Algèbre - Devoir Maison 2 - Corrigé

Exercice 1.

1. Si i et j sont deux entiers vérifiant $f(i) = f(j)$, c'est-à-dire, qu'on a $2i = 2j$ alors nécessairement $i = j$. La fonction f est donc injective. La fonction f n'est pas surjective car seuls les nombres pairs sont images par f; le nombre 1 n'a pas d'antécédent pour f. La fonction f n'étant pas surjective elle ne peut pas être bijective.

2. La fonction g n'est pas injective car on a $g(3) = g(6) = 3$. Montrons que g est surjective. Soit i un entier. L'entier $2i$ étant pair on a $g(2i) = i$. La fonction g est donc bien surjective. Elle ne peut pas être bijective car elle n'est pas injective.

3. Soit n un entier. On a $f(n) = 2n$ et comme $2n$ est pair on a $g(2n) = n$. On a donc $g(f(n)) = g(2n) = n$ d'où $g \circ f = id_{\mathbb{N}}$.

4. La relation $(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(3) = 6$ implique $f \circ g \neq id_{\mathbb{N}}$.

5. Pour n un entier pair, on a $(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f(n/2) = n$. Pour n un entier impair, on a $(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f(n) = 2n$. la fonction $f \circ g$ est donc donnée par

$$(f \circ g)(n) = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ est pair} \\ 2n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Exercice 2. Nous allons utiliser la relation $\text{card}(E \cup F) = \text{card}(E) + \text{card}(F) - \text{card}(E \cap F)$ établie en cours. Posons $E = A$ et $F = B \cup C$. La relation du cours donne alors

$$\begin{aligned} \text{card}(A \cup B \cup C) &= \text{card}(E \cup F) \\ &= \text{card}(E) + \text{card}(F) - \text{card}(E \cap F) \\ &= \text{card}(A) + \text{card}(B \cup C) - \text{card}(A \cap (B \cup C)) \end{aligned}$$

On a aussi $\text{card}(B \cup C) = \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(B \cap C)$ et donc

$$\text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(B \cap C) - \text{card}(A \cap (B \cup C))$$

De $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ on obtient, toujours en utilisant la relation du cours,

$$\text{card}(A \cap (B \cup C)) = \text{card}((A \cap B) \cup (A \cap C)) = \text{card}(A \cap B) + \text{card}(A \cap C) - \text{card}(A \cap B \cap A \cap C).$$

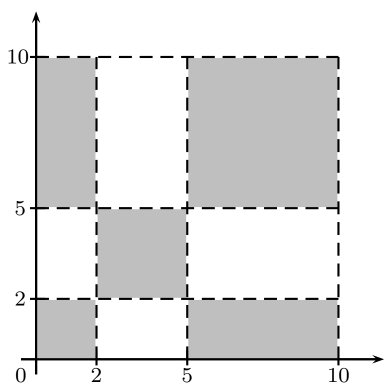
L'ensemble $A \cap B \cap A \cap C$ étant exactement $A \cap B \cap C$ on obient

$$\text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(B \cap C) - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C).$$

Exercice 3.

1. La relation $\mathcal{R}$ est réflexive : soit $x \in E$ alors $\{x, x\} = \{x\}$ est inclus dans A si $x \in A$ et inclus dans $E \setminus A$ sinon. La relation $\mathcal{R}$ est symétrique : soient x et y deux éléments de E tels que $x\mathcal{R}y$. On a donc $\{x, y\} \subseteq A$ ou bien $\{x, y\} \subseteq E \setminus A$. Comme $\{x, y\} = \{y, x\}$, il en est de même pour $\{y, x\}$, ce qui implique $y\mathcal{R}x$. La relation $\mathcal{R}$ est transitive : soient x, y et z trois éléments de E tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. On a encore $\{x, y\} \subseteq A$ ou $\{x, y\} \subseteq E \setminus A$. Si on a $\{x, y\} \subseteq A$ alors la relation $y\mathcal{R}z$ implique $z \in A$ et donc $\{x, z\} \subseteq A$ puis $x\mathcal{R}z$. Si on a $\{x, y\} \subseteq E \setminus A$ alors la relation $y\mathcal{R}z$ implique $z \in E \setminus A$ et donc $\{x, z\} \subseteq E \setminus A$ puis $x\mathcal{R}z$. La relation $\mathcal{R}$ est donc bien une relation d'équivalence.

2.



Exercice 4.

1. Les matrices A_1 et A_2 sont en damier. La matrice A_3 n'est pas en damier car $a_{1,1}$ est différent de 0 alors que $1-1=0$ est pair. La matrice A_4 vaut

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

qui n'est pas en damier pour la même raison que A_3.

2. Soient A et B deux matrices de $D_n(\mathbb{Q})$. La matrice nulle étant en damier, l'ensemble $D_n(\mathbb{Q})$ est non vide. Posons $C = A + B$. Soient i et j deux entiers de $\{1, ..., n\}$ tels que $j - i$ soit pair. Comme $j - i$ est pair et que les matrices A et B sont en damier on a $a_{i,j} = b_{i,j} = 0$ puis $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j} = 0 + 0 = 0$. On a donc $C = A+B \in D_n(\mathbb{Q})$. Posons $D = -A$. Soient i et j deux entiers de $\{1, ..., n\}$ tels que $j-i$ soit pair. Comme $j-i$ est pair et que la matrice A est en damier on a $a_{i,j} = 0$ puis $d_{i,j} = -a_{i,j} = -0 = 0$. On a donc $D = -A \in D_n(\mathbb{Q})$. L'ensemble $D_n(\mathbb{Q})$ étant non vide, stable par addition et opposée, c'est un sous groupe de $(M_n(\mathbb{Q}), +)$.

3. Non car A_2 appartient à $D_3(\mathbb{Q})$ et $A_4 = A_2 \times A_2$ n'appartient pas à $D_3(\mathbb{Q})$.

4. Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{Q})$. Posons $C = A+B$. Pour i et j dans $\{1, ..., n\}$, on a $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$ et donc

$$\operatorname{tr}(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + b_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + \sum_{i=1}^{n} b_{i,i} = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$$

L'application tr est donc bien un morphisme de groupe.

5. L'application tr n'est pas un morphisme d'anneau car on $\operatorname{tr}(A_2) = 0$ et $\operatorname{tr}(A_4) = 4$ or par définition $A_4 = A2 \times A_2$. On a donc pas la relation $\operatorname{tr}(A_2 \times A_2) = \operatorname{tr}(A_2) \times \operatorname{tr}(A_2)$.

6. Si i est un entier alors $i - i = 0$ est pair. Donc le coefficient (i, i) d'une matrice en damier est toujours nul. On a donc $\operatorname{tr}(A) = 0$ pour tout $A \in D_n(\mathbb{Q})$.

7. Non car la matrice A_2 appartient à $D_3(\mathbb{Q})$ et $\operatorname{tr}(A_4) = 4 \neq 0 = \operatorname{tr}(A_2) \times \operatorname{tr}(A_2)$.

Exercice 5.

1. On trouve

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

2. Notons M la matrice A augmentée de B:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

L'algorithme du pivot de Gauß donne:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 6 \end{bmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 6 \end{bmatrix} \underset{L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 4 & -11 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 6 \end{bmatrix} \underset{L_4 \leftarrow L_4 - L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & 4 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \underset{L_3 \leftrightarrow L_4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 4 & -11 \end{bmatrix}$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 + 5L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \underset{L_4 \leftarrow -L_4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Le système (S) à une seul solution qui est $x = 2, y = -1, z = 3$ et $t = 1$.