

TD d'Algèbre
3 – Systèmes

Exercice 1. Résoudre le système

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 8 \\ 4 & -3 & -8 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 6 & -6 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

1. Résoudre $A \cdot X = 0$.

2. Calculer le produit $A \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Soient X_1 et X_2 deux solutions de $A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Posons $Y = X_1 - X_2$.

Montrer que $A \cdot Y = 0$.

4. En déduire l'ensemble des solutions de $A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. Résoudre les systèmes suivants et expliciter l'ensemble des solutions.

$$(1) \begin{cases} x - z = 0 \\ -x + y = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

$$(6) \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 1 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$$

$$(7) \begin{cases} x + y + z + t = -9 \\ x + 2y + 4z + 8t = -9 \\ x + 3y + 9z + 27t = 5 \\ x + 4y + 16z + 64t = 45 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 2x + y - 3z = 5 \\ 3x - 2y + 2z = 5 \\ 5x - 3y - z = 16 \end{cases}$$

$$(8) \begin{cases} x + 2y - 3z + 2t = 2 \\ 2x + 5y - 3z + 6t = 5 \\ 3x + 4y - 5z + 2t = 4 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ 2x + 3y + 8z = 4 \\ 3x + 2y + 17z = 1 \end{cases}$$

$$(9) \begin{cases} x + 2y - z + 3t = 3 \\ 2x + 4y + 4z + 3t = 9 \\ 3x + 6y - z + 8t = 10 \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} 2x + 3y - 2z = 5 \\ x - 2y + 3z = 2 \\ 4x - y + 4z = 1 \end{cases}$$

$$(10) \begin{cases} x + 2y + 2z = 2 \\ 3x - 2y - z = 5 \\ 2x - 5y + 3z = -4 \\ x + 4y + 6z = 0 \end{cases}$$