

Algèbre - Devoir Maison 1

Exercice 1. Le but de cet exercice est de démontrer la proposition 1.24 du cours. Soient E et F deux ensembles finis et G l'ensemble défini par $G = E \setminus F$.

1. Montrer $\text{card}(E \cup F) = \text{card}(G) + \text{card}(F)$.
2. Montrer $\text{card}(E) = \text{card}(G) + \text{card}(E \cap F)$.
3. En déduire $\text{card}(E \cup F) = \text{card}(E) + \text{card}(F) - \text{card}(E \cap F)$.

Exercice 2. Le but de cet exercice est de démontrer la proposition 1.29 du cours. Soient E et F deux ensembles finis. Pour $x \in E$, on pose $F_x = \{(x, y), y \in F\}$.

1. Montrer que l'on a

$$E \times F = \bigsqcup_{x \in E} F_x$$

2. Montrer que pour tout $x \in E$, on a $\text{card}(F_x) = \text{card}(F)$.
3. Utiliser la proposition 1.28 pour établir la relation $\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$.

Exercice 3. Le but de cet exercice est de démontrer la proposition 1.32 du cours. Soit E un ensemble fini. Pour tout sous-ensemble A de E , on définit l'application

$$\begin{aligned} \chi_A : E &\rightarrow \{0, 1\} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \in E \setminus A \end{cases} \end{aligned}$$

On note F l'ensemble des applications de E dans $\{0, 1\}$. Soit χ l'application définie par

$$\begin{aligned} \chi : P(E) &\rightarrow F \\ A &\mapsto \chi_A \end{aligned}$$

où $P(E)$ est l'ensemble des sous-ensembles (ou parties) de E .

1. Montrer que l'application χ est surjective.
2. Montrer que l'application χ est injective.
3. En déduire qu'on a $\text{card}(P(E)) = \text{card}(F) = 2^{\text{card}(E)}$.