) = \emptyset$.

La proposition 1.19 du cours permet alors de conclure:

$$\operatorname{card}(E) = \operatorname{card}(G \cup (E \cap F)) = \operatorname{card}(G) + \operatorname{card}(E \cap F).$$

3. L'égalité établie au **2** peut se réécrire $\operatorname{card}(G) = \operatorname{card}(E) - \operatorname{card}(E \cap F)$. En combinant cette dernière égalité avec celle établie au **1**, on obtient

$$\begin{aligned} \operatorname{card}(E \cup F) &= \operatorname{card}(G) + \operatorname{card}(F) \\ &= \operatorname{card}(E) - \operatorname{card}(E \cap F) + \operatorname{card}(F) \\ &= \operatorname{card}(E) + \operatorname{card}(F) - \operatorname{card}(E \cap F). \end{aligned}$$

Exercice 2. 1. Dans un premier temps montrons que l'on a
$$E \times F = \bigcup_{x \in E} F_x.$$
Par définition, $E \times F$ est égal à $\{(x, y)$ tel que $x \in E$ et $y \in F\}$. Soit x un élément de E. On a alors $F_x = \{(x, y)$ tel que $y \in F\}$. Comme (x, y) est un élément de $E \times F$ pour tout y de F, on a $F_x \subseteq E \times F$. Ceci étant vrai pour tout x de E, on obtient
$$\bigcup_{x \in E} F_x \subseteq E \times F$$
Réciproquement, soit z un élément de $E \times F$. Par définition de $E \times F$, il existe $x \in E$ et $y \in F$ tels que $z = (x, y)$. Par définition de F_x, le couple $z = (x, y)$ est un élément de F_x avec $x \in E$. On a donc montré
$$E \times F \subseteq \bigcup_{x \in E} F_x$$
Les deux inclusions donnent alors
$$E \times F = \bigcup_{x \in E} F_x$$
Pour établir
$$E \times F = \bigsqcup_{x \in E} F_x,$$
il nous reste à montrer que les ensembles F_x sont deux à deux disjoints. Soient x et x' deux éléments de E avec $x \neq x'$. Supposons par l'absurde que z soit un élément de $F_x \cap F_{x'}$. Il existerait alors y et y' dans F tels que $z = (x, y)$ et $z = (x', y')$. On devrait donc avoir $(x, y) = (x', y')$ ce qui est icompatible avec le choix $x \neq x'$. L'ensemble $F_x \cap F_{x'}$ et donc vide. Il en suit que les F_x, pour $x \in E$, sont deux à deux disjoints et donc qu'on a bien
$$E \times F = \bigsqcup_{x \in E} F_x.$$

2. Le plus simple est de construire une bijection entre l'esemble F et l'ensemble F_x. Soit x un élément de E. On définit alors une application f_x de la manière suite:
$$\begin{array}{rcl} f_x : F_x & \to & F \\ (x, y) & \mapsto & y \end{array}$$
Montrons que f_x est une bijection. L'application f_x et surjective car pour tout $y \in F$, le couple (x, y) est un élément de F_x et $f_x((x, y))$ est égale à y. Soient z et z' deux éléments de F_x tels que $f_x(z) = f_x(z')$. Par définition de F_x, il existe y et y' deux éléments de F tels que $z = (x, y)$ et $z' = (x, y')$. La relation $f_x(z) = f_x(z')$ implique alors $f_x((x, y)) = f_x((x, y'))$ puis la relation $y = y'$ (par construction de f_x). On a donc $(x, y) = (x, y')$ puis $z = z'$. La fonction f_x est donc injective.

3. Au **1** on a établi
$$E \times F = \bigsqcup_{x \in E} F_x.$$
La proposition 1.28 du cours donne alors
$$\mathrm{card}(E \times F) = \sum_{x \in E} \mathrm{card}(F_x).$$
Au **2** on a montré l'égalité $\mathrm{card}(F_x) = \mathrm{card}(F)$, on a donc
$$\mathrm{card}(E \times F) = \sum_{x \in E} \mathrm{card}(F).$$
La somme précédente contenant $\mathrm{card}(E)$ termes identiques (les $\mathrm{card}(F)$), on obtient:
$$\mathrm{card}(E \times F) = \sum_{x \in E} \mathrm{card}(F) = \mathrm{card}(E) \times \mathrm{card}(F).$$

Exercice 3.

1. Montrons que l'application χ est surjective, c'est-à-dire, que pour toute fonction ϕ de F il existe $A \in P(E)$ tel que $\phi = \chi(A)$. Soit ϕ un élément de F, c'est-à-dire, une application de E dans $\{0, 1\}$ (définition de F). Posons $A = \phi^{-1}(\{1\})$. Montrons que l'application ϕ est alors égale à l'application χ_A. Les applications ϕ et χ_A sont toutes les deux des fonctions de E dans $\{0, 1\}$. Il reste donc à montrer que $\phi(x) = \chi_A(x)$ pour tout élément x de E. Soit x un élément de E. On a

$$\begin{aligned} \phi(x) = 1 &\Leftrightarrow x \in A && \text{par construction de } A \\ &\Leftrightarrow \chi_A(x) = 1 && \text{par défintion de } \chi_A \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} \phi(x) = 0 &\Leftrightarrow x \notin A && \text{par construction de } A \\ &\Leftrightarrow \chi_A(x) = 0 && \text{par défintion de } \chi_A \end{aligned}$$

On a donc bien $\phi(x) = \chi_A(x)$ pour tout $x \in E$. Il en suite l'égalité $\phi = \chi_A$ et donc $\phi = \chi(A)$ (car par définition de χ, on a $\chi(A) = \chi_A$ pour tout $A \in P(E)$). L'application χ est donc surjective.

2. Montrons que l'application χ est injective, c'est-à-dire, que pour tout élément A et B de $P(E)$, la relation $\chi(A) = \chi(B)$ implique $A = B$. Soient A et B deux éléments de $P(E)$ (c'est-à-dire, deux parties de E) vérifiant $\chi(A) = \chi(B)$. Pour $x \in E$, on a

$$\begin{aligned} x \in A \Leftrightarrow &\ \chi_A(x) = 1 && \text{par défintion de } \chi_A \\ \Leftrightarrow &\ (\chi(A))(x) = 1 && \text{par construction de } \chi \\ \Leftrightarrow &\ (\chi(B))(x) = 1 && \text{car les application } \chi(A) \text{ et } \chi(B) \text{ sont égales par hypothèse} \\ \Leftrightarrow &\ \chi_B(x) = 1 && \text{car construction de } \chi \\ \Leftrightarrow &\ x \in B && \text{par défintion de } \chi_B \end{aligned}$$

La relation $x \in A \Leftrightarrow x \in B$ impliquant donc $A = B$, la fonction χ est injective.

3. Par le **1** et **2**, l'application χ est bijective. On a donc $\mathrm{card}(P(E)) = \mathrm{card}(F)$. Comme F est l'ensemble des applications de E dans $\{0, 1\}$, la propositionition 1.30 du cours implique $\mathrm{card}(F) = 2^{\mathrm{card}(E)}$ et donc $\mathrm{card}(P(E)) = 2^{\mathrm{card}(E)}$.