Université du Littoral Côte d'Opale — Année universitaire 2012–2013
Licence 1ère année — Mathématiques et Informatique

Algèbre - Examen

Durée : 3h
Date : jeudi 30 mai 2013
Documents et calculatrices non autorisés

Exercice 1 (3 points)**.**
1) Rappeler la définition d'un anneau commutatif.
2) Donner, pour l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, un exemple de famille libre qui n'est pas génératrice.
3) Donner, pour l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, un exemple de famille génératrice qui n'est pas libre.
4) Montrer que les éléments inversibles d'un anneau $(A, +, \times)$ forment un groupe.

Exercice 2 (3 points)**.** Soit A et B deux matrices de $M_3(\mathbb{R})$ définies par

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

1) Calculer la somme $A + B$.
2) Calculer le produit $A \times B$.
3) Calculer l'inverse de la matrice A.

Exercice 3 (3 points)**.** On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$u_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad u_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

1) Montrer que le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par u_1 et u_2 est le même que celui engendré par u_3 et u_4.
2) Montrer que les vecteurs u_1 et u_2 sont linéairement indépendants. Compléter ces vecteurs pour former une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 4 (4 points)**.** Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les familles $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\mathcal{C} = (v_1, v_2, v_3)$ avec

$$u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1) Les familles $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont-elles libres ?
2) Les familles $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont-elles génératrices ?
3) Les familles $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont-elles des bases ?
4) Ecrire lorsque c'est possible le vecteur $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ comme combinaison linéaire en les vecteurs de $\mathcal{B}$ puis comme combinaison linéaire en les vecteurs de $\mathcal{C}$.

Exercice 5 (3 points)**.** Soient E, F et G des ensembles, f une application de E dans F et g une application de F dans G. On pose $h = g \circ f$.

1) Montrer que si f et g sont bijectives alors h est bijective. Dans ce cas exprimer la fonction réciproque de h en fonction de celles de f et g.

Application : Posons $E = \mathbb{R}$ et $F = G =]0, +\infty[$. Soient f et g les fonctions définies par

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to &]0, +\infty[\\ x & \mapsto & e^{2x+1} \end{array} \qquad g : \begin{array}{rcl}]0, +\infty[& \to &]0, +\infty[\\ x & \mapsto & \sqrt{3x} \end{array}$$

2) Montrer que les fonction f et g sont bijectives et donner leurs réciproques.

3) Montrer que $h = g \circ f$ est bijective et donner sa réciproque en utilisant le **1)**.

Exercice 6 (4 points)**.** On note E l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour f et g deux éléments de E et λ un réel on définit les opération $+$ et $\cdot$ par

$$f + g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) + g(x) \end{array} \qquad \lambda \cdot f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda \cdot f(x) \end{array}$$

Nous admettons que, munis de ces deux opérations, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1) On note P l'ensemble des fonctions continues paires, c'est-à-dire vérifiant $f(x) = f(-x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$. Montrer que P est un sous-espace vectoriel de E.

2) Soit ϕ l'application de E dans E qui à f associe $\phi(f)$ définie par

$$\phi(f) : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{f(x)+f(-x)}{2} \end{array}$$

Montrer que ϕ est une application linéaire de E. On pourra montrer $\phi(\lambda \cdot f + g)(x) = \lambda \cdot \phi(f)(x) + \phi(g)(x)$ pour tout $f, g \in E$ et $\lambda, x \in \mathbb{R}$.

3) Montrer que P est l'image de ϕ.

4) Quel est le noyau de ϕ ?