Algèbre - Devoir - Correction

Exercice 1.

1. Une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est une relation d'équivalence si elle est :

- Réfléxive : $\forall x \in E,\ x\mathcal{R}x$;
- Symétrique : $\forall x, y \in E,\ x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$;
- Transitive : $\forall x, y, z \in E,\ x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}z$.

2. Montrons que $\mathcal{R}'$ est réflexive. Soit (x_1, y_1) un élément de $E \times E$. Comme $\mathcal{R}$ est réfléxive, on a $x_1\mathcal{R}x_1$ et $y_1\mathcal{R}y_1$ ce qui implique $(x_1, y_1)\mathcal{R}'(x_1, y_1)$ et donc que $\mathcal{R}'$ est réfléxive. Montrons que $\mathcal{R}'$ est transitive. Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) deux éléments de $E \times E$ tels que $(x_1, y_1)\mathcal{R}'(x_2, y_2)$. On a alors $x_1\mathcal{R}x_2$ et $y_1\mathcal{R}y_2$. Comme $\mathcal{R}$ est symétrique on a $x_2\mathcal{R}x_1$ et $y_2\mathcal{R}y_1$, puis $(x_2, y_2)\mathcal{R}'(x_1, y_1)$. La relation $\mathcal{R}'$ est donc symétrique. Montrons que $\mathcal{R}'$ est transitive. Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2) et (x_3, y_2) trois éléments de $E \times E$ tels que $(x_1, y_1)\mathcal{R}'(x_2, y_2)$ et $(x_2, y_2)\mathcal{R}'(x_3, y_3)$. On alors $x_1\mathcal{R}x_2$ et $x_2\mathcal{R}x_3$. Comme $\mathcal{R}$ est transitive, on a aussi $x_1\mathcal{R}x_3$. Le même raisonnement sur les y donne $y_1\mathcal{R}y_3$. La relation $(x_1, y_1)\mathcal{R}'(x_3, y_3)$ est donc vraie. Il s'en suit que la relation $\mathcal{R}'$ est transitive. La relation $\mathcal{R}'$ étant réfléxive, symmétrique et transitive, c'est une relation d'équivalence.

3. Montrons que $\mathcal{R}$ est réfléxive. Soit x un élément de E. Comme $\mathcal{R}'$ est réflexive, on a $(x, x)\mathcal{R}'(x, x)$ et donc $x\mathcal{R}x$. Montrons que $\mathcal{R}$ est symétrique. Soient x et y deux élément de E tels que $x\mathcal{R}y$. On a alors $(x, x)\mathcal{R}'(y, y)$. Comme $\mathcal{R}'$ est symétrique, on a $(y, y)\mathcal{R}'(x, x)$ et donc $y\mathcal{R}x$. Montrons que $\mathcal{R}$ est transitive. Soient x, y et z trois éléments de E vérifiant $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. On a alors $(x, x)\mathcal{R}'(y, y)$ et $(y, y)\mathcal{R}'(z, z)$. La relation $\mathcal{R}'$ étant transitive, on a aussi $(x, x)\mathcal{R}'(z, z)$, ce qui implique $x\mathcal{R}z$. La relation $\mathcal{R}$ est donc trnsitive. La relation $\mathcal{R}$ étant symmétrique, réfléxive et transitive, c'est une relation d'équivalence.

Exercice 2.

1. On a $f(0, 1) = 0 - 1^2 = -1$ et $f(0, -1) = 0 - (-1)^2 = 0 - 1 = -1$. La fonction f n'est donc pas injective.

2. Soit z un réel. On a $f(z, 0) = z - 0^2 = z$. La fonction f est donc surjective.

3. Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $g(x) = (x, 0)$. Pour tout réel x, on a

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x, 0) = x - 0^2 = x.$$

La fonction $f \circ g$ est donc bien l'identité sur $\mathbb{R}$.

4. Montrons que h est injective. Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) deux éléments de $\mathbb{R}^2$ vérifiant $h(x_1, y_1) = h(x_2, y_2)$. De la realtion $h(x_1, y_1) = h(x_2, y_2)$ on obtient $(x_1 + y_1^2, y_1) = (x_2 + y_2^2, y_2)$. Par définition de l'égalité de couple, on a $y_1 = y_2$ ainsi que $x_1 + y_1^2 = x_2 + y_2^2$. Grace à $y_1 = y_2$, la relation $x_1 + y_1^2 = x_2 + y_2^2$ devient $x_1 + y_1^2 = x_2 + y_1^2$. On a donc aussi $x_1 = x_2$. On a ainsi établi $h(x_1, y_1) = h(x_2, y_2) \implies (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$. La relation h est donc injective. Montrons que h est surjective. Soit (u, v) un élément de $\mathbb{R}^2$. On vérifie

$$h(u - v^2, v) = (u - v^2 + v^2, v) = (u, v),$$

ce qui implique la surjectivité de h. La fonction h étant injective et sujrective elle est bijective.

