Université du Littoral **Année universitaire 2011-2012**
Licence 1 ère année **Mathématiques et Informatique**

TD d'Algèbre

4 – Groupes et Anneaux

Exercice 1. Les ensembles suivants, munis des lois internes suivantes sont-ils des groupes ?

1. $A = \mathbb{Z}$, $x \oplus y = x + y + 1$.

2. $B = \mathbb{Q}^* \times \mathbb{Q}^*$, $x \otimes y = (x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2)$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $C = \{z \in \mathbb{C} \ / \ z^n = 1\}$, muni de la multiplication usuelle.

4. $D = \mathbb{R}^*$, $x \otimes y = \frac{x}{y}$.

5. Soit X un ensemble non-vide.
$E = \{f : X \mapsto X \ / \ \text{f est une bijection } \}$, muni de la composition d'applications $f \circ g$.

6. $F = M_n(\mathbb{R})$ muni de la multiplication matricielle.

Exercice 2. Soit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $\otimes$ la loi de composition sur G définie par :

$$(x, y) \otimes (x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y).$$

1. Vérifier que $\otimes$ est une loi interne dans G.

2. La loi $\otimes$ est-elle associative ? commutative ?

3. A-t-on un élément neutre dans $(G, \otimes)$? Lequel ?

4. $(G, \otimes)$ est-il un groupe ? et $(G^*, \otimes)$?

Exercice 3. Soit $(G, *)$ un groupe. On suppose que pour tout $x \in G$, on a $x^2 = e$.

1. Montrer qu'on a $x = x^{-1}$ pour tout $x \in G$.

2. Montrer que G est commutatif.

Exercice 4. Soit G un groupe. Posons $H = \{x \in G \,|\, xy = yx, \ \forall y \in G\}$.

1. Montrer que H est un sous groupe de G.

2. Montrer que H est commutatif.

Exercice 5.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $n\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.

2. Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$. Montrer que $H = n\mathbb{Z}$ pour un certain n dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{C} \backslash \{0\} \to \mathbb{U}$ l'application définie par $f(z) = z/|z|$. Monter que f est un morphisme surjectif.

Exercice 7. Soit $(G, *)$ un groupe.

1. L'application $f : (G, *) \mapsto (G, *)$ définie par $f(g) = g^{-1}$ est-elle un morphisme ?

2. Sous quelle condition est-ce un (iso)morphisme ?

Exercice 8. Montrer que si G est abélien et que si $f : G \mapsto H$ un est morphisme surjectif, alors H est abélien.

Exercice 9. Soient G et G' deux groupes, et soit f un morphisme de G dans G'. Montrer que f est injectif si et seulement si $\ker f = \{e\}$, où e est l'élément neutre de G.

Exercice 10. Soient G et G' deux groupes. Soit $f : G \mapsto G'$ un morphisme. Désignons par H l'ensemble des éléments $x \in G$ tels que $f(x) = g(x)$. Montrer que H est un sous-groupe de G.

Exercice 11. On dit qu'un anneau $(A, +, \cdot)$ est intègre si $\forall\, a, b \in A : a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \ \vee \ b = 0$.

1. Montrer que $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ est un anneau intègre.

2. Montrer que $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}, +, \cdot)$ est un anneau non-intègre.

3. Montrer que $(M_n(\mathbb{C}), +, \times)$ est un anneau non-intègre.

Exercice 12. Soit p un nombre premier, et soit $\varphi : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ définie par $\varphi(a) = a^p$.

1. Montrer que φ est l'identité de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

2. En déduire que pour tout entier a non divisible par p, on a $a^{p-1} \equiv 1 \ mod\, p$.

Exercice 13. Soit $A = \mathcal{C}([0, 1])$ l'ensemble des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer qu'on peut munir A d'une structure d'anneau.

2. Montrer que A est un anneau non-intègre.

3. Montrer que $B = \{f \in A \ / \ f(1/2) = 0\}$ est un sous-anneau de A.

Exercice 14. Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau tel que pour tout $x \in A$, $x^2 = x$.

1. Montrer que pour tout $x \in A$, $2x = 0$.

2. Montrer que A est commutatif.

Exercice 15. Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau. On dit que $x \in A$ est nilpotent s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que, $x^n = 0$.

1. Soient x et y deux éléments nilpotents qui commutent. Montrer que $x + y$ est nilpotent.

2. Soit x un élément nilpotent et soit $y \in A$ tel que $x \cdot y = y \cdot x$. Montrer que $x \cdot y$ est nilpotent.

3. Soit x un élément nilpotent. Montrer que $1 - x$ est inversible et donner son inverse.

Exercice 16. Soit $f : A \mapsto B$ un morphisme d'anneaux. Montrer que $\ker f = \{0_A\} \Leftrightarrow f$ est injectif.

Exercice 17. Soient $(A, +, \cdot)$ un anneau, $a \in A^*$ et $\varphi : A \mapsto A$ l'application définie par $\varphi(x) = a{\cdot}x{\cdot}a^{-1}$. Montrer que φ est un automorphisme d'anneaux.

Exercice 18. Soit A un anneau. On dit que $p \in A[X]$ (l' "anneau des polynômes sur A") s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n \in A$ tel que $p = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$.

1. Montrer que $(A[X], +, \cdot)$ est un anneau.

2. Montrer que $I = \{p \in A[X]/a_1 = 0\}$ est un sous-anneau de $A[X]$.

3. Soient $(B, \oplus, *)$ un anneau et $f : (A, +, \cdot) \mapsto (B, \oplus, *)$ un morphisme d'anneau. Montrer que $f : A[X] \mapsto B[X]$ défini par

$$f(\sum_{i=0}^{n} a_iX^i) = \sum_{i=0}^{n} f(a_i)X^i$$

est un morphisme d'anneaux.

Exercice 19. Sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ on définit les lois suivantes :

$$(a_1, a_2) \oplus (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \ \text{ et } \ (a_1, a_2) \otimes (b_1, b_2) = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2)$$

1. Montrer que $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \oplus, \otimes)$ est un anneau.

Soit $f : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[X] \mapsto \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ l'application définie par $f(p) = (p(0), p(1))$.

2. Montrer que f est un morphisme d'anneaux. Est-il injectif ?

Exercice 20. Montrer que tout anneau intègre fini est un corps.

Exercice 21. Déterminer, lorsque c'est possible, l'inverse de chacune des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$