Université du Littoral Côte d'Opale
Licence 1ère année

Année universitaire 2012–2013
Mathématiques et Informatique

Algèbre - Devoir

Durée : 2 h le lundi 8 avril
Documents et calculatrices non autorisés

Exercice 1 (4 points)**.** Soient E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation sur E. On définit une relation $\mathcal{R}'$ sur l'ensemble $E \times E$ par

$$\forall((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in (E \times E)^2, \quad (x_1, y_1)\mathcal{R}'(x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 \mathcal{R} x_2 \text{ et } y_1 \mathcal{R} y_2.$$

1. Rappeler la définition d'une relation d'équivalence.

2. Montrer que si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence alors $\mathcal{R}'$ l'est aussi.

3. Réciproquemet, montrer que si $\mathcal{R}'$ est une relation d'équivalence alors $\mathcal{R}$ en est une aussi.

Exercice 2 (5 points)**.** Soit f l'application définie par

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x - y^2 \end{array}$$

1. L'application f est-elle injective ?

2. Montrer que l'application f est surjective.

3. Trouver une application $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ telle que $f \circ g = id_{\mathbb{R}}$.

Soit h l'application définie par

$$\begin{array}{rcl} h : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x + y^2, y) \end{array}$$

4. Montrer que h est une bijection.

5. Calculer $(f \circ h)(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 3 (3 points)**.** Soient E un ensemble non vide et $f : E \to \mathcal{P}(E)$ une application (on rappelle que $\mathcal{P}(E)$ désigne l'ensemble des parties de E). Posons $A = \{x \in E \,|\, x \notin f(x)\}$. Soit x un élément de E.

1. Montrer $x \in f(x) \cup A$ et $x \notin f(x) \cap A$.

2. En déduire $f(x) \neq A$.

3. Montrer que l'application f n'est pas surjective.

Exercice 4 (5 points)**.** On considère le système suivant:

$$(S) \quad \begin{cases} x + 3y + z + t & = -1 \\ 2x + 7y + 3z & = -5 \\ 3x + 8y + 7z + 11t & = 13 \\ -2x - 8y - 2z + 6t & = 18 \end{cases}$$

1. Mettre ce système sous forme matricielle $AX = B$.

2. Résoudre (S) à l'aide du pivot de Gauß (uniquement).

Exercice 5 (3 points)**.** Soit G un groupe. Posons $H = \{x \in G \,|\, xy = yx \ \forall y \in G\}$.

1. Montrer que H est un sous groupe de G.

2. Montrer que H est commutatif.

3. Déterminer H lorsque G est commutatif.