5. Soit (x, y) un élément de $\mathbb{R}^2$, on a

$$(f \circ h)(x, y) = f(h(x, y)) = f(x + y^2, y) = x + y^2 - y^2 = x.$$

Exercice 3.

1. On a soit $x \in f(x)$ soit $x \notin f(x)$. Si x appartient à $f(x)$ alors x appartient aussi à $f(x) \cup A$ car $f(x) \subseteq f(x) \cup A$. Si x n'appartient pas à $f(x)$ alors x est élément de A par définition de A. Dans ce cas on a $x \in A \subseteq f(x) \cup A$. On a donc bien $x \in f(x) \cup A$. Montrons l'autre relation. Supposons par l'absurde qu'on ait $x \in f(x) \cap A$. En paritculier, on aurait $x \in f(x)$ et donc $x \notin A$. Or la relation $x \in f(x) \cap A$ implique aussi $x \in A$. Ce qui est impossible et donc $x \notin f(x) \cap A$.

2. Supposons par l'absurde $f(x) = A$. On alors $f(x) \cup A = A = f(x)$. La relation $x \in f(x) \cup A$ établie au **1** implique alors $x \in A$ et $x \in f(x)$. Il s'en suit $x \in f(x) \cap A$, ce qui est impossible par le **1**. On a donc $f(x) \neq A$.

3. L'ensemble A est un élément de $\mathcal{P}(E)$. L'ensemble A n'a pas d'antécédant par f, sinon il existerai $x \in E$ tel que $f(x) = A$, ce qui est impossible par **2**. La fonction f ne peut donc pas être surjective.

Exercice 4. 1. On trouve

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 3 & 0 \\ 3 & 8 & 7 & 11 \\ -2 & -8 & -2 & 6 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 13 \\ 18 \end{bmatrix}$$

2. Notons M la matrice A augmentée de B:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 7 & 3 & 0 & -5 \\ 3 & 8 & 7 & 11 & 13 \\ -2 & -8 & -2 & 6 & 18 \end{bmatrix}$$

L'algorithme du pivot de Gauß donne:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 7 & 3 & 0 & -5 \\ 3 & 8 & 7 & 11 & 13 \\ -2 & -8 & -2 & 6 & 18 \end{bmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 3 & 8 & 7 & 11 & 13 \\ -2 & -8 & -2 & 6 & 18 \end{bmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 4 & 8 & 16 \\ -2 & -8 & -2 & 6 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 + 2L_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 4 & 8 & 16 \\ 0 & -2 & 0 & 8 & 16 \end{bmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 13 \\ 0 & -2 & 0 & 8 & 16 \end{bmatrix} \underset{L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 13 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\underset{L_4 \leftarrow \frac{1}{2} L_4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \underset{L_3 \leftrightarrow L_4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 13 \end{bmatrix} \underset{L_4 \leftarrow L_4 - 5L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -12 \end{bmatrix}$$

$$\underset{L_4 \leftarrow -\frac{1}{4} L_4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -15 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Le système (S) a donc une unique solution qui est $x = -15, y = 4, z = -1$ et $t = 3$.

Exercice 5.

1. Notons e l'élément neutre de G et $\cdot$ la loi de G. Pour tout $y \in G$, on a $e \cdot y = y \cdot e$. L'élément e est donc dans H. L'ensemble H est en particulier non vide. Soient u et v deux élément de H. Montrons que le produit uv est aussi un élément de H. Soit y un élément de G. On a

$$\begin{aligned} (u \cdot v) \cdot y &= u \cdot (v \cdot y) && \text{par associativité de } \cdot \\ &= u \cdot (y \cdot v) && \text{car } v \in H \\ &= (u \cdot y) \cdot v && \text{par associativité de } \cdot \\ &= (y \cdot u) \cdot v && \text{car } u \in H \\ &= y \cdot (u \cdot v) && \text{par associativité de } \cdot \end{aligned}$$

L'élément $u \cdot v$ est donc dans H. Montrons que u^{-1} est aussi dans H. Soit y un élément de G. On a

$$\begin{aligned} u^{-1} \cdot y &= (y^{-1} \cdot u)^{-1} \\ &= (u \cdot y^{-1})^{-1} && \text{cat } y^{-1} \in G \text{ et } u \in H \\ &= y \cdot u^{-1} \end{aligned}$$

L'élément u^{-1} est donc dans H. L'ensemble H étant non vide stable par la loi et l'inverse de G, c'est un sous-groupe de G.

2. Soient u et v deux élements de H. Comme u est en particulier un élement de G est que v appartient à H, on a $u \cdot v = v \cdot u$. Le groupe H est donc commutatif.

3. Si G est commutatif alors pour tout $x \in G$ et $y \in G$, on a $x \cdot y = y \cdot x$. Tout élément de G est donc élément de H. Il s'en suit $H = G$.